

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

#### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

#### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



#### Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

#### Nutzungsrichtlinien

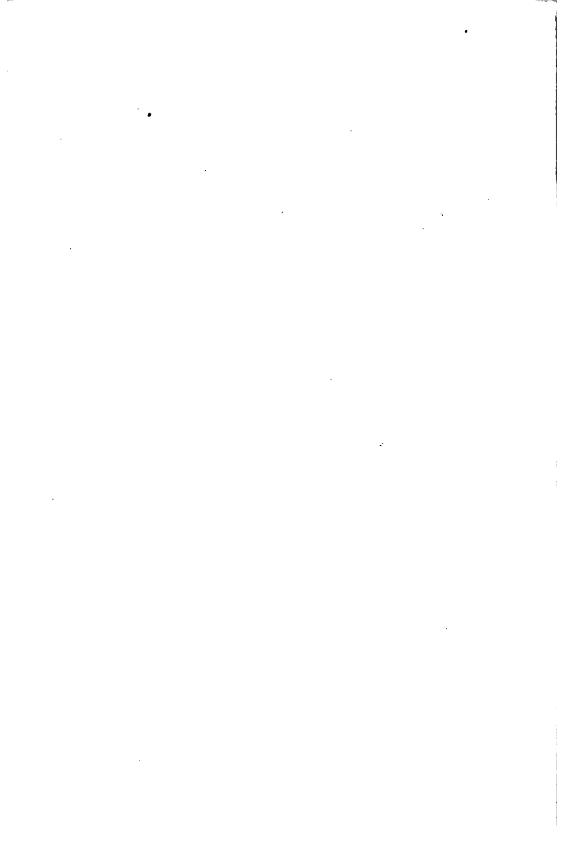
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + Beibehaltung von Google-Markenelementen Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

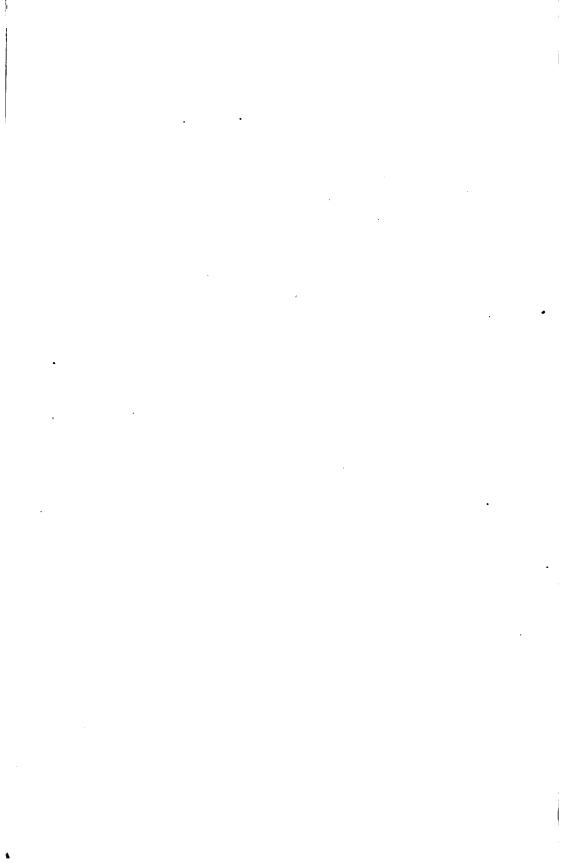
#### Über Google Buchsuche

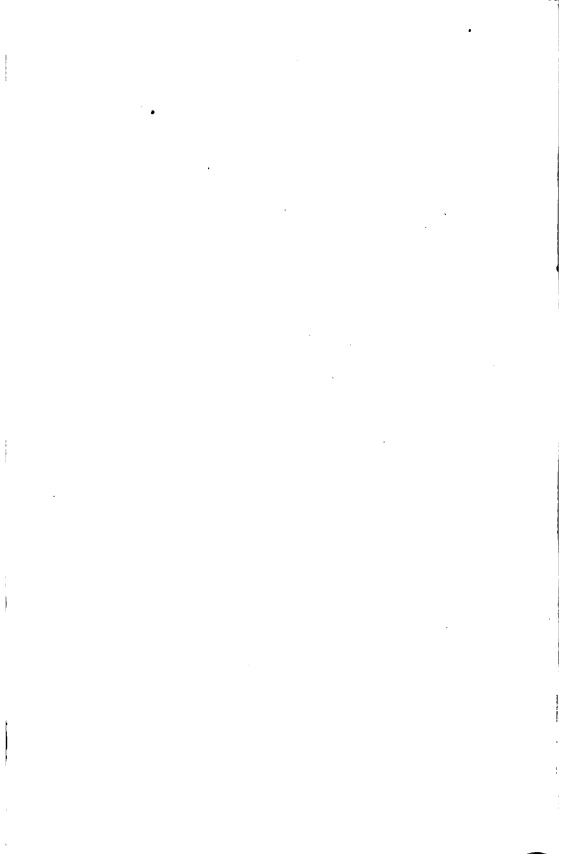
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com/durchsuchen.



•

. •





## SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTDRITTER BAND.

WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIR DER WISSENSCHAFTEN.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

### AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CIII. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1894. — HEFT I BIS X.

(MIT 8 TAFELN UND 72 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1894, Juli 1-1895 Apr. 8. LSoc386.4 Farran find.

### INHALT.

S	eite
I. Sitzung vom 4. Jänner 1894: Übersicht	3
II. Sitzung vom 11. Jänner 1894: Übersicht	41
III. Sitzung vom 18. Jänner 1894: Übersicht	05
IV. Sitsung vom 1. Februar 1894: Übersicht	29
V. Sitzung vom 8. Februar 1894: Übersicht	31
VI. Sitzung vom 15. Februar 1894: Übersicht	33
VII. Sitsung vom 1. März 1894: Übersicht	03
VIII. Sitzung vom 8. März 1894: Übersicht	23
IX. Sitzung vom 5. April 1894: Übersicht	27
X. Sitzung vom 12. April 1894: Übersicht	77
XI. Sitzung vom 19. April 1894: Übersicht	78
XII. Sitzung vom 4. Mai 1894: Übersicht	81
XIII. Sitzung vom 10. Mai 1894: Übersicht	83
XIV. Sitzung vom 25. Mai 1894: Übersicht	37
XV. Sitzung vom 7. Juni 1894: Übersicht	41
XVI. Sitzung vom 14. Juni 1894: Übersicht 6	11
XVII. Sitzung vom 21. Juni 1894: Übersicht 6	12
KVIII. Sitzung vom 5. Juli 1894: Übersicht 6	17
XIX. Sitzung vom 12. Juli 1894: Übersicht	73
XX. Sitzung vom 11. October 1894: Übersicht	79
XXI. Sitzung vom 18. October 1894: Übersicht	81
XXII. Sitzung vom 2. November 1894: Übersicht 9	85
XXIII. Sitzung vom 8. November 1894: Übersicht 9	86
KXIV. Sitzung vom 16. November 1894: Übersicht 10	36
XXV. Sitzung vom 29. November 1894: Übersicht	37
KXVI. Sitzung vom 6. December 1894: Übersicht	03
XVII. Sitzung vom 13. December 1894: Übersicht	)5
Data 17 Division in the state of the Advanced	
Bobek K., Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.	0.7
[	87
Bryan G. H. und Boltzmann L., Über die mechanische Analogie	
des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper.	
(Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	ະວ

	Seite
Czermak P., Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen	
Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen	
wird. (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	1107
Czuber E., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen	
erster Ordnung. [Preis 25 kr. = 50 Pfg.]	295
Exner F., Elektrochemische Untersuchungen. (IV. Mittheilung.)	
(Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	845
Finger J., Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen	
zwischen den Deformationen und den Spannungen in	
elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von	
Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von	
dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. [Preis:	
40 kr. = 80 Pfg.]	163
- Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen	
zwischen den Deformationen und den Spannungen in	
elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von	
Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von	
dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. (II. Theil.)	
[Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	231
<ul> <li>Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunkts-</li> </ul>	-0.
flächen zweiter Ordnung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	1061
Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen	.00.
Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aelo-	
tropen und isotropen Substanzen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1	1073
Garvanoff J. G., Über die innere Reibung in Ölen und deren	
Änderung mit der Temperatur. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis:	
	873
Gegenbauer L., Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen	0.0
Zahl durch gewisse Formen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	115
- Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitäts-	
	285
Haerdtl E. Frh. v., Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten	
	713
Hann J., Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen	•••
Elemente in den höheren Luftschichten [Preis: 45 kr. =	
90 Pfg.]	51
Die täglicne Periode der Windstärke auf dem Sonnblick-	٠.
gipfel und auf Berggipfeln überhaupt. [Preis: 60 kr. =	
1 Mk. 20 Pfg.]	619
Herz N., Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene	0.0
astronomische Inschrift. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 kr. =	
50 Pfg.]	135
Täger G., Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigen-	- 0.0
bewegung der Fixsterne. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis:	
	145

Smoluchowski M. v., Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 40 kr. =

Streintz F., Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.].

80 Pfg.]

98

Se	ite
Streintz F., Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär-	
Elemente. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	27
Suchanek E., Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommen-	
den Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. [Preis:	
1 fl. 30 kr. = 2 Mk. 60 Pfg.] 4	43
Trabert W., Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer	
Atmosphäre. (Mit 2 Textfiguren.) Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 103	23
Tumlirz O., Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten. (II. Mit-	
theilung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 26	86
Voigt W., Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhand-	
lung »Das Potential der inneren Kräfte etc.« [Preis: 5 kr. =	
10 Pfg.]	39
Weyr E., Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Ge-	
schlechte Eins und seine Anwendung. (Mit 7 Textfiguren.)	
[Preis: 70 kr. = 1 Mk. 40 Pfg.]	35
Zsigmondy K., Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen	
Functionen nten Grades von x, welche in Bezug auf einen	
gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl	
von Wurzeln besitzen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 13	35
Zuchristian J., Experimentelle Darstellung von Magnetseldern.	
(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 94	<b>4</b> 3



DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. UND II. HEFT.

JAHRGANG 1894. - JÄNNER UND FEBRUAR.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TEXTFIGUREN.)



DWIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREL

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISEKLICHEN ANADEMIB DER WISSENSCHAFTEN.

### INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

		Seite
I.	Sitzung vom 4. Jänner 1894: Übersicht	2
	Mertens F., Über die Fundamentalgleichung eines Gattungs-	
	bereiches algebraischer Zahlen [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] .	5
11.	Sitzung vom 11. Jänner 1894: Übersicht	41
	Liznar J., Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs (V. und	
	letzter vorläufiger Bericht) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	43
	Hann J., Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen	
	Elemente in den höheren Luftschichten [Preis: 45 kr. =	
	90 Pfg.]	51
	Streintz F., Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des	
	Salzgehaltes seiner Lösungen [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	98
	Sitzung vom 18. Jänner 1894: Übersicht	
111.		105
	Obermayer A. v. und Schindler A., Die trigonometrische Höhen-	
	bestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	107
	Gegenbauer L., Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen	101
	Zahl durch gewisse Formen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	115
TV.	Sitzung vom 1. Februar 1894: Übersicht	
	Sitzung vom 8. Februar 1894: Übersicht	
VI.	Sitzung vom 15. Februar 1894: Übersicht	133
	Zsigmondy K., Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen	
	Functionen nten Grades von x, welche in Bezug auf einen	
	gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	
	Jäger G., Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigen-	135
	bewegung der Fixsterne. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis:	
	20 kr. = 40 Pfg.]	
		-



### SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE. PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



#### I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 1. Jänner 1. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Professor Dr. Heinrich Hertz in Bonn.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt die aus dem erschienenen 60. Band (Jahrgang 1893) veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (Zweite Reihe), ferner das Heft X (December 1893) der Monatshefte für Chemie vor.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Gesandtschaftswege für die Bibliothek der kaiserl. Akademie eingelangtes Druckwerk: \*Études des Gîtes Minéraux de la France«, publicirt im Auftrage des französischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten.

Das Präsidium der mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau ladet die kaiserl. Akademie zur Theilnahme an der aus Anlass des 25jährigen Bestandes dieser Gesellschaft am 21. Jänner 1. J. daselbst stattfindenden feierlichen Sitzung ein.

Das ungarische Central-Bureau für ornithologische Beobachtungen in Budapest zeigt an, dass diese neugegründete Anstalt mit 1. Jänner 1894 ihre Thätigkeit in der Organisirung des Beobachtungsnetzes begonnen hat.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen.«

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen.«

Herr Prof. Dr. C. Nicoladoni in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Skoliose des Lendensegmentes.« (Fortsetzung.)

Das w. M. Herr Hofrath C. Claus überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: »Zoologische Ergebnisse der Tiefsee-Expedition im östlichen Mittelmeere auf S. M. Schiff »Pola«. III. Die Holocypriden und ihre Entwicklungsstadien. Gesammelt 1890, 1891, 1892, 1893.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung von Dr. R. Daublebsky v. Sterneck: »Abzählung der Primzahlen von der Form 100n+1«.

Der Secretär Herr Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten.«

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Loewy, M., Recherches sur la détermination des constantes des chlichés photographiques du ciel. Paris, 1893; 4°.

- Ministère des Trauvaux publics, Études des Gîtes Minéraux de la France. Publiées sous les auspices de M. le Ministre de Travaux publics par le Service des Topographies souterraines. Bassin houiller et permin d'Autun et d'Épinac. Fascicule IV. Flore Fossilie. IIme Partie par B. Renault. (Atlas). Paris, 1893; 40.
- Mayor, A., Louis Agassiz, sa vie et sa correspondance. Traduit de l'Anglais. (Orné d'un portrait d'Agassiz.) Neuchâtel, 1887; 8°.
- Vincenti Giuseppe. La Fonografia universale Michela e la Fono-Telegrafia universale Vincenti. Torino 1893; Folio.

# Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen

von

#### F. Mertens,

c. M. k. Akad.

1.

Ist

$$x^{n} + c_{1}x^{n-1} + c_{2}x^{n-2} + \ldots + c_{n} = 0$$
 (1)

eine gegebene irreductibele Gleichung nten Grades mit rationalen Coëfficienten und  $\xi$  eine Wurzel derselben, so wird die Gesammtheit aller ganzen rationalzahligen Functionen von  $\xi$  nach Kronecker<sup>1</sup> ein Gattungsbereich genannt, welcher hier mit  $\mathfrak{G}$  bezeichnet werden soll.

Jede solche Function

$$\eta = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots$$

welche immer unter den Grad n in  $\xi$  gebracht werden kann, genügt einer rationalzahligen Gleichung n<sup>ten</sup> Grades

$$y^n + c'_1 y^{n-1} + c'_2 y^{n-2} + \ldots + c'_n = 0,$$

deren linke Seite die Norm von

$$y-b_0-b_1\xi-b_2\xi^2-\dots$$

oder die Resultante von

$$y-b_0-b_1x-b_2x^2-...$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Festschrift »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen«, Crelle's Journal, Bd. 92.

und

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$$

ist. Sind insbesondere in dieser Gleichung die Coëfficienten

$$c'_1, c'_2, \ldots c'_n$$

ganze Zahlen, so wird  $\eta$  eine ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$  genannt.

Es gibt unendlich viele Systeme von n ganzen algebraischen Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$ , welche die Eigenschaft haben, dass jede ganze algebraische Zahl dieses Bereiches als Vielfachsumme  $^1$  von  $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$  darstellbar ist. Ein solches System wird ein Fundamentalsystem von  $\mathfrak{G}$  genannt.

Sind

$$\omega_1', \quad \omega_2', \quad \dots \quad \omega_n'$$

$$\omega_1'', \quad \omega_2'', \quad \dots \quad \omega_n''$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\omega_1^{(n-1)}, \quad \omega_2^{(n-1)}, \dots \quad \omega_n^{(n-1)}$$

die conjugirten Werthe der Zahlen  $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ , welche aus letzteren hervorgehen, wenn  $\xi$  nach und nach durch alle anderen Wurzeln der Gleichung (1) ersetzt wird, so heisst das Quadrat der Determinante

$$\Omega = \left| egin{array}{cccc} \omega_1, & \omega_2, & \dots & \omega_n \ \omega_1', & \omega_2', & \dots & \omega_n' \ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \ \omega_1^{(n-1)}, & \omega_2^{(n-1)}, \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{array} 
ight|,$$

welches für alle Fundamentalsysteme denselben Werth hat, die Discriminante des Gattungsbereiches &.

Sind ferner  $u_1, u_2, \dots u_n$  Unbestimmte und setzt man

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ich erlaube mir hier eine ganze ganzzahlige linear-homogene Function mehrerer Grössen kurz als Vielfachsumme dieser Grössen zu bezeichnen.

so ist das Product

$$(t-u)(t-u')...(t-u^{(n-1)})$$

in den Wurzeln der Gleichung (1) symmetrisch und daher als ganze Function von t von der Form

$$F(t) = t^n - C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} - \ldots \pm C_n$$

darstellbar, in welcher

$$C_1, C_2, \ldots C_n,$$

beziehungsweise ganze ganzzahlige homogene Functionen der Unbestimmten  $u_1, u_2, \ldots u_n$  vom Grade  $1, 2, \ldots n$  sind. Die Gleichung

$$F(t) \equiv 0$$
,

welche die Wurzeln

$$u, u', \ldots u^{(n-1)}$$

hat und irreductibel ist, wird die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches & genannt.

Es soll hier das Verhalten der Function F(t) in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul untersucht werden. Uu diesem Zwecke sollen jedoch behufs grösserer Klarheit einige Sätze und Bemerkungen vorausgeschickt werden.

2.

I. Unter einer Function einer oder mehrerer Veränderlichen oder Unbestimmten werde hier in diesem Abschnitte immer eine ganze ganzzahlige Function dieser Veränderlichen und unter p eine gegebene Primzahl verstanden. Das Zeichen  $\Gamma$  soll immer eine ganze ganzzahlige Function vorstellen.

Jede Function G ist in Bezug auf den Modul p einer Function  $G_0$  congruent, deren Coëfficienten nicht negativ und < p sind. Denn man braucht nur, um  $G_0$  zu erhalten, jeden Coëfficienten von G durch seinen kleinsten nicht negativen Rest in Bezug auf den Modul p zu ersetzen. Unter der Gradzahl der Function G in Bezug auf eine der in derselben vorkommenden Veränderlichen wird die betreffende Gradzahl von  $G_0$ , unter der

<sup>1</sup> V. Kronecker's Festschrift, §. 25.

Gradzahl in Bezug auf mehrere Veränderliche die Summe der auf die einzelnen Veränderlichen sich beziehenden Gradzahlen verstanden. Wenn  $G_0$  identisch = 0 ist oder alle Coëfficienten von G durch p theilbar sind, so hat G keine Gradzahlen in Bezug auf den Modul p.

II. Man sagt, dass eine Function A durch eine Function M, welche jedoch nicht durch p theilbar sein darf, in Bezug auf den Modul p theilbar ist oder dass M in A aufgeht oder ein Theiler von A ist, wenn

$$A \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist.

Wenn A nicht durch p theilbar ist und M in Bezug auf p in A aufgeht, so hat M keine höheren Gradzahlen als A.

Wenn jede der Functionen M, N durch die andere in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so ist

$$N \equiv aM \pmod{p}$$
,

wo a eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet. Denn man hat

$$N \equiv QM \pmod{p}$$
  
 $M \equiv Q_1 N \pmod{p}$ ,

wo Q,  $Q_1$  ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Aus diesen Congruenzen folgt

$$M(1-QQ_1) \equiv 0 \pmod{p}$$
,

also auch

$$1-QQ_1 \equiv 0 \pmod{p}$$
.

Wenn aber

$$QQ_1 \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so müssen alle Gradzahlen von Q und  $Q_1 = 0$  sein und Q ist eine nicht durch p theilbare Zahl a.

III. Wenn die Producte einer Function G der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

in *n* Functionen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

derselben Veränderlichen, welche jedoch beziehungsweise in  $x_1, x_2, \ldots x_n$  in Bezug auf p vom Grade 0 sind, durch die Function M in Bezug auf den Modul p theilbar sind, so ist G selbst in Bezug auf p durch M theilbar.

Gesetzt, man kenne eine Function  $\omega$  der Veränderlichen  $x_1, x_2, \ldots x_n$ , welche k verschwindende Gradzahlen besitzt, aber  $x_m$  in höherem als dem Oten Grade enthält und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man hat dann

$$\omega G \equiv AM \pmod{p}$$

$$f_m G \equiv BM \pmod{p},$$

also auch

$$M(Af_m - \omega B) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo A, B ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Hieraus folgt

$$Af_m - \omega B \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$\omega B = A f_m + p \Gamma$$
.

Ist nun  $\psi x_m^r$  der die höchste Potenz von  $x_m$  enthaltende Bestandtheil von  $\omega$ ,  $P_{h-1}$  ein Product von irgend h-1 Coëfficienten, welche in  $\omega$  bei den einzelnen Potenzen von  $x_m$  stehen, und b, C jeder Coëfficient einer Potenz von  $x_m$  in B und  $Af_m+p\Gamma$ , so gibt es einen Exponenten h von der Art, dass sich jedes Product  $\psi^h b$  als Vielfachsumme aller Producte  $P_{h-1}$  C darstellen lässt. Da aber jeder Coëfficient C durch  $f_m$  in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so wird

$$\psi^h b \equiv \Gamma f_m \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$\psi^h B \equiv \Gamma f_m \pmod{p}.$$

Hieraus folgt

$$\psi^h BM \equiv \psi^h f_m G \equiv \Gamma f_m M \pmod{p}$$

oder

$$f_m(\psi^h G - \Gamma M) \equiv 0 \pmod{p}$$

<sup>1</sup> Vergl. Mertens: Ȇber einen algebraischen Satz«, diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

und also auch

$$\psi^h G - \Gamma M \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Function  $\psi^h$  hat daher wieder dieselbe Eigenschaft wie  $\omega$ , dass ihr Product in G nach dem Modul p durch M theilbar ist, besitzt aber eine verschwindende Gradzahl mehr als  $\omega$ . Da man nun eine Function kennt, welche eine verschwindende Gradzahl besitzt und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist, p. B.  $f_1$ , so können durch das vorstehende Verfahren nach und nach Functionen hergestellt werden, welche immer mehr verschwindende Gradzahlen aufweisen und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man gelangt daher auch zu einer Function mit lauter verschwindenden Gradzahlen oder zu einer nicht durch p theilbaren Zahl a, für welche

$$aG \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist. Bestimmt man dann a' aus der Congruenz

$$aa' \equiv 1 \pmod{p}$$
,

so wird

$$aa'G \equiv G \equiv a'\Gamma M \pmod{p}$$
.

IV. Wenn A, B gegebene Functionen von  $x_1, x_2, \ldots x_n$  sind, deren keine durch p theilbar ist, so kann man eine nicht durch p theilbare Function M derselben Veränderlichen bestimmen, welche den Congruenzen

$$f_i A \equiv \mathfrak{A} M \pmod{p}$$
 
$$g_i B \equiv \mathfrak{B} M \pmod{p}$$
  $M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$ 

genügt, wo  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $A_{\vartheta}$ ,  $B_{\varrho}$  Functionen von  $x_1, x_2, \ldots x_n$  bezeichnen, von welchen insbesondere  $f_i$ ,  $g_i$  in Bezug auf  $x_i$  verschwindende Gradzahlen haben.

Man kann ähnlich wie bei dem Verfahren Euclid's eine Reihe von Functionen

$$A, B, C, \dots M, 0 \tag{2}$$

der Veränderlichen  $x_1, x_2, \ldots x_n$  aufstellen, welche folgende Eigenschaften hat. Sie fängt mit den gegebenen Functionen

A, B an und besteht mit Ausnahme der letzten Function, welche = 0 ist, aus lauter durch p nicht theilbaren Functionen. Sind P, Q, R drei Glieder der Reihe, von welchen Q auf P und R auf Q folgt, so erreicht R in  $x_i$  den Grad von Q nicht, und es besteht eine Congruenz von der Form

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}$$
,

wo die Function  $\varphi_i$  in  $x_i$  vom Grade 0 ist.

Sind zwei benachbarte Glieder P, Q der Reihe gegeben, welche nicht durch p theilbar sind, so findet man das auf Q folgende Glied R folgendermassen. Es sei

$$P \equiv a_0 x_i^{\mu} + a_1 x_i^{\mu-1} + \dots + a_{\mu} \pmod{p}$$

$$Q \equiv b_0 x_i^{\mu} + b_1 x_i^{\mu-1} + \dots + b_{\nu} \pmod{p},$$

wo  $a_0$ ,  $b_0$  nicht durch p theilbar sind. Man darf annehmen, dass  $\mu \geq \nu$  ist, da diese Bedingung bei den ersten zwei Gliedern der Reihe eventuell durch Vertauschung von A und B herbeigeführt werden kann und bei den späteren Gliedern von selbst erfüllt ist. Man hat dann durch algebraische Division

$$b_0^{\mu-\nu+1}(a_0x_i^{\mu}+a_1x_i^{\mu-1}+\ldots+a_{\mu})=\Gamma(b_0x_i^{\nu}+b_1x_i^{\nu-1}+\ldots+b_{\nu})+\Re,$$

wo  $\Re$  ganzzahlig ist und in  $x_i$  den Grad  $\nu$  nicht erreicht. Geht der Ausdruck  $\Re$  nach Ersetzung aller seiner Coëfficienten durch ihre kleinsten nicht negativen Reste in Bezug auf den Modul p in R über, so wird

$$b_0^{\mu-\nu+1}P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}$$
.

Bestimmt man in der dargelegten Weise zuerst aus den beiden ersten Gliedern A, B der Reihe das dritte Glied C, hierauf, wofern C noch nicht = 0 ist, aus B und C das vierte Glied D u. s. f., so gelangt man nach einigen Schritten zu der Function 0, da die Gradzahlen der Functionen B, C,... in Bezug auf  $x_i$  eine fallende Reihe bilden, und die gesuchte Reihe ist gebildet.

Gibt es nun für zwei benachbarte Functionen Q, R der Reihe (2) zwei nicht durch p theilbare und  $x_i$  nicht enthaltende Functionen  $\chi_i$ ,  $\omega_i$  von der Art, dass die Producte  $\chi_i Q$ ,  $\omega_i R$  in Bezug auf den Modul p durch die vorletzte Function M der

Reihe theilbar sind, so findet dasselbe für die Functionen P und Q statt, wenn P der Function Q in der Reihe (2) unmittelbar vorangeht. Denn man hat

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}$$

und daher auch

$$\omega_i \chi_i \varphi_i P \equiv \Gamma \omega_i \chi_i Q + \chi_i \omega_i R \pmod{p}$$
$$\equiv \Gamma M \pmod{p}.$$

Da aber die beiden letzten Glieder der Reihe durch M theilbar sind, so gibt es auch zwei nicht durch p theilbare und  $x_i$  nicht enthaltende Functionen  $f_i$ ,  $g_i$  von der Art, dass die Producte  $f_i$  A,  $g_i$  B in Bezug auf den Modul p durch M theilbar sind.

Ist anderseits M durch die zwei benachbarten Functionen Q, R in der Gestalt

$$M = UQ + VR + p\Gamma$$

darstellbar, so findet dasselbe auch für die Functionen P und Q statt, da

$$M \equiv UQ + V(\varphi_i P - \Gamma Q) \pmod{p}$$
$$\equiv \varphi_i VP + (U - \Gamma V)Q \pmod{p}$$

wird. M ist also auch durch die beiden Functionen A und B in derselben Weise darstellbar.

Die vorletzte Function M der Reihe (2) erfüllt mithin alle gewünschten Bedingungen.

V. Zwei Reihen von Functionen

$$A, B, \ldots E$$

und

$$A', B', \ldots E'$$

der Veränderlichen  $x_1, x_2, \ldots x_n$  sollen kurz gleichstimmig in Bezug auf den Modul p genannt werden, wenn sich für jede Veränderliche  $x_i$  und jede Function  $\Phi$  der ersten Reihe und jede Function  $\Phi'$  der zweiten Reihe Functionen  $f_i$ ,  $f_i'$  von der Art angeben lassen, dass die auf  $x_i$  sich beziehenden Gradzahlen derselben = 0 sind und die Producte  $f_i \Phi$ ,  $f_i' \Phi'$  sich beziehungsweise in der Gestalt

$$f_i \Phi \equiv A_0' A' + B_0' B' + \dots + E_0' E' \pmod{p}$$
  
$$f_i' \Phi' \equiv A_0 A + B_0 B + \dots + E_0 E \pmod{p}$$

darstellen lassen, wo  $A_0, B_0, \ldots A_0', B_0', \ldots$  ganze ganzzahlige Functionen von  $x_1, x_2, \ldots x_n$  bezeichnen.

Zwei Functionenreihen sind gleichstimmig, wenn sie mit einer und derselben dritten Functionenreihe gleichstimmig sind.

VI. Es gibt immer eine Function T, welche mit einer Reihe gegebener Functionen

$$A, B, \ldots E,$$

die nicht alle durch p theilbar sind, in Bezug auf den Modul p gleichstimmig ist. Die Function T ist bis auf einen Zahlenfactor bestimmt, da jede mit  $A, B, \ldots E$  gleichstimmige Function T' auch mit einer bestimmten Function T dieser Art gleichstimmig sein, also in der Beziehung

$$T' \equiv aT \pmod{p}$$

stehen muss. Die Function T geht nach III in allen Functionen  $A, B, \ldots E$  in Bezug auf den Modul p auf und ist durch jeden gemeinschaftlichen Theiler dieser Functionen nach p theilbar. Sie wird der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen  $A, B, \ldots E$  in Bezug auf den Modul p genannt.

İst T der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen  $A, B, \ldots E$  in Bezug auf den Modul p und

$$A \equiv A_1 T$$
,  $B \equiv B_1 T$ , ...  $E \equiv E_1 T \pmod{p}$ ,

so ist 1 der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen  $A_1, B_1, \dots E_1$ . Denn aus der Congruenz

$$f_i T \equiv A_0 A + B_0 B + \dots + E_0 E \pmod{p}$$

folgt

$$f_i T \equiv (A_0 A_1 + B_0 B_1 + \dots + E_0 E_1) T \pmod{p}$$

und demzufolge

$$f_i \equiv A_0 A_1 + B_0 B_1 + \ldots + E_0 E_1 \pmod{p}$$
.

Sind  $\varphi$ ,  $\psi$  ganze Functionen der Veränderlichen  $v, \ldots$ , deren Coëfficienten Functionen von  $x_1, x_2, \ldots x_n$  sind und haben die Coëfficienten von  $\varphi$ , von welchen vorausgesetzt wird, dass sie

nicht alle durch p theilbar sind, den grössten gemeinschaftlichen Theiler T in Bezug auf p, so sind die Coëfficienten von  $T\psi$  mit denen von  $\varphi\psi$  gleichstimmig in Bezug auf den Modul p.

Es seien, um dies darzuthun,

$$A_1, A_2, \ldots$$
  
 $B_1, B_2, \ldots$   
 $C_1, C_2, \ldots$ 

beziehungsweise die Coëfficienten der verschiedenen Potenzproducte der Unbestimmten  $v, \ldots$  in den Functionen  $\varphi, \psi$  und  $\varphi\psi$ ,  $P_{\mu}$  irgend ein Product von  $\mu$  Coëfficienten von  $\varphi$  und m die Anzahl der Coëfficienten von  $\varphi$ . Es gibt einen Exponenten h von der Art, dass jedes Product  $A_{\alpha}^{h}B_{\beta}$  sich als Vielfachsumme aller Producte  $P_{h-1}C_{\gamma}$  darstellen lässt. Ist nun

$$f_i T \equiv \mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m A_m \pmod{p},$$

wo  $f_i$  die Veränderliche  $x_i$  nicht enthält und nicht durch p theilbar ist, so wird

$$f_i^{hm}T^{hm} \equiv (\mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m A_m)^{hm} \pmod{p}.$$

Da aber die Potenz

$$(\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}A_{\mathbf{1}}+\mathfrak{A}_{\mathbf{2}}A_{\mathbf{2}}+\ldots)^{hm}$$

eine Vielfachsumme von Ausdrücken  $\mathfrak{P}P_{hm}$  ist, in welchen  $\mathfrak{P}$  ein Product von Ausdrücken  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_m$  bezeichnet, und da jedes Product  $P_{hm}$  die Gestalt  $P_{hm-h}A_r^h$  hat, so ist  $f_i^{hm}T^{hm}B_3$  als Vielfachsumme von Ausdrücken  $\mathfrak{P}P_{hm-1}C_1$  und daher auch in der Gestalt

$$T^{hm-1}(\mathfrak{C}_1C_1+\mathfrak{C}_2C_2+\ldots)+p\Gamma$$

darstellbar, wo  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$ , ... ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Man hat also auch für jedes i

$$f_i^{mh}TB_3 \equiv \mathfrak{C}_1C_1+\mathfrak{C}_2C_2+\ldots\pmod{p}.$$

<sup>1</sup> L. c.

Anderseits ist  $C_{\gamma}$  eine Vielfachsumme von Producten  $A_{\alpha}B_{\beta}$  und somit in der Form

$$T(\mathfrak{B}_1B_1+\mathfrak{B}_2B_2+\ldots)+p\Gamma$$

darstellbar, wo  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$  ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Der Beweis für die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf den Modul p lässt sich zunächst für Functionen einer Veränderlichen unmittelbar und dann für Functionen mehrerer Veränderlichen durch den Schluss von n auf n+1 führen. Hiebei können die etwa durch p theilbaren Functionen der gegebenen Functionenreihe weggelassen werden.

Es seien also

gegebene Functionen einer Veränderlichen x.

Besteht die Reihe aus nur einem Gliede A, so ist T = A. Besteht die Reihe aus zwei Functionen A, B, so gibt es nach IV eine Function M, welche den Bedingungen

$$aA \equiv HM \pmod{p}$$
  
 $bB \equiv KM \pmod{p}$   
 $M \equiv A_0A + B_0B \pmod{p}$ 

genügt, wo a, b nicht durch p theilbare Zahlen und H, K,  $A_0$ ,  $B_0$  ganze ganzzahlige Functionen von x bezeichnen. Ist

$$aa' \equiv 1$$
  $bb' \equiv 1 \pmod{p}$ ,

so wird

$$aa'A \equiv A$$
  $bb'B \equiv B \pmod{p}$ 

und daher

$$A \equiv a'HM \pmod{p}$$
  
 $B \equiv b'KM \pmod{p}$ .

Man kann also T = M setzen.

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A und B in Bezug auf p und hierauf den von M und C. U. s. f. 1

<sup>1</sup> V. Gauss' Werke, Bd. II, Analysis residuorum, Dedekind, Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen r. Primzahlmodulus, Crelle, Bd. 54.

Es werde nun angenommen, dass die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf p für Functionen von n Veränderlichen  $x_1, x_2, \ldots x_n$  bereits feststeht. Es ist zu zeigen, wie man den grössten gemeinschaftlichen Theiler T einer gegebenen Reihe  $A, B, \ldots E$  von Functionen von n+1 Veränderlichen  $x, x_1, x_2, \ldots x_n$  in Bezug auf den Modul p finden kann.

Für eine Function A ist T = A.

Für zwei Functionen A, B gibt es nach IV eine Function M, welche den Congruenzen

$$\varphi A \equiv \mathfrak{A} M \pmod{p}$$

$$\psi B \equiv \mathfrak{B} M \pmod{p}$$

$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo  $\varphi$ ,  $\psi$  nicht durch p theilbare Functionen von  $x_1, x_2, \ldots x_n$  sind, welche x nicht enthalten. Ist g der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in M in Bezug auf p und  $M \equiv gM_1 \pmod{p}$ , so sind die Coëfficienten der Potenzen von x in gM und MM oder  $\varphi A$  gleichstimmig, und es ist daher gM durch  $\varphi$  in Bezug auf p theilbar. Man kann also

$$g\mathfrak{A} \equiv \varphi\mathfrak{A}_{\bullet} \pmod{p}$$

und aus ähnlichen Gründen

$$g\mathfrak{B} \equiv \psi\mathfrak{B}_1 \pmod{p}$$

setzen und hat

$$A \equiv \mathfrak{A}_1 M_1 \pmod{p}$$
$$B \equiv \mathfrak{B}_1 M_1 \pmod{p}.$$

Ist noch f der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Potenzen von x in  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{B}_1$  zusammengenommen und setzt man

$$\mathfrak{A}_1 \equiv fP$$
  $\mathfrak{B}_1 \equiv fQ \pmod{p}$   $fM_1 \equiv T$ ,

so wird

$$A \equiv PT \pmod{p}$$

$$B \equiv QT \pmod{p}$$

$$gT \equiv fA_0 A + fB_0 B \pmod{p},$$
(3)

wo alle Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q zusammengenommen in Bezug auf p den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 haben.

T ist nun der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler von A und B in Bezug auf p. Verfährt man nämlich mit P und Q in Bezug auf  $x_i$  so wie vorher mit A und B in Bezug auf  $x_i$  so findet man eine Function U, welche den Congruenzen

$$P \equiv P_0 U \pmod{p}$$
  
 $Q \equiv Q_0 U \pmod{p}$   
 $g_1 U \equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p}$ 

genügt, wo  $g_i$  nicht durch p theilbar ist und die Veränderliche x nicht enthält. Aus (3) folgt dann

$$gT \equiv fA_0 P_0 TU + fB_0 Q_0 TU \pmod{p}$$
  
$$\equiv \Gamma TU \pmod{p},$$

und es ist also

$$g \equiv \Gamma U \pmod{p}$$
.

Diese Congruenz zeigt, dass U die Veränderliche x nicht enthält. Dann muss aber U in allen Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q aufgehen und somit = 1 sein. Es ist also

$$g_i \equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$g_i T \equiv P_1 P T + Q_1 Q T$$

$$\equiv P_1 A + Q_1 B \pmod{p}.$$

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A, B in Bezug auf p und hierauf den von M und C. U. s. f.

VII. Eine Function wird reductibel oder irreductibel in Bezug auf den Modul p genannt, je nachdem sie in Bezug auf diesen Modul als Product zweier Functionen, welche beide von höherem als dem Oten Grade sind, darstellbar ist oder nicht. Die Irreductibilität, beziehungsweise Reductibilität einer gegebenen Function lässt sich immer durch eine endliche Anzahl von Ver-

suchen feststellen, da die Gradzahlen und Coëfficienten jedes etwaigen Theilers einer solchen Function nur eine endliche Anzahl von Werthen haben können.

3.

Unter einer ganzen algebraischen Form des Gattungsbereiches & versteht man eine ganze Function von Unbestimmten, in welcher die bei den einzelnen verschiedenen Potenzproducten der Unbestimmten stehenden Coëfficienten ganze algebraische Zahlen von & sind.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Norm  $N\varphi$  einer ganzen algebraischen Form  $\varphi$  von  $\mathfrak G$  soll die numerische Norm von  $\varphi$  genannt werden. Eine ganze algebraische Form heisst primitiv, wenn ihre numerische Norm = 1 ist.

Von einer ganzen algebraischen Form  $\psi$  von  $\mathfrak G$  soll gesagt werden, dass sie durch eine andere ebensolche Form  $\varphi$  theilbar ist, wenn es eine ganze ganzzahlige primitive Form E von der Art gibt, dass der Quotient  $\frac{E\psi}{\varphi}$  eine ganze algebraische Form von  $\mathfrak G$  ist. Wenn die Form  $\psi$  durch  $\varphi$  theilbar ist, so ist jeder einzelne Coëfficient von  $\psi$  durch  $\varphi$  theilbar. Zwei Formen heissen absolut äquivalent, wenn jede durch die andere theilbar ist.

Eine ganze algebraische Form  $\varphi$  von  $\mathfrak{G}$  heisst irreductibel oder unzerfällbar, wenn es keine ganze algebraische Form von  $\mathfrak{G}$  gibt, welche in  $\varphi$  aufgeht und deren numerische Norm kleiner als die von  $\varphi$  und grösser als 1 ist.

Eine ganze algebraische Form  $\phi$  von  $\mathfrak G$  wird nach Kronecker eine Grundform genannt, wenn alle Coëfficienten der Formen

$$\omega_1 \varphi, \omega_2 \varphi, \ldots \omega_n \varphi$$

als Vielfachsummen der Coëfficienten der Form  $\varphi$  darstellbar sind. Eine nicht identisch verschwindende Grundform kann nicht weniger als n Coëfficienten besitzen.

<sup>1</sup> Festschrift §. 14.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ebendaselbst §. 24.

Eine ganze algebraische Form kann nur dann durch eine Grundform theilbar sein, wenn ihre Coëfficienten als Vielfachsummen der Coëfficienten der Grundform darstellbar sind.

Sind

die Coëfficienten einer Grundform  $\varphi$  und setzt man für jede Combination  $n^{\text{ter}}$  Classe  $\alpha\beta$ ...s der Zahlen 1, 2,...m

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1z} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2z} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{nz} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\dots z},$$

so ist die numerische Norm von  $\varphi$  der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten  $C_{\alpha\beta...\epsilon}$ , welche den einzelnen Combinationen  $\alpha\beta...\epsilon$  entsprechen.

Es sei h die numerische Norm von  $\varphi$  und man setze

$$N\varphi = hE$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form bezeichnet. Die Quotienten

$$\frac{E\gamma_1}{\varphi}$$
,  $\frac{E\gamma_2}{\varphi}$ ,  $\dots$   $\frac{E\gamma_m}{\varphi}$ 

sind dann ganze algebraische Formen von &, und es sei

$$E_{\gamma_i} = B_i \varphi$$

$$= (b_{1i} \omega_1 + b_{2i} \omega_2 + \ldots + b_{ni} \omega_n) \varphi.$$
(3)

Da ferner  $\omega_i \gamma_x$  sich als Vielfachsumme von  $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$  darstellen lässt, so ist

$$\omega_i \varphi = \varphi_{i1} \gamma_1 + \varphi_{i2} \gamma_2 + \ldots + \varphi_{im} \gamma_m, \qquad (4)$$

wo  $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots \varphi_{im}$  ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Sind nun

$$\varphi', \varphi'', \ldots$$
 $\omega'_i, \omega''_i, \ldots$ 
 $\gamma'_i, \gamma''_i, \ldots$ 
 $B'_i, B''_i, \ldots$ 

die conjugirten Werthe von  $\varphi$ ,  $\omega_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $B_i$ , und setzt man zur Abkürzung

$$egin{array}{c|c} \phi_{1lpha}\phi_{1eta}& \cdots \phi_{1\,\epsilon} \ \phi_{2lpha}\phi_{2eta}& \cdots \phi_{2\,\epsilon} \ \cdots & \cdots & \cdots \ \phi_{nlpha}\phi_{neta}& \cdots \phi_{n\epsilon} \end{array} = \Phi_{lphaeta...\epsilon} \ egin{array}{c|c} \gamma_lpha\gamma_eta& \cdots \gamma_\epsilon \ \gamma_lpha'\gamma_eta' & \cdots \gamma_\epsilon' \ \gamma_lpha''\gamma_eta'' & \cdots \gamma_\epsilon' \ \cdots & \gamma_lpha''\gamma_eta'' & \cdots \gamma_\epsilon' \ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} = \Gamma_{lphaeta...\epsilon} \ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha}b_{1\beta}\dots b_{1\epsilon} \\ b_{2\alpha}b_{2\beta}\dots b_{2\epsilon} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n\alpha}b_{n\beta}\dots b_{n\epsilon} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\dots\epsilon},$$

so wird nach (4)

$$egin{aligned} \Omega N arphi &= \Omega arphi arphi' arphi'' \ldots \ &= egin{aligned} \omega_1 \, arphi, \, \, \omega_2 \, arphi, \, \ldots \omega_n \, arphi \ \omega_1' \, arphi', \, \omega_2' \, arphi', \ldots \omega_n' \, arphi' \ \ldots \, \ldots \, \ldots \, \ldots \ \omega_1'' \, arphi'', \, \omega_2'' \, arphi'', \ldots \omega_n'' \, arphi'' \end{aligned} \ &= \Sigma \, \Phi_{lphaeta,\ldotsar{s}} \Gamma_{lphaeta,\ldotsar{s}} \end{array}$$

und der Gleichung

$$\Gamma_{\alpha\beta\ldots\epsilon} = \Omega C_{\alpha\beta\ldots\epsilon}$$

zufolge

$$N\varphi = \Sigma \Phi_{\alpha\beta...\epsilon} C_{\alpha\beta...\epsilon}, \qquad (5)$$

wo die Summen über alle Combinationen  $n^{\text{ter}}$  Classe  $\alpha\beta$ ... $\epsilon$  der Zahlen 1, 2,...m zu erstrecken sind.

Anderseits ist nach (3)

$$E^n\Gamma_{lphaeta\ldots\epsilon} = egin{array}{c} E\gamma_lpha, E\gamma_eta, \ldots E\gamma_st \ E\gamma_lpha', E\gamma_eta', \ldots E\gamma_st' \ \ldots & \ldots \end{array} \ = egin{array}{c} arphi B_lpha, arphi B_eta, \ldots arphi B_st \ arphi' B_lpha', arphi' B_eta', \ldots arphi' B_st' \ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \ = egin{array}{c} B_lpha, B_eta, \ldots B_st \ B_lpha', B_eta', \ldots B_st' \ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} egin{array}{c} arphi arphi' arphi' \ldots \ & \ldots & \ldots \end{array} \ = B_{lphaeta, \ldots st} \Omega N arphi \end{array}$$

und man hat

$$E^n C_{\alpha\beta...\epsilon} = B_{\alpha\beta...\epsilon} N \varphi. \tag{6}$$

Nach (5), (6) sind sowohl die Coëfficienten von  $N\varphi$  Vielfachsummen der Determinanten  $C_{\alpha\beta...\epsilon}$  als auch umgekehrt diese Vielfachsummen jener. Die grössten gemeinschaftlichen Theiler der Coëfficienten von  $N\varphi$  und der Determinanten  $C_{\alpha\beta...\epsilon}$  fallen daher zusammen.

Jede ganze algebraische Form  $\varphi$  von  $\mathfrak{G}$  ist einer linearen Grundform absolut äquivalent. Sind nämlich  $\alpha$ ,  $\beta$ ,... die Coëfficienten der Form  $\varphi$ , so braucht man nur eine lineare Form zu bilden, deren Coëfficienten sämmtliche Producte

$$\omega_1 \alpha, \omega_2 \alpha, \ldots \omega_n \alpha$$
  
 $\omega_1 \beta, \omega_2 \beta, \ldots \omega_n \beta$ 

sind. Die so gebildete Form ist eine Grundform und hat dieselben Coëfficienten wie die Form

$$(s_1\omega_1+s_2\omega_2+\ldots+s_n\omega_n)\varphi$$

wenn die Unbestimmten  $s_1, s_2, \ldots s_n$  in  $\varphi$  nicht vorkommen, ist also mit dieser Form und daher auch mit  $\varphi$  absolut äquivalent, weil die Form  $s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_n\omega_n$  primitiv ist.

4.

Ist

$$F(t) = 0$$

die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$ , so hat jeder Theiler f von F(t) in Bezug auf den Primzahlmodul p die Gestalt

$$f = a_0 t^{\gamma} + a_1 t^{\gamma - 1} + a_2 t^{\gamma - 2} + \ldots + a_{\gamma},$$

wo  $a_0$  eine nicht durch p theilbare Zahl und  $a_i$  in den Unbestimmten  $u_1, u_2, \ldots u_n$  ganz, ganzzahlig, homogen und vom Grade i ist. Ist  $a_0$  nicht = 1 und  $a_0 a' \equiv 1 \pmod{p}$ , so ist

$$a'f \equiv t^{\nu} + a'a_1t^{\nu-1} + \ldots + a'a_{\nu}$$

und die Function

$$t^{\nu}+a'a,t^{\nu-1}+\ldots+a'a_{\nu}$$

ebenfalls ein Theiler von F(t), durch welchen sich f mittelst der Congruenz

$$f \equiv a_0(t^{\nu} + a'a_1t^{\nu-1} + \ldots + a'a_{\nu}) \pmod{p}$$

ausdrücken lässt. Man erhält daher alle möglichen Theiler von F(t) in Bezug auf den Modul p, wenn man die Theiler von der Form

$$t^{\nu} + a_1 t^{\nu-1} + a_2 t^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu}$$

aufsucht und jeden derselben mit den Zahlen  $1, 2, \dots p-1$  multiplicirt.

5.

Es sei P(t) irgend ein irreductibeler Theiler der Function F(t) in Bezug auf den Primzahlmodul p von der Form

$$P(t) = t^{\nu} + a_1 t^{\nu - 1} + a_2 t^{\nu - 2} + \dots + a_{\nu}$$
 (7)

und man setze

$$P(t)+p = \varphi(t)$$

$$u_1\omega_1+u_2\omega_2+\ldots+u_n\omega_n = u.$$

Es gelten dann folgende Sätze:

I. Die numerische Norm h von  $\varphi(u)$  ist eine Potenz von p, deren Exponent  $\geq v$  ist.

Man hat

$$F(t) \equiv \Gamma P(t) \pmod{p}$$

und es besteht daher eine Identität von der Form

$$F(t) = \Gamma \varphi(t) + pG(t),$$

wo  $\Gamma$ , G ganze ganzzahlige Functionen von t,  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$  bezeichnen. Die Norm von  $\varphi(u)$  oder die Resultante von  $\varphi(t)$  und F(t) fällt hienach mit der Resultante von  $\varphi(t)$  und pG(t) zusammen und hat also die Gestalt  $p^\nu H$ , wo H die Resultante von  $\varphi(t)$  und G(t) ist. Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten von  $\varphi(u)$  ist demnach durch  $p^\nu$  theilbar. Anderseits geht derselbe in dem die Unbestimmten  $u_1, u_2, \ldots u_n$  nicht enthaltenden Gliede  $p^n$  von  $N\varphi(u)$  auf.

II. Es sei g(t) eine ganze ganzzahlige Function von t,  $u_1, u_2, \ldots u_n$  und eventuell noch anderen Unbestimmten und f(t) der Rest, welcher bei der Division von g(t) durch P in Bezug auf t bleibt und den Grad v in t nicht erreicht. Ist f(t) nicht durch p theilbar, so ist weder die — in Bezug auf t zu bildende — Resultante S von g(t) und P(t) durch p, noch g(u) durch p theilbar.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler von P(t) und f(t) in Bezug auf den Modul p kann nur = 1 sein. Denn man kann denselben in der Gestalt

$$t^{\rho}+b_1t^{\rho-1}+\ldots+b_{\rho}$$

annehmen, und es muss  $\rho > \nu$  sein, da f(t) den Grad  $\nu$  in t nicht erreicht. Wäre nun  $\rho > 0$ , so wäre P gegen die Annahme reductibel.

Man hat also eine Identität von der Form

$$U = AP(t) + Bf(t) + p\Gamma$$

und daher auch eine solche von der Form

$$U = AP(t) + Bg(t) + pG(t), \tag{8}$$

wo  $A, B, \Gamma, G, U$  ganze ganzzahlige Functionen von  $t, u_1, u_2, \ldots u_n$  bezeichnen, deren letzte insbesondere t nicht enthält und nicht durch p theilbar ist.

Aus dieser Identität folgt zunächst, dass die Resultante  $U^{\nu}$  von U und P(t) in Bezug auf t mit der von Bg(t)+pG(t) und P(t) zusammenfällt und daher der Resultante von Bg und P in Bezug auf den Modul p congruent ist. Bezeichnet also L die Resultante von B und P, so hat man

$$U^{\mathsf{v}} \equiv LS \pmod{p}$$

und es erhellt, dass S nicht durch p theilbar sein kann, weil p nicht in  $U^{\gamma}$  aufgeht.

Aus der Identität (8) folgt ferner, wenn t = u gesetzt wird,

$$U \equiv A(u)P(u) + B(u)g(u) \pmod{p}.$$

Da  $\varphi(u)$  in p und P(u) aufgeht, so müsste, wenn g(u) durch  $\varphi(u)$  theilbar wäre, auch U durch  $\varphi(u)$  theilbar sein und man hätte eine Identität von der Form

$$EU = v \cdot \varphi(u)$$
,

wo E eine ganze ganzzahlige primitive und v eine ganze algebraische Form bezeichnen. Die Norm  $E^nU^n$  von  $v\varphi(u)$  müsste dann durch die Norm von  $\varphi(u)$  und also auch durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist.

Durch Umkehrung schliesst man, dass f(t) durch p theilbar sein muss, wenn entweder die Resultante S durch p oder die Function g(u) durch  $\varphi(u)$  theilbar ist, und dass S durch p theilbar sein muss, wenn  $\varphi(u)$  in g(u) aufgeht, weil die Resultante einer Function von der Form  $\Gamma P(t) + f(t)$  und der Function P(t) durch p theilbar ist, wenn p in f(t) aufgeht.

III. Die Function  $P'(t) = \frac{\partial P}{\partial t}$  ist nicht durch p theilbar.

Es sei 
$$rac{\partial P}{\partial u} = P_i(t).$$

Da  $\varphi(u)$  in den bei den einzelnen Potenzproducten der Unbestimmten  $u_1, u_2, \dots u_n$  in P(u) stehenden Coëfficienten aufgeht, so ist auch die Ableitung

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u_i} = \omega_i P'(u) + P_i(u)$$

durch  $\varphi(u)$  theilbar und man hat für alle Werthe 1, 2,...n von i

$$P'(u)\omega_i + P_i(u) \equiv 0 \pmod{\varphi u}. \tag{9}$$

Wäre nun P'(t) durch p theilbar, so wäre P'(u) durch p und also auch durch  $\varphi u$  theilbar, und  $\varphi(u)$  musste der vorstehenden Identität zufolge in  $P_i(u)$  aufgehen. Nach II müsste dann die Function  $P_i(t)$ , da sie in t den Grad v nicht erreicht, durch p theilbar sein. Wenn aber alle Ableitungen

$$P', P_1, P_2, \ldots P_n$$

von P durch p theilbar sind, so ist P einer ganzen ganzzahligen Function

$$\psi(t^p, u_1^p, u_2^p, \ldots u_n^p)$$

in Bezug auf den Modul p congruent, und man hätte die mit der Irreductibilität von P in Widerspruch stehende Congruenz

$$P \equiv \psi(t, u_1, u_2, \dots u_n)^p \pmod{p}.$$

Nach II ist also auch die Resultante von P'(t) und P(t) nicht durch p theilbar. Bezeichnet R diese Resultante, so besteht eine Identität von der Form

$$R = Q(t)P'(t) + Q_1(t)P(t),$$

wo Q,  $Q_1$  ganze ganzzahlige Functionen von t,  $u_1$ ,  $u_2$ ,... $u_n$  sind, und man hat für t = u

$$R = Q(u)P'(u) + Q_1(u)P(u)$$
  
=  $Q(u)P'(u) \pmod{\varphi u}$ .

Nach (9) folgt hieraus

$$R\omega_i \equiv -Q(u)P_i(u) \pmod{\varphi u}.$$

Setzt man daher

$$-Q(t)P_i(t) = g_i(t) + \Gamma P(t)$$
  
$$g_i(t) = g_{1i} + g_{2i}t + \dots + g_{vi}t^{v-1},$$

wo  $g_i(t)$  den bei der Division von  $-QP_i$  durch P in Bezug auf t sich ergebenden und den Grad v in t nicht erreichenden Rest bezeichnet, so wird

$$R\omega_i \equiv g_i(u) \pmod{\varphi u}.$$
 (10)

IV. Die numerische Norm h von  $\varphi(u)$  ist  $p^{\nu}$ .

Es sei, wie in III, R die Resultante von P' und P und

$$u^{m-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \ldots + \psi_{mn}\omega_n,$$

wo  $\psi_{m1}, \psi_{m2}, \dots$  ganze ganzzahlige Functionen der Unbestimmten  $u_1, u_2, \dots$  bezeichnen. Nach (10) wird

$$Ru^{m-1}-\psi_{m1}g_1(u)-\psi_{m2}g_2(u)-\ldots-\psi_{mn}g_n(u)\equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

und es folgt hieraus nach II, wenn  $m \leq v$  ist,

$$Rt^{m-1} - \psi_{m1}g_1(t) - \psi_{m2}g_2(t) - \dots - \psi_{mn}g_n(t) \equiv 0 \pmod{p}$$
.

Setzt man daher

$$e_{\mu m} = \psi_{m1} g_{\mu 1} + \psi_{m2} g_{\mu 2} + \ldots + \psi_{mn} g_{\mu n}$$

und versteht unter dem Symbol  $m_{\mu}$  die Einheit oder Null, je nachdem m und  $\mu$  gleich oder ungleich sind, so ist

$$e_{\mu m} \equiv m_{\mu} R \pmod{p}$$

und demzufolge

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1\nu} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\nu 1} & e_{\nu 2} & \dots & e_{\nu \nu} \end{vmatrix} \equiv R^{\nu} \pmod{p}.$$

Setzt man aber anderseits für jede Combination  $v^{\text{ter}}$  Classe  $\alpha\beta...$  der Zahlen 1, 2, ... n

$$\begin{vmatrix} g_{1\alpha}g_{1\beta} \dots g_{1\epsilon} \\ g_{2\alpha}g_{2\beta} \dots g_{2\epsilon} \\ \vdots & \vdots \\ g_{\nu\alpha}g_{\nu\beta} \dots g_{\nu\epsilon} \end{vmatrix} = G_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_{1\alpha}\psi_{1\beta} \dots \psi_{1\epsilon} \\ \psi_{2\alpha}\psi_{2\beta} \dots \psi_{2\epsilon} \\ \vdots & \vdots \\ \psi_{\nu\alpha}\psi_{\nu\beta} \dots \psi_{\nu\epsilon} \end{vmatrix} = \Psi_{\alpha\beta\dots\epsilon},$$

so wird, über alle Combinationen αβ...s erstreckt,

$$\begin{vmatrix} e_{11}e_{12}\dots e_{1\nu} \\ e_{21}e_{22}\dots e_{2\nu} \\ \vdots \\ e_{\nu 1}e_{\nu 2}\dots e_{\nu \nu} \end{vmatrix} = \sum G_{\alpha\beta\dots\epsilon} \Psi_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

und man hat

$$\Sigma G_{\alpha\beta...\epsilon} \Psi_{\alpha\beta...\epsilon} \equiv R^{\gamma} \pmod{p}.$$

Diese Congruenz lehrt, dass wenigstens eine der Determinanten  $G_{\alpha\beta...z}$  nicht durch p theilbar ist.

Es sei also  $\rho\sigma...\tau$  eine bestimmte Combination, für welche  $G_{\rho\sigma...\tau}$  nicht durch p theilbar ist, und man setze zur Abkürzung

$$RG_{ps...t} = H;$$

es seien ferner  $x, \lambda, \ldots \mu$  die Stellenzeiger, welche die Zahlen  $\rho, \sigma, \ldots \tau$  zu  $1, 2, \ldots n$  ergänzen, und

$$\pi_{1} = c_{11} \omega_{1} + c_{21} \omega_{2} + \ldots + c_{n1} \omega_{n}$$

$$\pi_{2} = c_{12} \omega_{1} + c_{22} \omega_{2} + \ldots + c_{n2} \omega_{n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\pi_{m} = c_{1m} \omega_{1} + c_{2m} \omega_{2} + \ldots + c_{nm} \omega_{n}$$

die Coëfficienten einer mit  $\varphi u$  absolut äquivalenten Grundform. Man hat für jeden Stellenzeiger r nach (10)

$$R \omega_{r} - g_{1r} - g_{2r} u - \dots - g_{\nu r} u^{\nu - 1} \equiv 0$$

$$R \omega_{\rho} - g_{1\rho} - g_{2\rho} u - \dots - g_{\nu \rho} u^{\nu - 1} \equiv 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$R \omega_{\tau} - g_{1\tau} - g_{2\tau} u - \dots - g_{\nu \tau} u^{\nu - 1} \equiv 0 \pmod{\varphi u}$$

und erhält nach Fortschaffung von  $1, u, u^2, \dots u^{\nu-1}$ 

$$\begin{vmatrix} R\omega_{r}g_{1r}g_{2r}\dots g_{vr} \\ R\omega_{p}g_{1p}g_{2p}\dots g_{vp} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R\omega_{t}g_{1t}g_{2t}\dots g_{vt} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

oder

$$H\omega_r - RG_{r_2...t}\omega_{\rho} + ... \equiv 0 \pmod{\varphi u}$$
.

Aus dieser Congruenz folgt, dass der Ausdruck

$$H\omega_r - RG_{r_3..._5}\omega_o + \ldots$$

als linear-homogene Function  $f_r$  von  $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m$  mit in  $u_1, u_2, \dots$  ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellbar ist.

Es lassen sich also auch, wenn  $r = x, \lambda, \dots \mu$  gesetzt wird, die  $n-\nu$  Producte

$$H\omega_{x}, H\omega_{\lambda}, \dots H\omega_{n}$$

und die v Zahlen

$$\omega_{p}, \omega_{z}, \ldots \omega_{t}$$

als linear-homogene Functionen von

$$\omega_{\rho}, \omega_{\sigma}, \ldots \omega_{\tau}, f_{\varkappa}, f_{\lambda}, \ldots f_{\mu}$$

mit in  $u_1, u_2, \ldots u_n$  ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellen, und es wird demzufolge, wenn die conjugirten Werthe von  $\omega_i, \pi_i, f_i$  mit  $\omega_i', \omega_i'', \ldots \pi_i', \pi_i'', \ldots f_i', f_i'', \ldots$  bezeichnet werden,

$$H^{n-\nu}\Omega = \Gamma \left| egin{array}{l} \omega_{\wp}, \omega_{\sigma}, \ldots \omega_{\tau}, f_{\varkappa}, f_{\lambda}, \ldots f_{\mu} \ \omega_{\wp}', \omega_{\sigma}', \ldots \omega_{\tau}, f_{\varkappa}', f_{\lambda}', \ldots f_{\mu}' \ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right|,$$

wo  $\Gamma$  in  $u_1, u_2, \ldots u_n$  ganz und ganzzahlig ist. Nach Multiplication mit  $p^{\nu}$  folgt hieraus

$$p^{\mathsf{v}}H^{\mathsf{n}-\mathsf{v}}\Omega \equiv \Gamma \left| egin{array}{c} p\omega_{\mathsf{p}},\,p\omega_{\mathsf{s}},\ldots p\omega_{\mathsf{r}},f_{\mathsf{x}},f_{\lambda},\ldots f_{\mu} \ p\omega_{\mathsf{p}}',\,p\omega_{\mathsf{s}}',\ldots p\omega_{\mathsf{r}}',f_{\mathsf{x}}',f_{\lambda}',\ldots f_{\mu}' \end{array} 
ight| \cdot$$

Da  $\varphi(u)$  in den Zahlen  $p\omega_{\rho}$ ,  $p\omega_{\sigma}$ , ...,  $p\omega_{\tau}$  aufgeht, so sind dieselben Vielfachsummen oder ganzzahlige linear-homogene Functionen  $f_{\rho}$ ,  $f_{\sigma}$ , ...,  $f_{\tau}$  von  $\pi_{1}$ ,  $\pi_{2}$ , ...,  $\pi_{m}$ , und man hat, wenn die conjugirten Werthe von  $f_{\rho}$ ,  $f_{\sigma}$ , ... mit  $f'_{\rho}$ ,  $f'_{\sigma}$ , ... bezeichnet werden,

$$p^{\nu}H^{n-\nu}\Omega = \pm \Gamma \begin{vmatrix} f_1, & f_2, \dots f_n \\ f'_1, & f'_2, \dots f'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun

$$f_i = b_{i1}\pi_1 + b_{i2}\pi_2 + \ldots + b_{im}\pi_m$$

und für jede Combination  $n^{\text{ter}}$  Classe  $\alpha\beta$ ...  $\epsilon$  der Zahlen 1, 2, ... m

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha} b_{1\beta} \dots b_{1\epsilon} \\ b_{2\alpha} b_{2\beta} \dots b_{2\epsilon} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n\alpha} b_{n\beta} \dots b_{n\epsilon} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1\epsilon} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2\epsilon} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{n\epsilon} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_{\alpha} \pi_{\beta} \dots \pi_{\epsilon} \\ \pi'_{\alpha} \pi'_{\beta} \dots \pi'_{\epsilon} \\ \pi''_{\alpha} \pi''_{\beta} \dots \pi''_{\epsilon} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \Pi_{\alpha\beta\dots\epsilon},$$

so wird, über alle Combinationen αβ...s erstreckt,

$$\begin{vmatrix} f_1, & f_2, \dots f_n \\ f'_1, & f'_2, \dots f'_n \end{vmatrix} = \sum B_{\alpha\beta\dots\epsilon} \prod_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

$$= \Omega \sum B_{\alpha\beta\dots\epsilon} C_{\alpha\beta\dots\epsilon}$$

und man hat

$$p^{\nu}H^{n-\nu} = \pm \Gamma \Sigma B_{\alpha\beta...\epsilon} C_{\alpha\beta...\epsilon}$$

Da H nicht durch p theilbar ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler h aller Determinanten  $C_{\alpha\beta...\epsilon}$ , welcher nach I eine Potenz von p ist, in  $p^{\nu}$  aufgehen muss. Da aber auch anderseits  $p^{\nu}$  in h aufgeht, so ist  $h = p^{\nu}$ .

V. Die Form  $\varphi(u)$  ist unzerfällbar.

Es seien  $\psi$ ,  $\chi$  irgend zwei ganze algebraische Formen von  $\mathfrak{G}$ , deren Product mit  $\varphi(u)$  absolut äquivalent ist. Setzt man

$$\psi = \psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \dots + \psi_n \omega_n 
\chi = \chi_1 \omega_1 + \chi_2 \omega_2 + \dots + \chi_n \omega_n 
\psi_1 g_1(t) + \psi_2 g_2(t) + \dots + \psi_n g_n(t) = f(t) 
\chi_1 g_1(t) + \chi_2 g_2(t) + \dots + \chi_n g_n(t) = f_1(t),$$

so sind f,  $f_1$  ganze ganzzahlige Functionen, und es wird nach (10)

$$R\psi \equiv f(u) \pmod{\varphi u}$$
  
 $R\chi \equiv f_1(u) \pmod{\varphi u}$ 

und demzufolge

$$R^2 \psi \chi \equiv f(u) f_1(u) \pmod{\varphi u}$$
.

Da  $\psi \chi$  durch  $\varphi(u)$  theilbar ist, so folgt hieraus

$$f(u) f_1(u) \equiv 0 \pmod{\varphi u}$$
.

Bezeichnet M die Resultante von f(t) und P(t),  $M_1$  die von  $f_1(t)$  und P(t), so muss also nach II die Resultante  $MM_1$  von f(t),  $f_1(t)$  und f(t) durch f(t) theilbar sein. Dann muss aber f(t) in einer der Functionen f(t) und daher auch in f(t) oder  $f_1(t)$  aufgehen. Ist etwa

$$f(t) \equiv 0 \pmod{p}$$

so ist f(u) durch  $\varphi(u)$  theilbar. Dasselbe gilt dann auch, wenn s eine Unbestimmte bezeichnet, von  $(R+ps)\psi$ , und es ist also  $\psi$  durch  $\varphi(u)$  theilbar, weil R+ps eine primitive Form ist. Dann sind aber  $\psi$  und  $\varphi(u)$  absolut äquivalent, und  $\chi$  muss die numerische Norm 1 haben.

6.

Man denke sich F(t) in Bezug auf den Primzahlmodul p als Potenzproduct von irreductibelen Functionen

$$P_1, P_2, \ldots P_m$$

von der Form (7) dargestellt, und es sei

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m} \pmod{p}. \tag{11}$$

Es ist dann auch identisch

$$F(t) = (P_1 + p)^{\mu_1} (P_2 + p)^{\mu_2} \dots (P_m + p)^{\mu_m} - p\Theta(t),$$

wo  $\Theta(t)$  eine ganze ganzzahlige Function von t,  $u_1$ ,  $u_2$ ,...  $u_n$  bezeichnet. Da F(t) für t = u verschwindet, so folgt hieraus

$$p\Theta(u) = (P_1(u) + p)^{\mu_1}(P_2(u) + p)^{\mu_2} \dots (P_m(u) + p)^{\mu_m}. \quad (12)$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Normen, so wird

$$p^{n}N\Theta(u) = N(P_{1}(u)+p)^{\mu_{1}} \cdot N(P_{2}(u)+p)^{\mu_{2}} \cdot \dots N(P_{m}(u)+p)^{\mu_{m}};$$

es ist aber nach 5, IV

$$N(P_1(u)+p) = p^{\nu_1} E_1$$

$$N(P_2(u)+p) = p^{\nu_2} E_2$$

$$\vdots$$

$$N(P_m(u)+p) = p^{\nu_m} E_m,$$

wo  $v_i$  den Grad von  $P_i$  in t und  $E_1, E_2, ... E_m$  ganze ganzzahlige primitive Formen von  $u_1, u_2, ... u_n$  bezeichnen, und nach (11)

$$\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\ldots+\mu_m\nu_m=n.$$

Man hat also

$$N\Theta(u) = E_1^{\mu_1} E_2^{\mu_2} \dots E_m^{\mu_m}$$

Die Form  $\Theta(u)$  ist demnach primitiv und die Gleichung (12) liefert eine Zerlegung der Primzahl p in unzerfällbare Formen.

Eine ganze ganzzahlige Function f(t) von t,  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$ , welche in t den Grad n nicht erreicht, ist durch p theilbar, wenn f(n) durch p theilbar ist.

Es sei

$$P_{1}(t)+p = \varphi_{1}(t)$$

$$P_{2}(t)+p = \varphi_{2}(t)$$

$$\vdots$$

$$P_{m}(t)+p = \varphi_{m}(t)$$

und

$$\psi(t) = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_m^{\alpha_m}$$

jedes Potenzproduct der irreductibelen Theiler  $P_1, P_2...$  von F(t), in welchem die Exponenten  $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_m$  beziehungsweise die Zahlen  $\mu_1, \mu_2, ... \mu_m$  nicht übersteigen. Nennt man den Rest, welcher sich bei der Division einer ganzen Function von t durch  $\psi(t)$  in Bezug auf t ergibt und den Grad von  $\psi(t)$  in t nicht erreicht, kurz den echten Rest dieser Function in Bezug auf den Theiler  $\psi(t)$ , so ist der echte Rest von f(t) in Bezug auf alle Functionen  $\psi(t)$  durch p theilbar.

Ist nämlich zunächst

$$\psi(t) = P_1,$$

so wird der Congruenz

$$f(u) \equiv 0 \pmod{p}$$

zufolge

$$f(u) \equiv 0 \pmod{\varphi_1(u)}$$

und die Behauptung folgt aus 5, II. Steht ferner die Behauptung bereits für eine bestimmte Function  $\psi(t)$  fest, in welcher nicht alle Exponenten  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$  die Grenzen  $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$  erreichen und etwa  $\alpha_x < \mu_x$  ist, so gilt sie auch für die Function  $\psi(t) P_x$ . Es seien Q(t), R(t) der Quotient und echte Rest, welche sich bei der Division von f(t) durch  $\psi(t)$  in Bezug auf t ergeben, so dass identisch

$$f(t) = Q(t) \psi(t) + R(t)$$

ist. Man hat dann, da R nach der Annahme durch p theilbar ist,

$$f(t) \equiv Q(t) \varphi_1(t)^{\alpha_1} \varphi_2(t)^{\alpha_2} \dots \varphi_m(t)^{\alpha_m} \pmod{p}$$

und erhält für t = u

$$Q(u)\,\varphi_1(u)^{\alpha_1}\,\varphi_2(u)^{\alpha_2}\ldots\varphi_m(u)^{\alpha_m}\equiv 0\pmod{p}.$$

Da aber p nach (12) durch

$$\varphi_{\mathbf{x}}(u). \varphi_{\mathbf{1}}(u)^{\alpha_{1}} \varphi_{\mathbf{2}}(u)^{\alpha_{2}} \dots \varphi_{m}(u)^{\alpha_{m}}$$

theilbar ist, so muss  $\varphi_{\mathbf{x}}(u)$  in Q(u) aufgehen. Bezeichnet also  $R_{\mathbf{I}}(t)$  den echten Rest von Q(t) in Bezug auf den Theiler  $P_{\mathbf{x}}$ , so geht p nach 5, II in  $R_{\mathbf{I}}(t)$  und also auch in dem echten Rest

$$R_1(t) \psi(t) + R(t)$$

von f(t) in Bezug auf den Theiler  $\psi P_{x}$  auf.

Es muss daher auch der echte Rest von f(t) in Bezug auf den Theiler

$$P_1^{\mu_1}P_2^{\mu_2}\dots P_m^{\mu_m}$$

durch p theilbar sein. Dieser Rest ist aber f(t) selbst.

7.

Es sei  $\Delta$  die Discriminante von F(t) und

$$\Delta = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t) \tag{13}$$

die Identität, welcher sie genügt und in welcher Q,  $Q_1$  ganze ganzzahlige Functionen von t,  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$  sind. Differentiirt man die in  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$  identische Gleichung

$$F(u) = 0$$

nach  $u_i$  und bezeichnet zu diesem Ende die Ableitung  $\frac{\partial F(t)}{\partial u_i}$  mit  $F_i(t)$ , so ergibt sich

$$F'(u)\omega_i + F_i(u) \equiv 0. \tag{14}$$

Setzt man daher.

$$-Q(t)F_i(t) = f_i(t) + \Gamma F(t),$$

wo  $f_i$  in t den Grad n nicht erreicht, so hat man für t = n

$$\Delta = Q(u)F'(u)$$

$$-Q(u)F_i(u) = f_i(u)$$

und daher nach (14)

$$\Delta \omega_i = f_i(u)$$
.

Ist nun h der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten von  $\Delta$  und

$$\Delta = hE$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form von  $u_1, u_2, \dots u_n$  bezeichnet, so wird

$$E\omega_i=\frac{1}{h}f_i(u).$$

Da hienach  $\frac{1}{h}f_i(u)$  eine ganze algebraische Form von  $\mathfrak{G}$  ist, so ist  $f_i(u)$  durch alle Primfactoren von h theilbar. Dasselbe muss also nach  $\mathfrak{G}$  auch mit  $f_i(t)$  der Fall sein und man kann

$$f_i(t) = h\psi_i(t)$$

setzen, wo  $\psi_i(t)$  ganz und ganzzahlig in  $t, u_1, u_2, \dots u_n$  ist. Es wird dann

$$E\omega_i = \psi_i(u). \tag{15}$$

8.

Es sei, wie in 5, IV,

$$u^{m-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \ldots + \psi_{mn}\omega_n$$

und

$$\Sigma \pm \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{nn} = \Psi;$$

es bezeichne ferner  $\Delta$  die Discriminante von F(t), D die des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$  und  $\Pi$  das Differenzen- oder alternirende Product der conjugirten Functionen

$$u, u', u'', \ldots u^{(n-1)}$$
.

Man hat

$$\Pi = \Psi\Omega$$

$$D = \Omega^{2}$$

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Pi^{2}$$

und demzufolge

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} D \Psi^2. \tag{16}$$

Anderseits ergibt sich aus (15), wenn

$$\psi_i(t) = a_{i1} + a_{i2}t + a_{i3}t^2 + \dots + a_{in}t^{n-1}$$
  
$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = A$$

gesetzt wird,

und es wird

$$E^{2n}D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta A^{2}.$$
 (17)

Aus (16) und (17) folgt

$$E^{2n}=A^2\Psi^2,$$

und es muss also 4° eine primitive Form sein.

Nach Kronecker's Festschrift blieb es unentschieden, ob  $\Psi$  Theiler zulässt, welche in der Reihe 2, 3,...n-2 enthalten sind und in D aufgehen.

9.

Sind  $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$  die Exponenten, welche in der Zerlegung von F(t) in irreductibele Factoren

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_2} P_2^{\mu_2} \dots P_m^{\mu_m} \pmod{p}$$

in Bezug auf den Primzahlmodul p auftreten, so stimmen dieselben genau mit den Exponenten überein, welche bei der Zerlegung (12) von p in unzerfällbare Formen des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$  oder nach H. Dedekind's Auffassung bei der Zerlegung von p in Primideale vorkommen.

Es ist leicht zu zeigen, dass unter den genannten Exponenten dann und nur dann solche vorkommen, welche > 1 sind, wenn p in der Discriminante D des Gattungsbereiches aufgeht.

Man hat nach (13), (16)

$$\Delta = \pm D\Psi^2 = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t).$$

Ist nun

$$F(t) \equiv H(t) P^{2}(t) \pmod{p}$$
,

wo P einen irreductibelen Theiler von F(t) in Bezug auf den Modul p bezeichnet, so hat man

$$F'(t) \equiv (2HP' + HP)P \pmod{p}$$

und daher

$$\pm D\Psi^2 \equiv (QHP + 2QHP' + Q_1HP)P \pmod{p}$$
.

Weil aber  $D\Psi^2$  die Veränderliche t nicht enthält, so folgt hieraus

$$D\Psi^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

und infolge der Primitivität von 4°

$$D \equiv 0 \pmod{p}$$
.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Dedekind, Über die Discriminanten endlicher Körper. Abh. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. XXIX.

Ist umgekehrt D durch p theilbar, P ein irreductibeler Theiler von F(t) in Bezug auf den Modul p und

$$F(t) \equiv \Gamma P \pmod{p}$$
,

so kann  $\Gamma$  nicht = 1 sein. Denn es wäre dann  $F' \equiv P' \pmod{p}$  und daher  $\Delta$  der Resultante von P' und P in Bezug auf p congruent. Diese Resultante müsste daher durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist. Zerlegt man also F in irreductibele Factoren  $P_1, P_2, P_3 \ldots$  in Bezug auf den Modul p, so ist die Anzahl derselben wenigstens = 2 und aus den Congruenzen

$$F \equiv P_1 P_2 \dots \pmod{p}$$

$$F' \equiv P_1' P_2 P_3 \dots + P_2' P_1 P_3 \dots + \dots \pmod{p}$$

folgt, dass  $\pm \Delta$  nach dem Modul p dem Producte der Resultanten von  $P_1$  und  $P_1'$ , von  $P_2$  und  $P_2'$  u. s. w. in die Quadrate der Resultanten von  $P_1$  und  $P_2$ ,  $P_1$  und  $P_3$  u. s. w. congruent ist. Da aber p in  $\Delta$  aufgeht, in den Resultanten von  $P_1$  und  $P_1'$ ,  $P_2$  und  $P_2'$  u. s. w. aber nicht, so muss eine der Resultanten von  $P_1$  und  $P_2$ ,  $P_1$  und  $P_3$  u. s. w. durch p theilbar sein. Es sei etwa die von  $P_1$  und  $P_2$  durch p theilbar. Die Function  $P_2$  muss dann nach 5, II durch  $P_1$  nach dem Modul p theilbar sein und demzufolge mit  $P_1$  zusammenfallen, da sie irreductibel ist. F(t) lässt also den Theiler  $P_1$  mindestens zweimal zu.

10.

Ich will hier noch den Fermat'schen Satz für eine unzerfällbare Form des Gattungsbereiches  $\mathfrak{G}$  beweisen. Jede solche Form ist einer Form P(u)+p absolut äquivalent, wo p eine Primzahl und P(t) einen irreductibelen Theiler von F(t) in Bezug auf den Modul p bezeichnen. Man setze, wie in (5)

$$P(t)+p = \varphi(t)$$

und bezeichne den Grad von P(t) in t mit v.

Es sei

$$u_1\omega_1^{p^x}+u_2\omega_2^{p^x}+\ldots+u_n\omega_n^{p^x}=\varphi_x$$

und man bezeichne die Functionen, welche aus  $\varphi_x$ , P(t) hervorgehen, wenn man  $u_1, u_2, \ldots u_n$  der Reihe nach durch  $u_1^{p^m}$ ,  $u_2^{p^m}$ ,  $\ldots u_n^{p^m}$  ersetzt, mit  $\varphi_x^{(m)}$ ,  $P^{(m)}(t)$ . Setzt man

$$P(\varphi_{\mathbf{x}}) = \gamma \mathfrak{P} + \gamma_1 \mathfrak{P}_1 + \ldots,$$

wo  $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$  verschiedene Potenzproducte der Unbestimmten  $u_1, u_2, \ldots$  und  $\gamma, \gamma_1, \ldots$  ganze algebraische Zahlen von  $\mathfrak{G}$  sind, so ergibt sich einerseits

$$P^{(\mathbf{x})}(\varphi_{\mathbf{x}}^{(\mathbf{x})}) = \gamma \mathfrak{P}^{p\mathbf{x}} + \gamma_{\mathbf{x}} \mathfrak{P}^{p\mathbf{x}} + \dots$$

und anderseits

$$P^{p^{\mathbf{x}}}(u) \equiv P^{(\mathbf{x})}(u^{p^{\mathbf{x}}}) \equiv P^{(\mathbf{x})}(\varphi_{\mathbf{x}}^{(\mathbf{x})}) \pmod{p}.$$

Es ist also  $P^{(x)}(\varphi_x^{(x)})$  durch  $\varphi(u)$  theilbar. Dasselbe muss dann auch wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte  $\mathfrak{P}^{p^x}, \mathfrak{P}^{p^x}, \ldots$  von den Coëfficienten  $\gamma, \gamma_1, \ldots$  und also auch von  $P(\varphi_x)$  gelten. Hienach hat die Congruenz

$$P(t) \equiv 0 \pmod{\varphi(u)}$$

die Wurzeln ·

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

Eine solche Congruenz kann aber nicht mehr als v in Bezug auf  $\varphi(n)$  incongruente Wurzeln haben. Sind nämlich

$$x_1, x_2, \ldots x_{\nu+1}, v_0, v_1, \ldots v_{\nu}$$

Unbestimmte und setzt man

$$(t-x_{1})(t-x_{2})\dots(t-x_{\nu+1}) = (t-x_{i})\pi_{i}(t)$$

$$v_{0}+v_{1}t+\dots+v_{\nu}t^{\nu} = f(t)$$

$$(x_{1}-x_{2})(x_{1}-x_{3})\dots(x_{1}-x_{\nu+1})$$

$$(x_{2}-x_{3})\dots(x_{2}-x_{\nu+1})$$

$$\dots(x_{\nu}-x_{\nu+1}) = \Theta$$

$$= \pi_{i}(x_{i})\Theta_{i},$$

so ist nach der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$\Theta f(t) = \Theta_1 f(x_1) \pi_1(t) + \Theta_2 f(x_2) \pi_2(t) + \dots + \Theta_{\nu+1} f(x_{\nu+1}) \pi_{\nu+1}(t).$$

Setzt man in dieser Identität

$$x_1 = \varphi_0, x_2 = \varphi_1, \dots x_{\nu+1} = \varphi_{\nu}$$
  
 $f(t) = P(t),$ 

so ergibt sich, dass das Product

$$(\phi_0 - \phi_1)(\phi_0 - \phi_2) \dots (\phi_v - \phi_{v+1}) P(t)$$

und daher auch der Coëfficient

$$(\phi_0\!-\!\phi_1)(\phi_0\!-\!\phi_2)\dots(\phi_\nu\!-\!\phi_{\nu+1})$$

von  $t^r$  in demselben durch  $\varphi(u)$  theilbar sein muss. Dann muss aber wegen der Unzerfällbarkeit von  $\varphi(u)$  eine der Differenzen

$$\varphi_0 - \varphi_1, \varphi_0 - \varphi_2, \dots \varphi_{\nu} - \varphi_{\nu+1}$$

durch  $\varphi(u)$  theilbar sein.

Ist  $\varphi_r$  die erste Function der Reihe  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,..., welche einer vorhergehenden Function  $\varphi_i$  nach dem Modul  $\varphi(u)$  congruent ist, so hat man

$$(\varphi_{0} - \varphi_{1})(\varphi_{0} - \varphi_{2})...(\varphi_{0} - \varphi_{r})]^{p^{i}} \equiv (\varphi_{0}^{p^{i}} - \varphi_{r}^{p^{i}})(\varphi_{0}^{p^{i}} - \varphi_{r}^{p^{i}})...(\varphi_{0}^{p^{i}} - \varphi_{r}^{p^{i}})$$

$$\equiv (\varphi_{i}^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)})(\varphi_{i}^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)})...$$

$$...(\varphi_{i}^{(i)} - \varphi_{i+r}^{(i)}) \pmod{p}. \tag{18}$$

Aus der Congruenz

$$\varphi_r \equiv \varphi_i \pmod{\varphi u}$$

folgt aber

$$\varphi_r^{(i)} \equiv \varphi_i^{(i)} \pmod{\varphi_i}$$

und also auch

$$(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)}) (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)}) \dots (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)}) \equiv 0 \pmod{\varphi_i}.$$

Nach (18) wird dann

$$[(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2) \dots (\varphi_0 - \varphi_r)]^{p^i} \equiv 0 \pmod{\varphi_u},$$

und es muss demzufolge

$$\varphi_0 - \varphi_r \equiv 0 \pmod{\varphi u}$$

oder i = 0 sein.

Setzt man

$$(t-\varphi_0)(t-\varphi_1)\dots(t-\varphi_{r-1})\equiv L(t)$$

und entwickelt L(t) nach Potenzproducten  $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$  der Veränderlichen  $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ , so ergibt sich

$$L(t) = \gamma \mathfrak{P} + \gamma_1 \mathfrak{P}_1 + \ldots,$$

wo  $\gamma, \gamma_1, \ldots$  ganze algebraische Zahlen von  $\mathfrak G$  bezeichnen. Nun ist einerseits

$$L(t)^{p} \equiv (t^{p} - \varphi_{0}^{p})(t^{p} - \varphi_{1}^{p}) \dots (t^{p} - \varphi_{r-1}^{p}) \pmod{p}$$

$$\equiv (t^{p} - \varphi_{1}^{(1)})(t^{p} - \varphi_{2}^{(1)}) \dots (t^{p} - \varphi_{r}^{(1)}) \pmod{p}$$

$$\equiv (t^{p} - \varphi_{0}^{(1)})(t^{p} - \varphi_{1}^{(1)}) \dots (t^{p} - \varphi_{r-1}^{(1)}) \pmod{\varphi u}$$

$$\equiv \gamma \mathfrak{P}^{p} + \gamma_{1} \mathfrak{P}^{p}_{1} + \dots \pmod{\varphi u}$$

und anderseits

$$L(t)^p \equiv \gamma^p \mathfrak{P}^p + \gamma^p \mathfrak{P}^p + \dots \pmod{p}.$$

Hieraus folgt

$$0 \equiv (\gamma^p - \gamma) \mathfrak{P}^p + (\gamma^p - \gamma_1) \mathfrak{P}^p + \dots \pmod{\varphi u},$$

und man hat wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte  $\mathfrak{P}^p, \mathfrak{P}^p, \ldots$ 

$$\gamma^p - \gamma \equiv 0, \ \gamma_1^p - \gamma_1 \equiv 0, \dots \pmod{\varphi u}.$$

Da aber

$$\gamma^{p} - \gamma \equiv \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2) \dots (\gamma - p + 1) \pmod{p}$$

ist, so wird

$$\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-p+1)\equiv 0\pmod{\varphi u},$$

und es muss  $\gamma$  einer gewöhnlichen Zahl nach dem Modul  $\varphi(u)$  congruent sein. Dasselbe gilt von  $\gamma_1$  und allen Coëfficienten von L(t). Das Product L(t) ist daher einer ganzen ganzzahligen Function g(t) von  $t, u_1, u_2, \ldots u_n$  von der Form

$$t^r+b_1t^{r-1}+\ldots+b_r$$

in Bezug auf  $\varphi(u)$  congruent.

Da die Differenz  $P(t)-t^{\gamma-r}g(t)$  in t den Grad  $\nu$  nicht erreicht und für t=u durch  $\varphi(u)$  theilbar wird, so ist sie nach 5, II durch p theilbar und man hat

$$P(t) \equiv t^{\gamma - r} g(t) \pmod{p}$$
.

Die Irreductibilität von P erfordert dann, dass r = v ist, und es wird

$$g(t) \equiv P(t) \pmod{p}$$
.

Hienach ist für jeden Stellenzeiger i

$$\omega_i^{p^v} \equiv \omega_i \pmod{p^u}$$

und daher auch für jede ganze algebraische Zahl

$$\gamma = g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 + \ldots + g_n \omega_n$$

des Gattungsbereiches &

$$\gamma^{p^{\nu}} \equiv g_{1}^{p^{\nu}} \omega_{1}^{p^{\nu}} + g_{2}^{p^{\nu}} \omega_{2}^{p^{\nu}} + \dots + g_{n}^{p^{\nu}} \omega_{n}^{p^{\nu}} \pmod{p} \\
\equiv g_{1} \omega_{1}^{p^{\nu}} + g_{2} \omega_{2}^{p^{\nu}} + \dots + g_{n} \omega_{n}^{p^{\nu}} \pmod{p} \\
\equiv g_{1} \omega_{1} + g_{2} \omega_{2} + \dots + g_{n} \omega_{n} \pmod{p} \\
\equiv \gamma \pmod{pu}.$$

## II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1894.

Das k. k. Finanzministerium übermittelt ein Exemplar der von demselben verfassten Tabellen zur Währungs-Statistik.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Pflanzenphysiologische Mittheilungen aus Buitenzorg.« I. II.

Herr Professor Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Herr Prof. Dr. J. Finger in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind«.

Die Herren Professoren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida in Wien übersenden eine gemeinsam ausgeführte Arbeit unter dem Titel: Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins« (I. Abhandlung).

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet als Anhang zu seiner Abhandlung: »Tetractionelliden der Adria« eine Mittheilung über die Lithistiden.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts - Laboratorium in Wien von den

Herren Dr. J. Herzig und Th. v. Smoluchowski ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss des Aurins«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht den fünften und zugleich letzten vorläufigen Bericht über die im verflossenen Sommer von ihm ausgeführten erdmagnetischen Messungen.

# Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs

(V. und letzter vorläufiger Bericht)

von

#### J. Liznar.

Mit dieser Mittheilung schliesst die Reihe der vorläufigen Berichte, welche ich über die von mir in Cisleithanien ausgeführten erdmagnetischen Messungen seit 1889 veröffentlicht habe. Sie enthält die Werthe der erdmagnetischen Elemente, welche aus den Messungen des verflossenen Sommers resultiren. Während des Zeitraumes vom 15. Juni bis 14. September 1893 habe ich 21 Stationen besucht und an jeder derselben, genau so wie in den früheren Jahren, 5 Declinations-, 10 Intensitäts- und 10 Inclinations-Messungen ausgeführt. Von diesen 21 Stationen liegen 2 in Nieder-Österreich, 10 in Steiermark, 3 in Kärnten, 3 in Krain und 3 in Istrien. Die Station Triest, wo bereits Laschober und Kesslitz beobachtet haben, wurde von mir nur deshalb gewählt, um mit ihnen nebst Pola noch einen zweiten Punkt gemeinsam zu haben.

Die Beobachtungen geschahen mit denselben Instrumenten und nach denselben Methoden wie in den Vorjahren. Eine besondere Sorgfalt habe ich auch diesmal auf die Vergleichung der Reiseinstrumente verwendet, da eine strenge Vergleichbarkeit der erhaltenen Resultate nur dann erzielt wird, wenn eine etwaige Änderung in den Angaben der Reiseinstrumente in Rechnung gebracht werden kann. Um die Beobachtungsresultate, welche von dem leider bereits verstorbenen Fregatten-Capitän Laschober und den Herren Linienschiffslieutenant Kesslitz

und Linienschiffsfähnrich von Schluet an den Küsten der Adria und in Bosnien und der Herzegowina erhalten worden sind, mit den meinigen verbinden zu können, habe ich mich nicht damit begnügt, dass ihre Reiseinstrumente mit den von mir bei den Reisebeobachtungen verwendeten in Wien verglichen worden sind, sondern ich habe auch am k. und k. hydrographischen Amte in Pola die Vergleichungen wiederholt. Bei dieser Arbeit haben mich die Herren Schiffslieutenant Kesslitz und Schiffsfähnrich von Schluet in liebenswürdigster Weise unterstützt, wofür ich ihnen meinen verbindlichsten Dank sage. Zum besonderen Danke hat mich der Director des k. und k. hydrographischen Amtes Herr R. Müller verpflichtet, da er in freundlichster Weise die Benützung der Beobachtungsräume und der Instrumente gestattet hat. Auf die Resultate der vielen Vergleichsbeobachtungen, welche ich während der fünf Beobachtungsjahre ausgeführt habe, werde ich in der später erscheinenden ausführlichen Publication meiner Messungen zurückkommen. Das Eine kann ich aber jetzt schon sagen, dass eine nennenswerthe Änderung in den Angaben der Instrumente nicht stattgefunden hat, was der guten Verpackung und dem sorgfältigen Transporte derselben zugeschrieben werden muss.

Die am Schlusse folgenden Tabellen enthalten nebst den geographischen Coordinaten die Werthe der erdmagnetischen Elemente, und zwar stehen in Tabelle II unter D (1890) die von mir beobachteten und auf das »Augustmittel 1890« reducirten Werthe der Declination; die entsprechenden Werthe der Horizontalintensität findet man in Tabelle III unter H (1890). Die Inclination unter J (1890) in Tabelle IV ist zwar nicht auf die angegebene Epoche reducirt, doch beträgt der Unterschied der daselbst angeführten Werthe gegen die reducirten kaum drei Minuten. Unter  $D_1$  (1850),  $H_1$  (1850) und  $J_1$  (1850) sind die von Kreil nach seinen Beobachtungen auf die Epoche 1850·0 reducirten Daten beigesetzt. Die dritte Zahlencolumne enthält die Differenz meiner und Kreil's Werthe.

Die Unregelmässigkeit der Differenzen ist, wie auch an den früheren Stationen, bei der Declination am grössten, weil Kreil's Werthe nicht hinreichend genau sind. Wenn man z. B. die Declination von Laibach und Rudolfswert vergleicht, so ergeben meine Messungen eine Differenz von 17 2, während aus jenen Kreil's ein Unterschied von 1° 4'2 folgt. Betrachtet man eine Isogonenkarte, so sieht man sogleich, dass nach der Lage der beiden Orte die Differenz unmöglich so gross sein könne, wie sie die Messungen Kreil's ergaben, wenn nicht ein bedeutender localer Einfluss vorhanden ist. Auch die Daten des Stationspaares Admont-Eisenerz zeigen, dass Kreil's Werthe mit bedeutenden Unsicherheiten behaftet sind. Während nach seinen Beobachtungen die Declination in Eisenerz um mehr als 1/4° grösser ist als in Admont, zeigen meine Werthe gerade umgekehrt die Declination in Eisenerz um 11' kleiner als in Admont, was auch der Lage der Stationen gegeneinander entspricht, da Admont westlicher liegt als Eisenerz. Einige Gründe für die Unsicherheit der Declinationswerthe Kreil's habe ich in meinen letzten zwei Berichten angeführt, hier möchte ich nur noch erwähnen, dass an mancher Station der Aufstellungsort local beeinflusst gewesen sein dürfte.

Relativ viel genauer sind die Messungen der Horizontalintensität und der Inclination, obwohl gerade das letzte Element viel schwieriger zu bestimmen ist als die Declination. Bei den letzt erwähnten Elementen kann man daher auch aus den Differenzen der Werthe für 1850 und 1890 eine gesetzmässige Abhängigkeit der secularen Änderung von der geographischen Lage erkennen, während dies bei der Declination nicht möglich ist. Da ich bei der Bearbeitung des neuen Beobachtungsmaterials die Verhältnisse ausführlicher zu besprechen gedenke, so mögen hier die wenigen Andeutungen genügen.

Meine nächste Aufgabe wird es nun sein, eine detaillirte Darstellung der von mir an 108 Orten ausgeführten Messungen zu geben. Eine endgiltige Verarbeitung aller Daten kann ich aber erst dann vornehmen, wenn mir auch die Beobachtungsresultate von Ungarn, wo seit 1892 der Vicedirector der königl. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Budapest Herr Ignaz Kurländer Messungen vornimmt, zur Verfügung stehen werden.

Nach den neuen Daten werden wir im Grossen und Ganzen ein richtiges Bild über die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft

in Österreich-Ungarn erhalten. Die Anzahl der Stationen ist jedoch viel zu klein, um auch eine Darstellung der Störungsgebiete geben zu können; dies muss einer späteren Zeit vorbehalten werden, wo es möglich sein wird, wenigstens über die Störungsgebiete ein dichtes Stationsnetz zu ziehen. Frankreich ist in dieser Beziehung mit gutem Beispiel vorangegangen; es wäre zu wünschen, dass andere Staaten demselben folgen möchten.

Jetzt nachdem ich der übernommenen Verpflichtung mit grösster Gewissenhaftigkeit nachgekommen bin, kann ich mit grosser Befriedigung auf die erhaltenen Resultate blicken, und selbst die Erinnerung an die vielen Strapazen und Widerwärtigkeiten der Reisezeit ist nicht im Stande, dies erhebende Gefühl herabzudrücken. Berücksichtigt man, dass ich jeden nothwendigen Schritt selbst thun und jede Zahl selbst beobachten oder berechnen musste, so wird man mir das Zeugniss nicht versagen können, dass ich mit Aufgebot meiner ganzen physischen und moralischen Kräfte an der Lösung der Aufgabe gearbeitet habe. Man wird mir aber auch nicht verübeln, wenn ich dem Wunsche Ausdruck gebe, dass solche Arbeiten in Fachkreisen eine bessere Anerkennung finden möchten als dies bisher der Fall war. Sie gebührt ihnen in um so höheren Masse, da sie Daten von bleibendem Werthe liefern, welche wichtige Bausteine für eine aufzubauende Theorie des Erdmagnetismus bilden.

Zum Schlusse kann ich es nicht unterlassen, der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, welche nicht nur die Ausführung der neuen magnetischen Aufnahme in Cisleithanien ermöglicht, sondern auch ihre Ausdehnung auf Ungarn befürwortet hat, den ehrerbietigsten Dank auszusprechen für das Vertrauen, welches sie in meine Leistungsfähigkeit gesetzt hat. Meinem hochverehrten Vorstande, Herrn Hofrath Prof. Dr. Hann, bin ich aber zu tiefstem Danke verpflichtet, dass er mich mit der Ausführung der Messungen betraut hat und mir dadurch Gelegenheit bot, einen kleinen Beitrag zur Erforschung der physikalischen Verhältnisse des Vaterlandes liefern zu können. Mein wärmster Dank gebührt endlich allen k. k. Behörden und jenen Herren, welche zur Förderung meiner Arbeit beigetragen haben.

# I. Geographische Coordinaten der magnetischen Stationen (der Beobachtungspunkte).

Nr.	Station	,	P	λΕ	v. Gr.
1	Wr. Neustadt	47°	48!4	16°	1517
2	Schottwien	47	39.4	15	52.5
3	Bruck a./M	47	24.8	15	16.3
4	Aflenz	47	32.7	15	14.7
<b>-</b> 5	Liezen	47	34.2	14	14.8
6	Admont	47	35 · 1	14	27.8
7	Eisenerz	47	32.7	14	53.8
8	Graz	47	4.8	15	27.2
9	Gleichenberg	46	52.7	15	54.5
10	Marburg	46	34.0	15	38.2
11	St. Paul	46	41.8	14	52 · 1
12	Gmünd	46	54.3	13	32.3
13	Klagenfurt	46	37.8	14	18.3
14	St. Lambrecht	47	4.2	14	18.2
15	Laibach	46	2.7	14	30.6
16	Rudolfswert	45	48.5	15	10.0
17	Cilli	46	13.9	15	15.2
18	Adelsberg	45	46.4	14	12.4
19	Görz	45	57.8	13	38.2
20	Triest	45	38.7	13	45.9
21	Pola	44	51.8	13	50.8

## II. Declination (West).

Nr.	Station	D (	1890)	$D_1$ (	1850)	$D_1$	-D
1	Wr. Neustadt	9°	13191		_		_
2	Schottwien	9	31.0	13°	53 ¹ 1	4°	22 ! 1
3	Bruck a./M	9	46.1	13	51.5	4	5.4
4	Aflenz	. 9	43.3	13	51.7	4	8.4
5	Liezen	. 10	11.9	14	35.1	4	23.2
6	Admont	10	6.3	14	13.1	4	6.8
7	Eisenerz	9	55.0	14	30.0	4	35.0
8	Graz	9	37.4	14	12.0	4	34.6
9	Gleichenberg	9	13.5	13	45.8	4	32.3
10	Marburg	9	28.0	13	51.1	4	23 · 1

<sup>1</sup> In Wr. Neustadt hat Kreil nicht beobachtet.

Nr.	Station D	(1890)	$D_1$ (1850)	D	-D
11	St. Paul 9	52!7	14° 18!6	40	25!9
12	Gmünd10	28.5	15 6.4	4	37.9
13	Klagenfurt10	13.0	14 28.2	4	15.2
14	St. Lambrecht 10	22.9	14 58.6	4	35.7
15	Laibach 10	2.7	14 22.8	4	20 · 1
16	Rudolfswert 9	45.5	13 18.6	3	33.1
17	Cilli 9	41.7	13 40.9	3	$59\cdot 2$
18	Adelsberg10	$9 \cdot 4$	13 49.6	3	40.2
19	Görz10	25.3	13 58.5	3	33.2
<b>2</b> 0	Triest10	22.7	14 31.8	4	9 · 1
21	Pola	13 · 1	14 16.0	4	$2 \cdot 9$

### III. Horizontale Intensität.

Nr.	Station	H (1890) <sup>1</sup>	$H_1$ (1850)	$H-H_1$
1	Wr. Neustadt	2.0800	_	_
2	Schottwien	2.0852	2.0090	0.0762
3	Bruck a./M	2.0933	2.0158	0.0775
4	Aflenz	2.0830	2.0081	0.0749
5	Liezen	2.0747	1.9944	0.0803
6	Admont	2.0730	2.0046	0.0684
7	Eisenerz	<b>2</b> ·0800	2.0086	0.0714
8	Graz	2.1074	2.0380	0.0694
9	Gleichenberg	2.1145	2.0453	0.0692
10	Marburg	2.1273	2.0529	0.0744
11	St. Paul	2 · 1 ! 69	2.0454	0.0715
12	Gmünd	2.1047	2.0163	0.0884
13	Klagenfurt	2.1120	2.0440	0.0680
14	St. Lambrecht	2.0846	2.0197	0.0649
15	Laibach	2.1515	2.0707	0.0808
16	Rudolfswert	2.1614	2.0759	0.0855
17	Cilli	2.1434	2.0775	0.0659
18	Adelsberg	2.1554	2.0813	0.0741
19	Görz	2.1440	2.0687	0.0753
20	Triest	2.1602	2.0810	0.0792
21	Pola	2.1922	2 · 1122	0.0800
22	Rattenberg <sup>2</sup>	2.0664	1.9737	0.0927

 $<sup>^1</sup>$  Die hier mitgetheilten Intensitäten sind um circa 0.0040 zu klein, wie dies auch in den früheren Berichten hervorgehoben wurde.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Station ist aus Versehen im vorigen Berichte ausgeblieben und wird deshalb hier nachgetragen.

#### IV. Inclination.

Nr.	Station	J(	1890)	$J_{1}$ (1	850)	$J_1$	_J
1	Wr. Neustadt	62°	51!0	_	_		_
2	Schottwien	62	46.8	63°	55'	1 0	8'
3	Bruck a. M	62	34.3	63	51	1	17
4	Aflenz	62	46.3	63	54	1	8
5	Liezen	62	54.6	64	9	1	15
6.	Admont	62	54.3	64	0	1	в
7	Eisenerz	62	49 · 1	63	55	1	6
8	Graz	62	16.9	63	<b>3</b> 0	1	13
9	Gleichenberg	62	$22 \cdot 7$	63	28	1	5
10	Marburg	61	57.1	63	13	1	16
11	St. Paul	62	7:8	63	21	1	13
12	Gmünd	62	21.6	63	43	1	21
13	Klagenfurt	62	8.8	63	27	1	18
14	St. Lambrecht	62	38.7	63	49	1	10
15	Laibach	61	32.0	62	54	1	22
16	Rudolfswert	61	18.6	62	<b>3</b> 9	1	20
17	Cilli	61	41.3	62	53	1	12
18	Adelsberg	61	23.4	62	44	1	21
19	Görz	61	34.7	62	57	1	22
20	Triest	61	18.2	62	44	1	26
21	Pola	60	38.6	62	14	1	35
22	Znaim 1	63	50	64	48	0	58

 $<sup>^1</sup>$  In meinem zweiten Berichte steht infolge eines Druckfehlers für J(1890) der Werth 64°50° statt des oben angeführten richtigen. Dass es nur ein Druckfehler ist, kann man aus der Differenz  $J_1-J$ ersehen.



# Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten

von

J. Hann, w. M. k. Akad.

Im Nachfolgenden sollen einige stündliche und zweistündliche meteorologische Aufzeichnungen auf hohen Berggipfeln, die kürzlich zu meiner Kenntniss gelangt sind, einer Discussion unterzogen werden.

Die eine dieser Beobachtungsreihen bezieht sich auf den Gipfel des Ontake in Japan (3055 m). Die Ergebnisse derselben sind vom meteorologischen Central-Observatorium in Tokio publicirt worden unter dem Titel: »Meteorological Observations on the Summit of Ontake (Tokio 1893). « Der Text dieser Publication, circa 28 Seiten umfassend, ist leider nur in japanischer Sprache gedruckt, die Zahlentabellen, 40 Seiten (Kleinfolio), haben Aufschriften in englischer und japanischer Sprache.

Die Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake sind zweistündlich gemacht vom 1. August bis 12. September 1891, also durch 43 Tage. Es werden sowohl die Mittel für den Monat August, als auch für die ganze Periode von 43 Tagen mitgetheilt. Die Beobachtungen erstrecken sich auf Luftdruck, Lufttemperatur, deren Maximum und Minimum, Maximum in der Sonne, Minimum unter dem Einfluss der Wärmeausstrahlung,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Publication scheint desshalb nicht nach Europa versendet worden zu sein; ich erhielt selbe auf specielles Ansuchen durch die Güte des Directors des Met. Central-Observ. in Tokio, Herrn K. Kobayashi, dem ich hiefür auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Bodentemperatur an der Erdoberfläche vierstündlich angestellt und in  $0.3 \, m$  Tiefe um  $10^{\rm h}$  a. und  $10^{\rm h}$  p., Dampfdruck und relative Feuchtigkeit zweistündlich, Niederschlagsmenge vierstündlich, Windrichtung und Stärke (m. s.), Bewölkung nach Grad und Art, Witterungsverhältnisse gleichfalls zweistündlich.

Als Basisstation diente Kurosawa, das in 830 m Seehöhe und 22·5 km Entfernung östlich von Ontake liegt. Die Beobachtungen an dieser Station wurden correspondirend und genau nach dem gleichen Schema wie auf dem Gipfel des Ontake angestellt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass zu Kurosawa der Niederschlag in zweistündigen Intervallen gemessen wurde.

Da zudem der »Annual Report of the Central Met. Observatory of Japan for the year 1891, Part I« (Meteorological Observations in Japan) die Resultate stündlicher Aufzeichnungen an zehn Stationen in Japan zwischen 32°48' und 43°20' N. Br. und 130°42' und 145°35' E. von Greenwich enthält, so befindet man sich in der glücklichen Lage, auch von diesen die nächste Station zur Vergleichung herbeiziehen zu können. Die Wissenschaft schuldet der Leitung des meteorologischen Dienstes in Japan gewiss grossen Dank einerseits für die Unternehmung zweistündlicher Beobachtungen auf den Gipfeln der höchsten Berge des Landes<sup>1</sup> und der raschen und ausführlichen Publication der Ergebnisse derselben, anderseits für die Veröffentlichung stündlicher Beobachtungen aller Elemente an so zahlreichen und ziemlich gleichmässig vertheilten Punkten des Landes. Es gibt nur wenige meteorologische Beobachtungsnetze auf der Erde, die sich in ihren Leistungen mit jenen des japanischen Netzes gegenwärtig vergleichen können.

Als zweite und unterste Basisstation habe ich Nagoya gewählt, das südwestlich vom Ontaki in der Owari-Ebene, nahe der See an der Owari-Bai liegt. Die Lage dieser und der beiden anderen Stationen habe ich den Karten entnommen, welche sich im Ergänzungsheft 59 zu Peterm. Geogr. Mitth. (Gotha 1880:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Ergebnisse der Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji, 3733 m, und des Gozaishogatake, 1201 m, habe ich discutirt in diesen Sitzungsberichten, Bd. C, Abth. II. a., December 1891.

Der Nakasendô in Japan von E.-Knipping u. J. J. Rein\*) befinden. Die Seehöhen der Station auf dem Ontake und jener zu Kurosawa habe ich aus den correspondirenden Luftdruck-, Temperatur- und Dampfdruck-Mitteln des August nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln berechnet. Als Basisstationen dienten dabei Kioto und Tokio, zwischen welchen die gedachten Orte liegen.

Ontake 35°54′ N. Br.	137°30′ E. von Gr.	3055 <b>m</b>
Kurosawa 35 50	137 45	834
Nagoya 35 10	136 55	15

Kurosawa liegt nach der Karte in einem, wie es scheint, ziemlich tiefen Thale am Flusse Kisogawa, Nagoya dagegen liegt am Rande einer ziemlich weiten Ebene an der See. Dies ist für die Beurtheilung der Unterschiede im täglichen Gange der meteorologischen Elemente an diesen beiden Orten von wesentlicher Bedeutung.

Die correspondirenden Mittelwerthe (August 1891) der meteorologischen Elemente dieser drei Stationen sind:

					Mitt	:le <b>re</b>
Luft- druck	Temp.				Windg.1	
Ontake 531.80	8.8	6.6	78.5	600	11.7	6.6
Kurosawa690·36	20.3	14.4	83.0	268	0.8	6.3
Nagoya758.15	26.1	19.6	79.3	276	$2 \cdot 2$	6.1

Die Mittel für die beiden ersten Stationen sind aus den zweistündlichen Beobachtungen, jene von Nagoya aus stündlichen Aufzeichnungen gebildet.

Berechnet man die Seehöhe der beiden ersteren Stationen nach den correspondirenden Mittelwerthen der letzten nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln, so erhält man:

Ontake 3058.5 m, Kurosawa 835.9 m.

Ich möchte das früher angegebene Resultat der Berechnung nach Kioto—Tokio vorziehen, weil den etwaigen ostwestlichen und nordsüdlichen Druckgradienten dabei mehr

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Meter pro Secunde.

54 J. Hann,

Rechnung getragen ist. Gifu, das auch dem Ontake recht nahe liegt (35°27′, 136°46′, 15·0 m), gibt als Seehöhe desselben (respective des Barometers der temporären Station auf demselben) 3056·0 m.

Die Ergebnisse der Dampfdruckbeobachtungen auf dem Ontake stimmen genau mit meiner Formel<sup>1</sup> für die Abnahme des Wasserdampfgehaltes mit der Höhe überein, welche bekanntlich lautet:

$$\log e_h = \log e_0 - \frac{h}{6500};$$

 $e_0$  ist in unserem Falle (Mittel Tokio 19·3, Kioto 19·2, Nagoya 19·6) 19·4 mm. Daraus erhält man:

Der Dampfdruck auf dem Ontake, berechnet aus den 43-tägigen Beobachtungen zu Kurosawa allein ( $e_0=14\cdot60$ ), ergibt sich zu  $6\cdot65$ , beobachtet wurde  $6\cdot78$ .

Für den Fujigipfel (3733 m) habe ich nach derselben Formel erhalten 5·43 mm (August 1889  $e_0 = 20\cdot3$  mm am Meeresniveau) die Beobachtungen aber haben ergeben 5·49 mm.

Man kann also obige Formel als den Ausdruck eines empirischen Gesetzes betrachten, nach welchem unter mittleren Verhältnissen der Dampfdruck mit der Höhe abnimmt.

Bevor wir auf den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, den täglichen Gang der meteorologischen Elemente, näher eingehen, lohnt es sich wohl, noch einige bemerkenswerthe Ergebnisse der correspondirenden Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa hier übersichtlich nebeneinander zu stellen.

	Maxi	mum	Mir	Differenz						
Luftdruck										
Ontake	$536 \cdot 4$	3. IX.	$523 \cdot 8$	17. VIII.	12.6					
Kurosawa .	694 · 7	3. IX.	$683 \cdot 5$	17. VIII.	11.2					

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Abnahme des Wasserdampfgehaltes in der Atmosphäre mit der Höhe. Zeitschrift für Met., Bd. IX, 1874, S. 193.

	Max	timum		Minimum				
		Te	mperatur					
Ontake	19.2	1. IX.	1.	3 19	. VIII.	17.9		
Kurosawa.	31.2	3. IX.	9.	0 27	. VIII.	$22 \cdot 2$		
Mittlere tägl. Extreme Absolute Extreme								
•			Differenz ,			Differenz		
Ontake	14.7	5.1	9.6	22.0	0.8	21.2		
Kurosawa.	28.0	14.9	13.1	$32 \cdot 2$	8.4	23.8		

Tiefster Stand des der Wärmeausstrahlung ausgesetzten Thermometers:

Die mittlere Bodentemperatur an der Erdoberfläche war auf dem Ontake 10°1 (Luft 8°6), zu Kurosawa 24°2 (Luft 20°3), die Temperatur in 0·3 m Tiefe auf dem Ontake 8°9, der Lufttemperatur sehr nahe kommend. Den täglichen Gang der Temperatur an der Erdoberfläche habe ich auch für die correspondirenden Tage oben und unten (20 an der Zahl) berechnet (es fehlen nämlich oben wie unten einzelne Tage) und für die vierstündlichen Intervalle derart erhalten:

Täglicher Gang der Temperatur an der Erdoberfläche.

	Zeit 1					
2° a.	6h	10h	2 p.	64	10	Mittel
Ontake 4.9	4.8	15.4	17.8	10.3	$5\cdot 2$	9.7
Kurosawa 16.5	16.3	$33 \cdot 8$	$36 \cdot 6$	$23 \cdot 9$	17.8	$24 \cdot 1$

Die Extreme waren auf dem Ontake 27°4 und —1°1, zu Kurosawa 51°0 und 10°0.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Bodentemperatur an der Erdoberfläche aus allen Beobachtungen, die einen vollen Tag umfassen, abgeleitet, sind (Ortszeit, von Mitternacht an gezählt):

Ontake 33 Tage..... 
$$10^940+6\cdot38 \sin(279^96+x)+2\cdot51 \sin(131^96+2x)$$
  
Kurosawa 28 Tage....  $24\cdot39+9\cdot51 \sin(282\cdot8+x)+3\cdot50 \sin(138\cdot8+2x)$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Mittlere Japan Zeit, d. i. Zeit von 135° E. von Greenwich.

Die Beobachtungen auf dem Ontake sind in vierstündigen, jene zu Kurosawa in zweistündigen Intervallen angestellt; diese letzteren sind auch für Kurosawa zur Ableitung der obigen Formel benützt worden. Die Übereinstimmung des Ganges der Bodentemperatur an den beiden Stationen ist eine fast vollständige, nur die Amplitude ist an der unteren Station viel grösser.

Der Regenfall ist auf dem Ontake in vierstündigen Intervallen gemessen worden, zu Kurosawa aber in zweistündigen Zeiträumen. Der Vergleichbarkeit wegen habe ich in der folgenden übersichtlichen Zusammenstellung der Resultate dieser Messungen während 43 Tagen überall vierstündige Intervalle genommen.

Tägliche Periode des Regenfalles.

		<b>C</b>					
	2h	6,	10h	2 <sup>h</sup>	6h	10h	Summe
Ontake	142	147	149	146	102	82*	768
Kurosawa	67	77	79	40	34	30*	327

Die grösste Regenmenge ist an beiden Orten von  $6^h$ — $10^h$  Morgens gefallen, die kleinste von  $6^h$ — $10^h$  Abends. Der Regenfall auf dem Ontake war  $2\cdot35$  mal grösser als unten zu Kurosawa. Die grösste Tagessumme auf dem Ontake war 142 mm am 9. September, zu Kurosawa  $109\cdot5$  mm am 17. August.

In Bezug auf die Luftfeuchtigkeit zeigt der Gipfel des Ontake auffallenden Wechsel zwischen hoher relativer Feuchtigkeit bis zu  $100^{\circ}/_{\circ}$  und grosser Trockenheit. Am 30. August war das Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit  $36 \cdot 5^{\circ}/_{\circ}$ , in der Nacht vom 29./30. August wurden nur  $2^{\circ}/_{\circ}$  und  $4^{\circ}/_{\circ}$  beobachtet. Der dabei herrschende Wind war W und NW von geringer Stärke. Das Tagesmittel des 20. August war gar nur  $31 \cdot 7^{\circ}/_{\circ}$ , das Minimum ging aber nur auf  $14^{\circ}/_{\circ}$  herab. Der Wind war schwach zwischen WSW, W und WNW.

Zu Kurosawa war das niedrigste Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit  $73^{\circ}/_{0}$  am 1. August, das absolute Minimum  $41^{\circ}/_{0}$ .

Die vom 1. August bis 12. September auf dem Gipfel des Ontake vorherrschenden Winde waren WNW bis WSW. Die heftigsten Winde waren SSW und S. Am 3. August war die mittlere Windgeschwindigkeit 22·1 m pro Secunde bei SSW, Maximum 37·3 m; am 16. August erreichte das Tagesmittel bei Südwind 24·0 m. Das Maximum pro Stunde war 33·5 m, zwischen 11<sup>h</sup>10<sup>m</sup> und 11<sup>h</sup>30<sup>m</sup> sogar 45·2 m. Die kleinste Windgeschwindigkeit hatte der 6. September mit 4·5 m; Calmen fehlten fast vollständig. Zu Kurosawa dagegen waren sie weitaus vorherrschend.

Zur Zeit der Terminbeobachtungen (43×12) gab es auf dem Ontake 128mal Regen, zu Kurosawa nur 117mal. Auf die Zeit von 6<sup>h</sup> Abends bis 6<sup>h</sup> Morgens (Nacht) kommen auf den Ontake 64, zu Kurosawa 49 Regenbeobachtungen, auf die Tageshälfte dagegen auf dem Ontake gleichfalls 64, dagegen zu Kurosawa 68. Auf dem Berggipfel war die Vertheilung der Regenstunden eine fast ganz gleichmässige über alle 24 Stunden, dagegen zeigte sich zu Kurosawa eine grössere Tendenz zu Nachmittagsregen.

Nach diesem kurzen Resumé der allgemeineren Beobachtungsergebnisse gehen wir nun über zu einer specielleren Untersuchung der täglichen Periode des Luftdruckes, der Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Bewölkung und Windgeschwindigkeit auf Grund der correspondirenden zweistündlichen Beobachtungen. Man findet die Ergebnisse derselben in den nachfolgenden kleinen Tabellen übersichtlich zusammengestellt. (Siehe S. 58.)

Der tägliche Gang des Luftdruckes zeigt die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einer Gipfelstation (Ontake), einer Thalstation (Kurosawa) und einer Station in der Ebene (Nagoya) in vollem Umfange. Am deutlichsten lässt sich dies aus den Gleichungen des täglichen Ganges erkennen. (Ortszeit von Mitternacht an gezählt. Die Correction auf Localzeit beträgt für Ontake im Zeitmass —10', für die Winkelconstanten —2°5 und —5°0; für Kurosawa in Zeit —11', für die erste Winkelconstante —2°7, für die zweite —5·4; für Nagoya in Zeit —8', für die beiden ersten Winkelconstanten —2° und —4°.)

J. Hann,

Übersicht des täglichen Ganges der meteorologischen Elemente. August 1891.

	Ontake	Kuro- sawa	Nagoya	Ontake	Kuro- sawa	Nagoya	
	3055	834	15	3055	834	15	
		Luftdruck		7	Cemperatu	ır	
		Ab	weichunge	en vom Mi	ttel	!	
Mitternacht	- •14	•48	•25	1975	<b>—3</b> °23	-2°09	
2	<b>- ·39</b>	.25	.05	-1.97	-3.83	-2.67	
4	<b>— ·</b> 50	.32	.07	-2.21	-4.47	-3.06	
6	26	.61	•48	-1.75	-4.38	-3.13	
8	- ·01	•53	.69	0.14	-0.93	-0.58	
10	.27	•20	.57	2.41	3.18	1.70	
Mittag	•33	42	.05	3.52	5.45	3.19	
2	·24	— ·86	<b> ·58</b>	3 · 36	5.64	3.76	
4	·04	92	— ·87	1 · 79	4.69	3.34	
6	04	74	— ·82	-0.49	1.70	1.40	
8	•28	•10	- 16	1:52	-1.33	-0.45	
10	.21	•47	•22	-1.54	-2.46	-1.40	
Mittel	531.80	690.36	758 15	8.61	20.26	26.05	
	Relative	Feuchtig	keit ( <sup>0</sup> / <sub>0</sub> )	Dampfdruck (mm)			
Mitternacht	74	96	89	5 · 64	13.91	19.73	
2	74	96	91	5.61	13.54	19.53	
4	80	97	92	5.93	13.01	19.18	
6	81	96	91	6.09	13.04	19.14	
8	79	84	80	6.23	14.23	19.33	
10	78	70	70	7.38	14.97	19.23	
Mittag	76	62	64	7.82	15.02	19 · 17	
2	80	• 62	63	8.13	15.00	19.33	
4	83	67	65	7.71	15.31	19.42	
6	82	80	75	6.63	15.55	20.42	
. 8	78	92	85	6.00	14.99	20.67	
10	77 ·	95	87	5.92	14.47	20 06	
Mittel	78.5	83.0	79.3	6.62	14.42	19.60	

	Ontake 3055	Kuro- sawa 834	Nagoya 15	Ontake 3055	Kuro- sawa 833	Nagoya 15		
	l .	Bewölkun cale 0-1	- 1	Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde)				
Mitternacht	5.4	5.2	5.3	14.9	0.2	1.7		
2	6.0	6 · 2	5.7	15.5	0.2	1.4		
4	6.0	6.0	5.3	15.5	0.4	1.3		
6	6.4	7.5	6.5	14.5	0.4	1 · 1		
8	6.7	6.7	6.0	11.9	0.6	1.8		
10	7 · 2	6.4	7.2	9.8	1.4	2.4		
Mittag	8 · 1	7.1	7.3	8 · 1	1.9	2.9		
2	8.2	7.2	6.8	7.6	2 · 1	3.6		
4	8 · 2	6.7	6.3	7.8	2.0	3.4		
6	6.2	6.7	6.3	10.0	1.0	3.1		
. 8	4.1	5 · 1	4.7	11.7	0.3	2.0		
10	5.4	5.1	5.4	13 · 1	0.3	1.9		
Mittel	6.6	6.3	6.1	11.7	0.9	2 · 2		

Die einmalige tägliche Barometerschwankung folgt auf dem Ontake in ihren Phasenzeiten, wie zu erwarten, nur mehr dem täglichen Wärmegange; die doppelte tägliche Oscillation bleibt in der Phasenzeit etwas zurück gegen jene in der benachbarten Niederung und hat zugleich eine etwas kleinere Amplitude (0·23 statt 0·28), als sie dem mittleren Barometerstande auf dem Ontake entsprechen würde. Die wahrscheinliche Ursache dieser allen Gipfelstationen gemeinsamen Eigenthümlichkeit habe ich an einer anderen Stelle eingehender erörtert.

Beim täglichen Barometergange zu Kurosawa fällt die grosse Amplitude der einmaligen täglichen Luftdruckschwankung auf, die Phasenzeiten derselben sind etwas verfrüht (4<sup>h</sup> astatt 6<sup>h</sup>), dagegen zu Nagoya normal. Dass zwischen den

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Weitere Untersuchungen über die t\u00e4gliche Oscillation des Barometers. Denkschriften der Wiener Akad., Bd. LIX, 1892.

Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation zu Kurosawa und Nagoya ein Unterschied von einer halben Stunde besteht, ist wohl nur ein zufälliges Resultat der bloss 31-tägigen Beobachtungsreihe. Sonst ist die Übereinstimmung in ähnlichen Fällen viel grösser.

Versucht man aus dem täglichen Gange des Luftdruckes auf dem Ontake und zu Kurosawa im Augustmittel den täglichen Gang der Lufttemperatur in der atmosphärischen Schichte von 2220 m Mächtigkeit zwischen den beiden Stationen zu berechnen, so erhält man

$$1^{\circ}60 \sin(220^{\circ}2+x) + 0^{\circ}25 \sin(50^{\circ}0 + 2x)$$
.

Nach dem Gange des Luftdruckes auf dem Ontake wäre demnach nur auf eine tägliche Wärmeschwankung von 3°2 in der Luftschichte unterhalb desselben zu schliessen.

Täglicher Gang der Temperatur. Auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa tritt das Maximum der Temperatur im täglichen Gange näher dem Mittage ein, als in der Ebene, namentlich auf dem Ontake liegt das Wärmemaximum dem Mittage sehr nahe; zu Nagoya tritt das Temperaturmaximum erst gegen 3<sup>h</sup> Nachmittags auf, wie dies im Sommer normal ist. Der frühe Eintritt des Wärmemaximums zu Kurosawa scheint eine für Thalstationen ziemlich charakteristische Erscheinung zu sein, wie wir später noch sehen werden. Die Gleichungen für den täglichen Wärmegang sind:

Auf dem Ontake entfernt sich der tägliche Temperaturgang am meisten von einer einfachen täglichen Wärmewelle, das zweite Glied hat fast die halbe Amplitude des ersten, also einen sehr grossen Einfluss. Der Eintritt der Extreme ist verfrüht gegenüber den unteren Stationen. An der Thalstation ist die tägliche Amplitude sehr gross, viel grösser als in der Ebene, auch hat das zweite Glied noch einen erheblicheren Einfluss, die Phasenzeiten stimmen aber an beiden Orten (Kurosawa, Nagoya) fast vollkommen überein.

Der tägliche Gang der absoluten und der relativen Feuchtigkeit, sowie jener der Bewölkung tritt an den drei Stationen in sehr charakteristischer Form auf. Auf dem Berggipfel haben die Nachmittagsstunden die grösste relative Feuchtigkeit, wenn gleichzeitig in den Thälern und in der Ebene die Luftfeuchtigkeit noch dem Minimum der Sättigung nahe ist. Die trockenste Tageszeit auf dem Gipfel fällt auf Mitternacht bis 2<sup>h</sup>, wenn unten in den Thälern die Luft am feuchtesten ist.

Der Wasserdampfgehalt der Luft erreicht in der täglichen Variation auf dem Berggipfel sein Maximum um 2<sup>h</sup> Nachmittag, in der Thallage zu Kurosawa etwa um 5<sup>h</sup> Nachmittag und zu Nagoya in der Ebene draussen erst um 7<sup>h</sup>. Zu Nagoya zeigt sich auch die gewöhnliche Erscheinung eines ersten secundären Maximums des Dampfdruckes um 8<sup>h</sup>—9<sup>h</sup> Vormittag, dem rasch eine Abnahme folgt, die gewöhnlich und wohl mit Recht durch die tägliche Periode der Luftbewegung erklärt wird, dann folgt wieder eine Zunahme des Dampfdruckes bis zum Abende.

Der tägliche Gang der Bewölkung zeigt an allen drei Stationen eine grössere Übereinstimmung, als jener der Feuchtigkeit, was ja auch erklärlich ist, da die Himmelsansicht für alle Stationen nahe dieselbe ist, nur die localen Wolkenhauben der Berggipfel machen eine Ausnahme, die auch an der viel stärkeren Bewölkung auf dem Gipfel des Ontake in den ersten Nachmittagsstunden zum Ausdrucke kommt. Charakteristisch ist die rasche Abnahme der Bewölkung nach 6<sup>h</sup>, so dass etwa um 8<sup>h</sup> Abends das Minimum der Bewölkung eintritt.

Die Gleichungen des täglichen Ganges für die eben besprochenen meteorologischen Elemente folgen später.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Gipfel des Ontake steht in vollkommener Übereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen. Das Maximum der Windstärke tritt um 3<sup>h</sup> Morgens ein, das Minimum um 3<sup>h</sup> Nachmittags. Zu Nagoya in der Ebene trat das Minimum um 6<sup>h</sup> Morgens ein, das Maximum von 3<sup>h</sup> Nachmittags gleichzeitig mit dem Minimum der Windstärke auf dem Berggipfel. Die mittlere Windgeschwindigkeit war auf letzterem mehr als fünfmal grösser als in der Ebene, in der Thalstation war sie, wie zu erwarten, noch viel kleiner.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit sind folgende (Mitternacht x = 0, Localzeit, Meter pro Secunde, Augustmittel 1891):

```
Ontake ....... 4.07 \sin(53.6+x)+0.33 \sin(262.4+2x)
Kurosawa...... 0.90 \sin(243.9+x)+0.38 \sin(47.1+2x)
Nagoya...... 0.97 \sin(228.9+x)+0.26 \sin(25.5+2x)
```

Auffallend ist die grosse Amplitude in der täglichen Variation der Windstärke auf dem Gipfel des Ontake. Die Phasenzeiten des täglichen Ganges sind auf dem Ontake fast genau die entgegengesetzten von jenen zu Nagoya in der Niederung. Auch die mittlere Windgeschwindigkeit war auf dem Ontake ganz ungewöhnlich gross.

Ich will den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für einige Gipfelstationen, für welche ich die entsprechenden Gleichungen berechnet habe, hier zusammenstellen nebst Angabe der Seehöhe in Meter (Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde, Localzeit, x=0 für Mitternacht.)

```
Pikes Peak 4308.... 9 \cdot 26 + 1 \cdot 11 \sin(69 \cdot 2 + x) + 0 30 \sin(301^{\circ}0 + 2x)
Fuji Gipfel 3733.... 8 \cdot 79 + 2 \cdot 04 \sin(65 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 54 \sin(44 \cdot 3 + 2x)
Ontake<sup>2</sup> 3055... 11 \cdot 41 + 3 \cdot 84 \sin(53 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 53 \sin(247 \cdot 6 + 2x)
Gozaishagatake 1205.... 7 \cdot 76 + 1 \cdot 50 \sin(84 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 59 \sin(281 \cdot 3 + 2x)
```

Für die japanischen Stationen habe ich hier überall angenommen, dass die für Mitternacht angegebene Windgeschwindigkeit auch dieser Stunde entspricht, und nicht etwa dem Mittel des Intervalls 10<sup>h</sup>—Mitternacht, also für 11<sup>h</sup> p. gelte. An den japanischen Stationen wurde nur je einen (Sommer-) Monat oder wenig darüber beobachtet, für Pikes Peak dagegen bezieht sich die Formel auf ein mehrjähriges Mittel. Die Übereinstimmung im täglichen Gange der Windstärke aller Gipfelstationen ist eine sehr grosse.

In der nachfolgenden Tabelle habe ich die Mittelwerthe der zweistündigen Terminbeobachtungen für den ganzen Zeit-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ich nehme an, dass die unter Mitternacht stehende Windgeschwindigkeit dieser Stunde entspricht, nicht dem Mittel aus 10<sup>h</sup>-Mitternacht.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Hier ist der mittlere Gang für 43 Tage, d. i. die ganze Beobachtungsperiode eingestellt.

raum vom 1. August bis 12. September inclusive (also für 43 Tage) zusammengestellt und zwar in anderer Form, indem für jede Station alle meteorologischen Elemente beisammenstehen und so unter sich auf gegenseitige Beziehungen verglichen werden können.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente 1. August bis inclusive 12. September 1891 (43 Tage).

!	Luftdruck	Tem-	Feuch	tigkeit	Bewöl-	Wind-
	Culturack	peratur	absolut	relativ	kung	stärke
			Ontake	3055 m		
Mitternacht	532.02	7 · 19	5.93	76	5.6	14.2
2	1.76	6.93	5.81	76	5.7	14.6
4	1.64	6.72	6.04	81	5.6	15.1
6	1:84	7.07	6.22	82	6.0	14.3
8	2:10	8.93	6.66	79	6 · 3	11 8
10	2.40	11.52	7.43	76	7 · 1	9.7
Mittag	2.42	12.60	8.02	76	8.4	7.8
2	2.33	12.38	8 · 17	78	8.7	7.3
4	2 · 17	10.72	7.82	82	8.3	7.9
6	2.11	8 · 47	6.86	83	6.5	9.7
8	2.43	7.41	6.26	80	4.3	11.7
10	2.32	7.43	6.19	79	5.3	12.8
Mittel	532 · 13	8.95	6.78	79.0	6.5	11.4
		·	Kurosaw	a 834 m		
Mitternacht	CO1 - OO	17.00	1	00		0.4
	691.03	17.23	14.11	96	5.1	0.4
2 4	90.84	16.60	13.66	96 97	5·5 5·7	0.4
6	91.19	15.96		96	7.9	0.4
8	91.11	15.98 19.52	13.11	84	6.1	0.4
10	90.77	23.92	15.19	69	6.2	1.6
Mittag	90.13	26.20	15.13	61	6.6	2.1
2	89.69	26 35	15 13	61	6.6	$\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2}$
4	89.61	25.37	15.49	66	6.2	$\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2}$
6	89.81	22.00	15.80	81	6.1	0.9
8	90.71	19.13	15.23	92	4.5	0.3
10	91.02	18.03	14.71	95	5.0	0.3
Mittel	690:57	20.52	14.60	82.9	6.0	0.95
			,			

In derselben Anordnung sollen hier auch die Gleichungen für den täglichen Gang aller Elemente zusammengestellt werden. Die Zeit ist auch in diesen Gleichungen Localzeit, und x = 0 für Mitternacht.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente.

### A. Auf dem Gipfel des Ontake 3055 m.

```
Luftdruck . . . . . 0.275 \sin(227.4+x) + 0.229 \sin(143.2+2x)

Temperatur . . . 2.83 \sin(253.2+x) + 1.10 \sin(74.0+2x)

Dampfdruck . . . 1.12 \sin(246.7+x) + 0.28 \sin(43.6+2x)

Rel. Feuchtigkeit 0.88 \sin(168.4+x) + 3.28 \sin(272.5+2x)

Bewölkung . . . 1.57 \sin(257.3+x) + 0.89 \sin(24.8+2x)

Windgeschw . . 3.84 \sin(53.6+x) + 0.53 \sin(247.6+2x)
```

### B. Zu Kurosawa 834 m.

```
Luftdruck . . . . 0.685 \sin(35.7+x)+0.373 \sin(170.4+2x)

Temperatur . . 5.27 \sin(237.4+x)+1.57 \sin(64.9+2x)

Dampfdruck . . 1.17 \sin(208.3+x)+0.33 \sin(156.2+2x)

Rel. Feuchtigk. 19.17 \sin(67.2+x)+5.63 \sin(233.6+2x)

Bewölkung . . . 0.89 \sin(299.0+x)+0.45 \sin(309.6+2x)

Windgeschw . . 1.00 \sin(245.6+x)+0.43 \sin(34.9+2x)
```

Temperatur, Dampfdruck und Bewölkung zeigen in ihrem täglichen Gange die meiste Übereinstimmung, auf dem Ontake noch mehr als unten im Thale. Die relative Feuchtigkeit hat auf dem Gipfel der Hauptsache nach nur eine doppelte tägliche Periode, unten im Thale dagegen nur eine einfache und zwar mit excessiver Amplitude. Die Windgeschwindigkeit schliesst sich unten in ihrem täglichen Gange ganz der Temperatur an, nur treten die Extreme früher ein bei der Windstärke als bei der Temperatur; auf dem Gipfel ist, wie schon bemerkt, der Gang der entgegengesetzte.

Aus den Gleichungen des täglichen Ganges der Temperatur unten und oben erhält man unmittelbar auch jene des täglichen Ganges der Wärmeabnahme mit der Höhe durch einfache Subtraction der nummerischen Coëfficienten und Division der Amplituden durch den Höhenunterschied der beiden Stationen. Die Rechnung stellt sich dann so:

				-	
	P	$p_1$	$q_1$	$p_2$	$q_2$
Kurosawa 834	$4m20^{\circ}52$	-4°57	2°63	+1.48	+0.53
Ontake 3055	5 8.95	-2.74	-0.70	<b>-</b> -1·08	+0.21
Differenz 2221	111.57	1.83	1 · 93	+0.40	+0.32

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$11.57 + 2.660 \sin(223.5 + x) + 0.512 \sin(51.3 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m:

$$0.520 + 0.120 \sin(223.5 + x) + 0.023 \sin(51.3 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m (August allein):

$$0.524 + 0.117 \sin(221.7 + x) + 0.010 \sin(127.9 + 2x)$$

#### Coëfficienten

Coëfficienten

		p	$p_1$	$q_1$	$p_2$	$q_2$
Nagoya	15 <i>n</i>	a26·05	-2.78	-1.98	+0.65	-0.075
Kurosawa	834	20.26	-4.42	-2.60	+1.19	-0.200
Differenz	819	5.79	+1.64	+0.62	-0.54	+0.125

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$5.79 + 1.753 \sin(69.3 + x) + 0.554 \sin(283.0 + 2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 m:

$$0.709 + 0.215 \sin(69.3 + x) + 0.068 \sin(283.0 + 2x)$$

Derselbe zwischen Nagoya-Ontake:

$$0.574 + 0.044 \sin(183.9 + x) + 0.012 \sin(268.3 + 2x)$$

Die mittlere Wärmeabnahme pro 100 m zwischen dem Gipfel des Ontake und Kurosawa ist 0°52, zwischen Kurosawa und Nagoya dagegen viel grösser, 0°71; Nagoya mit dem Ontake verglichen gibt 0°57 pro 100 m, d. i. eine verhältnissmässig geringe Wärmeabnahme für den Sommer. Freilich fällt die Beobachtungszeit in die Zeit des Regenmonsuns. Es kann aber auch die mittlere Temperatur auf dem Ontake ein wenig zu hoch gefunden worden sein, doch spricht die grosse mittlere Windgeschwindigkeit gegen die Annahme, dass die Wärmestrahlung des kahlen besonnten Gipfels die Angaben der Thermometer erheblich beeinflusst haben mag.

Der tägliche Gang der Wärmeabnahme zwischen der Thalstation und dem Gipfel des Ontake nimmt gerade den umgekehrten Verlauf wie jener zwischen Kurosawa und dem in der Niederung ausserhalb des Gebirges gelegenen Nagoya. Die nächtliche Abkühlung der Thalstation ist so gross, dass der Wärmeunterschied gegen Nagoya um diese Zeit grösser wird, als er am Nachmittag ist, wo umgekehrt die Thalstation einen Wärmeexcess zeigt. So entsteht das ganz abnorme Verhältniss einer raschen nächtlichen und langsamen nachmittägigen Wärmeabnahme mit der Höhe. Strenger genommen sollte man diesen letzteren Ausdruck im vorliegenden Falle gar nicht anwenden, denn sicherlich handelt es sich hier nur um locale Temperaturunterschiede, und nicht um jene in der zwischenliegenden Luftschichte selbst. Die Luftschichte oberhalb Nagova in der Seehöhe von Kurosawa hat ganz unzweifelhaft nicht die extreme tägliche Wärmeschwankung, wie wir sie in diesem Niveau an der Erdoberfläche in dem wahrscheinlich ziemlich engen Gebirgsthale finden. Man sollte daher nur von dem täglichen Gange des Wärmeunterschiedes zwischen Nagoya und Kurosawa sprechen und nicht von einer Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen beiden. Da wir später einen ganz analogen Fall zu betrachten haben werden, der das Interesse an dieser Erscheinung sehr erhöht, da er derselben eine grössere Tragweite gibt, so wollen wir bloss als Rechnungsgrösse doch die Zahlen der Wärmeabnahme mit der Höhe zum Vergleiche beibehalten.

			V	Värmea	ibnahr	ne pro	100 m				
Mittn.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
			Ku	rosawa	a — On	take (43	3 Tage	):			
•456	•426	•407*	· <b>4</b> 15	•465	•545	· <b>62</b> 0	·655	.639	•589	•533	•489
			Nε	igoya-	-Kuro	sawa (A	ugust	):			
·844	•891	·921	851	•694	•527	•442*	•487	•589	•699	•764	.799
			N	lagoya	-Ont	ake (Au	gust):				
.550	.544	·541*	.5.13	.544	.5.10	.585	.509	.610	.000	· 616	.587

Wegen der übermässigen localen täglichen Temperaturvariation im Gebirgsthale von Kurosawa haben wohl die Zahlen

für den täglichen Gang der Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Nagoya und Ontake eine allgemeinere Bedeutung, als jene für Kurosawa—Ontake, trotz der geringen horizontalen Entfernung dieser letztgenannten Stationen.

In der Wärmeabnahme zwischen der Station in der Ebene am Meeresufer und jener auf dem Gipfel des Ontake ist die tägliche Variation eine sehr geringe; die Amplitude der letzteren ist dagegen sehr gross zwischen der Ebene und dem Gebirgsthale.

II.

Eine zweite Beobachtungsreihe stündlicher Werthe der meteorologischen Elemente auf einem hohen Berggipfel verdanken wir Herrn J. Vallot, der kürzlich zweimonatliche Beobachtungsergebnisse auf dem Gipfel des Montblanc, bei den Grands Mulets und zu Chamonix veröffentlicht hat. Dieselben sollen hier einer kurzen Discussion unterzogen werden, namentlich auch im Vergleiche mit den eben vorher besprochenen correspondirenden Beobachtungen auf dem Ontake und an dessen Fuss zu Kurosawa.

Herr Vallot hat in seiner Publication den täglichen Gang der meteorologischen Elemente an den oben genannten Stationen, der mit Hilfe von öfter controlirten Registrirapparaten von Richard erhalten worden ist, bloss in Form von Curven mitgetheilt; die Zahlenwerthe selbst sollen im Jahrgang 1892 des »Annales du bureau central Mét. de France« zur Veröffentlichung gelangen, der eben erst zum Drucke kommt. Ich habe einstweilen den von Herrn Vallot veröffentlichten Diagrammen des täglichen Ganges die nummerischen Werthe der meteorologischen Elemente entnommen, was, wie Controlversuche ergeben haben, mit hinlänglicher Genauigkeit geschehen konnte. Herr J. Vallot hat den Aufzeichnungen der Richard'schen Autographen die nummerischen Werthe nur für dreistündige Intervalle entnommen, wahrscheinlich desshalb, weil er die Zeitscala sehr klein nehmen musste, um an den oberen, schwer zugänglichen Punkten die Autographen längere Zeit sich selbst

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Annales de l'Observ. Mét. du Montblanc, Paris, G. Steinheil, 1893.

68 J. Hann,

überlassen zu können. Dagegen verdoppelte sein Barograph die Änderungen des Luftdruckes gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers.

Es braucht hier nur bemerkt zu werden, dass die nachstehend mitgetheilten Beobachtungsergebnisse das vollste Vertrauen verdienen, was mir auch Herr Angot, der sich speciell mit diesen Registrirungen und ihrer Reduction beschäftigte, bestätigt hat. In Bezug auf nähere Information darüber, wie die Registrirungen erhalten worden sind, und in welcher Weise für die Richtigkeit der Aufzeichnungen gesorgt wurde, und die nöthigen Reductionen ermöglicht worden sind, müssen wir auf die leicht zugängliche Publication des Herrn J. Vallot verweisen, dem die Wissenschaft für seine mit grossen Kosten und ausserordentlichen Strapazen verbundenen Bemühungen zu grossem Danke verpflichtet ist.

Die Registrirungen des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, eirea 3 m unterhalb desselben in 4807 m Seehöhe umfassen 54 Tage, vom 17. Juli bis 9. September 1877, jene der Temperatur nur 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August. An die Reduction der Barographenzeichnungen (Richard, grosses Modell) wurden die Temperaturcorrectionen angebracht.

Bei den Grands Mulets (3010 m) zeichnete der Barograph 55 Tage, der Thermograph 47 und der Hygrograph 53 Tage (beginnend mit dem 16. Juli 1887, mit Unterbrechungen, die ergänzt werden konnten). Da an die Angaben des Barographen keine Temperaturcorrection angebracht worden ist, wurden dieselben hier nicht verwendet.

Zu Chamonix (1035 m) registrirten Barograph, Thermograph und Hygrograph ununterbrochen vom 11. Juli bis 11. September. Thermograph und Hygrograph befanden sich in einer Jalousiehütte im Garten des Hôtel Montblanc, die Hütte wurde noch besonders durch Schirme aus Segeltuch gegen die Sonnenstrahlung geschützt. Dieselbe Vorsicht wurde auch nach Möglichkeit bei den Thermometeraufstellungen auf dem Montblanc-Gipfel und bei den Grands Mulets beobachtet.

Ausserdem werden von Herrn Vallot die Ergebnisse der correspondirenden Aufzeichnungen und Registrirungen der

meteorologischen Elemente zu Genf, Observatorium (Seehöhe 407 m) und auf dem grossen St. Bernhard (Seehöhe 2476 m) ebenfalls in Form von Diagrammen zum Vergleiche mitgetheilt.

Wie weit die von Herrn Vallot in Form von Diagrammen mitgetheilten Beobachtungsergebnisse wirklich correspondirend sind, ist aus der Publication nicht zu ersehen. Einen Einfluss auf die nachstehenden Erörterungen dürften etwaige Abweichungen von einer absoluten Gleichzeitigkeit der verglichenen täglichen Perioden der meteorologischen Elemente nicht haben.

In den nachfolgenden zwei Tabellen (siehe S. 70 und 71) habe ich die höchst interessanten Ergebnisse der durch Herrn Vallot's Bemühungen zu Stande gekommenen correspondirenden Beobachtungsreihen in einem verticalen Höhenintervall von fast  $4^{1}/_{2}$  km, übersichtlich zusammengestellt. Die Ergebnisse ähnlicher Aufzeichnungen in den folgenden Jahren 1890, 1891 und 1892 beim Observatorium Vallot 4365 m, bei den Grands Mulets und zu Chamonix sind noch nicht veröffentlicht worden.

Ich will zuerst den täglichen Gang der Luftfeuchtigkeit besprechen, weil am wenigsten darüber zu bemerken ist. Die relative Feuchtigkeit hat bei den Grands Mulets (3010 m) ihr Minimum um 10<sup>h</sup> Vormittag und ihr Maximum um 6<sup>h</sup> Abends. Der Gang ist also ein anderer wie auf dem Ontake in gleicher Seehöhe, wahrscheinlich weil wir es hier nicht mit einer Gipfelstation zu thun haben, sondern mit einem vergletscherten Bergabhang. Der Gegensatz zwischen der Trockenheit der ersten Morgenstunden bei den Grands Mulets und der gleichzeitigen fast völligen Sättigung der Luft mit Wasserdampf im Thale unten tritt auch hier auffallend genug zu Tage. Die tägliche Variation der relativen Feuchtigkeit ist zu Chamonix viel grösser als bei den Grands Mulets.

Der Gang der absoluten Feuchtigkeit bei den Grands Mulets ist jenem auf dem Ontake (in gleicher Seehöhe und gleicher Jahreszeit) sehr ähnlich, aber der Eintritt der Extreme erfolgt um einige Stunden später bei den Grands Mulets.

Täglicher Gang des Luftdruckes und der Temperatur (1887).

(1001).								
	Luftdruck	2 Monate	Temp	Temperatur 1 Monat Juli/August				
	Genf	Mont- blanc	Genf	Cha- monix	St. Bern- hard	Grands Mulets	Mont- blanc	
	407 m	4807 m	407 m	1035 m		3010 m	4807 11	
			Mi	ttel:				
i	727 · 34	423.85	21.0	16.8	8.6	5.8	-6.5	
		Ab	weichung	en vom	Mittel			
Mitternacht	.22	.00	-3.1	-4.6	-1.3	_1.2	_1 · 1	
1	•17	<b>•15</b>	-3.8	-5.1	1.4	-1.4	-1.2	
2	•13	· <b>2</b> 5	-4.4	-5.6	-1.5	-1.6	-1.3	
3	•06	35	5.1	<b>—</b> 5·9	-1.6	-1.7	-1.4	
4	•01	44	5.4	-6.2	-1.8	-1.9	-1.5	
5	•08	<b></b> ·49	-5.2	<b>—6·8</b>	-1.7	-1.8	-1.3	
6	•26	53	-4.1	-5.0	-1.5	<u>1·5</u>	-1.1	
7	•36	52	-2.5	-3.0	-1.0	-0.9	-0.7	
8	•46	39	-1.0	-0.6	-0.3	0.1	-0.2	
9	•54	<b></b> · 24	0.8	2 · 4	0.7	0.7	0.4	
10	•56	06	2 · 2	5.1	1.6	1 • 4	1.0	
11	•43	09	3.3	6.3	2 · 1	2.2	1.5	
Mittag	•06	·22	4.2	7.2	2.5	2.8	1.8	
1	• 26	•33	4.7	7 · 4*	2.6*	3.0*	2.0*	
2	<b>·46</b>	•38	5 0	7 · 1	2 · 4	2.8	2.0*	
3	60	•39	5 • 2*	6.4	2.1	2 · 2	1.8	
4	<b>—·6</b> 5	•38	4.9	5.2	1.5	1 5	1.5	
5	64	.33	4.0	3.9	0.8	0.8	1.1	
6	<b></b> • 55	· 26	2.9	2.0	0 1	0.2	0.5	
7	• 43	•20	1.8	0.2	-0.3	-0.5	0.0	
8	• 24	•19	0.2	-1.2	-0.8	-0.8	-0.5	
9	03	.22	-0.8	-2.6	-1.0	-1.0	-0.8	
10	•18	.23	-1.6	-3.6	-1:1	<u>—1·1</u>	-1.0	
11	· 24	•15	-2:3	-4.0	-1.2	-1.1	-1.0	
Mittel	•317	.283	3.27	4.44	1 · 29	1.43	1 · 1 1	

Täglicher Gang der Temperatur und Feuchtigkeit 2 Monate (1887).

	т	emperat		Da	ampfdru mm		Relativ	ve Feuch	tigkeit
	Genf	Cha- monix	Grands Mulets	Genf	Cha- monix	Grands Mulets	Genf	Cha- monix	Grands Mulets
	407m	1035 m	3010 m	407m	1035 <i>m</i>	3010 m	407m	1035 m	3010 m
Mittn.	16.0	11.3	3.3	11.2	9.6	4.1	84	92	71
1	15.5	10.9	3.5				87		
2	15.0	10.4	3.1	10.9	9.3	4.0	87	93	70
3	14.3	10.0	3.0		0.0	0.0	00	00	00
<b>4</b> 5	14·1 14·4	9.8	3.1	10.6	8.8	3.8	88	96	68
6	15.0	10.2	3.1	11.0	9.3	3.8	86	93	65
7	16.0	11.5	3.4	11-0	8.3	3.0	00	90	0.5
8	17.9	14.0	4.0	11.8	9.9	3.7	78	83	60
9	19.3	16.7	4.9	** 0				00	
10	20.8	19.3	5.6	12.5	10.5	4.0	70	64	59
11	22.0	21.0	6.3						
Mittag	23.0	22.0	6.9	12.8	10.7	4.6	63	56	61
1	23 · 4	22.2	7.2						
2	23 · 7	22 · 1	7.3	12.6	10.4	5.0	58	54	66
3	23.7	21.7	7.1	!					
4	23.3	20.6	6 7	12.3	9.8	5.4	58	57	73
5	22.3	18.9	6.0						
6	21.1	17.0	5.1	12.3	10.5	5.1	65	71	77
7	20.0	15.7	4.3						
8	19.0	14.3	4.0	12.2	10.6	4.6	74	85	76
9	18.0	13.0	3.7						
10	17.2	12.4	3.4	11.7	10.0	4.1	80	93	74
11	16.6	11.8	3.3						
Mittel	18.8	15.3	4.6	11 8	9.9	4·4	74	78	68

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Luftfeuchtigkeit bei den Grand Mulets und zu Chamonix sind:

# Relative Feuchtigkeit

Grands Mulets... 
$$7.98 \sin (138.2+x) + 2.60 \sin (296.5+2x)$$
  
Chamonix......  $21.60 \sin (62.9+x) + 5.45 \sin (228.4+2x)$ 

# Dampfdruck

Grands Mulets ... 
$$0.71 \sin (201.5+x) + 0.29 \sin (344.1+2x)$$
  
Chamonix ...  $0.66 \sin (221.6+x) + 0.43 \sin (153.2+2x)$ 

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit zu Chamonix stimmt in den Amplituden und Phasenzeiten völlig überein mit jenem zu Kurosawa, ist also charakteristisch für Thalstationen und den Sommer. Desgleichen ist auch der Gang des Dampfdruckes fast völlig übereinstimmend, weist aber eine kleinere Amplitude auf.

Die Abnahme des absoluten Wasserdampfgehaltes der Luft erfolgt nach der früher erwähnten Formel, wie folgende mittelst derselben erhaltene Rechnungsergebnisse zeigen:

Dampfdruck bei den Grands Mulets berechnet nach jenem zu Genf 4.7, nach jenem zu Chamonix 4.8, beobachtet 4.4 mm.

Für den Montblanc-Gipfel erhält man als Dampfdruck (Mitte Juli bis 10. September) aus den Beobachtungen zu Genf 2·5, zu Chamonix 2·6, bei dem Grands Mulets 2·3, Mittel 2·5 mm.

Der tägliche Gang der Lufttemperatur zeigt zwischen Chamonix und Genf genau dieselben Unterschiede, wie wir sie zwischen Kurosawa und Nagoya vorhin gefunden haben. In dem engen Gebirgsthale von Chamonix ist die tägliche Amplitude der Temperaturvariation viel grösser als zu Genf, und das Maximum liegt viel näher dem Mittage, ganz wie zu Kurosawa. In ähnlicher Weise hat die Station Kolm Saigurn das Temperaturmaximum dem Mittage sehr nahe, und das gleiche zeigen die Stationen in den Hochthälern der Rocky Mountains, von denen ich seinerzeit stündliche Temperatur- und Luftdruck-

aufzeichnungen discutirt habe.¹ Folgende kleine Tabelle zeigt diese Übereinstimmung des Temperaturganges in den Thälern und deren Verschiedenheit von jenem ausserhalb des Gebirges.

Täglicher Wärmegang. Abweichungen vom Mittel.

				Z	eit			
Höhe i Ort <i>hin</i>	n 9 <sup>^</sup>	104	114	Mittag	14	2 h	3,	4 h
Kurosawa8:3	1.1	3.2	4.3	5.2	5 7*	5.6	5 · 1	4 · 7
Chamonix10.3	2.4	5.1	6.3	7.2	7.4*	7.1	6.4	5.2
Kolm Saigurn :16.0	1.5	2 • 1	2.6	$2 \cdot 9$	3.1*	3.0	2.6	2 • 2
Rocky Mountains .20.2	3.7	6.3	7.4	8.0	8.0*	7 8	7.3	6 · 4
Nagoya0·1	0.7	1.7	2.5	3 · 1	3.6	3.7*	3.6	3.3
Genf4.0	0.8	$2 \cdot 2$	3.3	$4 \cdot 2$	4.7	5.0	5.2*	4.9

An den letzteren Stationen ist um 4<sup>h</sup> Nachmittag die Temperatur noch nahe dem Maximum und höher als um Mittag; an den ersteren Stationen in tieferen Gebirgsthälern ist die Mittagstemperatur höher als jene um 4<sup>h</sup> Nachmittag.

Ich möchte hier nur auf diese bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit des täglichen Ganges hinweisen, wie sie die hier verglichenen Stationen zeigen, um dadurch vielleicht Anregung zu speciellerer Prüfung über die Tragweite derselben zu geben. Zeigt sich, dass die Verfrühung im Eintritt des Temperaturmaximums in Gebirgsthälern eine allgemeine Erscheinung ist, dann erst wird es an der Zeit sein, über die Ursachen derselben (ob es in der absoluten Höhenlage oder Beschränkung des Horizontes, Eingeschlossenheit, begründet) nachzuforschen. Nichts ist für den Fortschritt der Wissenschaft bedenklicher, als für jede neue auffallende Naturerscheinung auch gleich mit einer supponirten Erklärung bei der Hand zu sein.

Die Constanten der Sinusreihen für den täglichen Wärmegang sind:

¹ Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke in den Rocky Mountains. Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXXIII, Märzheft 1881.

Täglicher Wärmegang.

	<i>p</i> <sub>1</sub>	$q_1$	$p_2$	$q_2$	$A_1$	Ag	$a_1$	a <sub>2</sub>
				Erster	Monat			
Genf	-3.88	_3·31	+0 57	+0.01	229 5	89.5	5.10	0.57
Chamonix	-6.09	-3.03	+1.40	+0.15	243.6	83.9	6.80	1.41
St. Bernhard.	-1.90	-0.78	+0.63	+0.18	247.7	74 1	2.05	0.65
Gr. Mulets	-2.00	-0.83	+0.72	+0.21	247 · 7	73 · 7	2.16	0.75
Montblanc .	-1.52	-0·76	+0 32	+0.30	243 • 4	58.0	1.70	0.38
				Zwei	Monate			
Genf	-3.21	-2.93	+0.71	+0.22	227 · 6	72.8	4.35	0.74
Chamonix	-5.03	-3.13	+1.45	+0.46	238 · 1	72.4	5.92	1.52
Gr. Mulets	-1.92	-1.02	+0.46	+0.44	242.0	46.3	2.17	0.64

Die hochgelegenen Stationen Grands Mulets, St. Bernhard und Montblanc-Gipfel zeigen sämmtlich die Eigenthümlichkeit, dass das Wärmemaximum dem Mittage recht nahe liegt.

Da meine Daten erst wieder aus den Diagrammen des Herrn J. Vallot zurück abgeleitet worden sind, und möglicher Weise dadurch kleine Abweichungen gegenüber den unmittelbar beobachteten Temperaturen entstanden sein könnten, so schadet es nicht, diesbezüglich einen Vergleich anzustellen. Durch die Güte des Herrn A. Angot, der mir die unmittelbar den Thermographenzeichnungen auf dem Montblanc-Gipfel entnommenen Temperaturmittel für die 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August (1887), mitgetheilt hat, bin ich in der Lage, diesen Vergleich wenigstens für eine Station vornehmen zu können.

Temperatur auf dem Montblanc-Gipfel.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Aus dem Diagramm des Herrn J. Vallot entnommene Temperaturen.

Man sieht, die Unterschiede sind ganz unbedeutend. Noch weniger einflussreich werden sie aber bei den tieferen Stationen mit grösseren Temperaturamplituden sein.

Die Gleichung des täglichen Wärmeganges nach den dreistündigen, den Registrirungen entnommenen Temperaturen ist:

$$-6.44 + 1.83 \sin (241.1 + x) + 0.40 \sin (57.1 + 2x)$$

Aus diesen Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten wir auch unmittelbar jene für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe. Der grösste directe Höhenunterschied, für welche dieselbe je berechnet werden konnte, ist nun der zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel, fast  $4^{1}/_{2}$  km. Die Rechnung steht so:

$$p$$
  $p_1$   $q_1$   $p_2$   $q_2$   
Genf  $407m...$   $21.04$   $-3.88$   $-3.31$   $+0.57$   $+0.005$   
Montblanc  $4807m...$   $6.44$   $-1.78$   $-0.44$   $+0.40$   $+0.02$   
Differenz  $4400m...$   $27.48$   $-2.10$   $-2.87$   $+0.17$   $-0.015$ 

Daraus folgt als täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe pro 100 m zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel (für Ende Juli):

$$0^{\circ}624 + 0^{\circ}081 \sin(216^{\circ}2 + x) + 0^{\circ}004 \sin(95^{\circ}1 + 2x)$$
.

Diese tägliche Periode hat also eine ziemlich kleine Amplitude. Die nach dieser Formel für zweistündliche Intervalle berechneten Werthe finden sich später mit anderen ähnlichen zusammengestellt.

Für die Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Chamonix und Montblanc findet man auf gleiche Weise folgende Gleichung:

$$0^{\circ}616 + 0^{\circ}133 \sin(239^{\circ}0 + x) + 0^{\circ}027 \sin(82^{\circ}6 + 2x)$$
.

Hier hat der tägliche Gang schon eine viel grössere Amplitude in Folge der grossen täglichen Wärmeschwankung im Thale von Chamonix.

 $<sup>^{1}</sup>$  Die Bedeutung der Constanten  $p,\ p_{1},\ q_{1},\ p_{2},\ q_{2}$  ergibt sich aus der bekannten Form der harmonischen Reihe

 $p+p_1\cos x+q_1\sin x+p_2\cos 2x+q_2\sin 2x$ .

Ich habe mittelst der auf S. 74 mitgetheilten Constanten des täglichen Wärmeganges noch folgende Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe abgeleitet:

Grands Mulets (3010)—Montblanc (4807)
$$0.684+0.027 \sin (262.9+x)+0.022 \sin (88.6+2x)$$
St. Bernhard (2476)—Montblanc (4807)
$$0.647+0.016 \sin (267.0+x)+0.013 \sin (113.7+2x)$$
Chamonix (1035)—Grands Mulets (3010)
$$0.554+0.235 \sin (241.6+x)+0.036 \sin (94.8+2x)$$
Genf (407)—Chamonix (1035)
$$0.564+0.292 \sin (83.7+x)+0.124 \sin (252.0+2x)$$

Die letztere Gleichung ist aus den correspondirenden Aufzeichnungen von zwei Monaten (11. Juli bis 11. September) abgeleitet, alle übrigen aus Aufzeichnungen von einem Monate.

Die tägliche Variation der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen hochgelegenen Punkten (mit Ausschluss von Thalstationen) hat eine sehr geringe Amplitude, wie die ersteren beiden Gleichungen zeigen. Die Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix hat genau den gleichen Charakter wie jene zwischen Nagoya und Kurosawa, das Maximum tritt in der Nacht ein, das Minimum am Nachmittage.

Ich habe schon oben bemerkt, dass ich diesem Resultate keine reelle Bedeutung zugestehen mag, weil dasselbe keineswegs sich wirklich auf die Luftschichte zwischen Genf und Chamonix bezieht. Die excessive Erwärmung am Nachmittage und Erkaltung bei Nacht bleibt sicherlich auf die der Thalsohle von Chamonix aufliegenden Luftschichten beschränkt. Mit der üblichen abgekürzten Bezeichnung können wir sagen, dass diese Zahlen die \*klimatische\* Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix ausdrücken. Die Übereinstimmung mit den für Nagoya—Kurosawa erhaltenen Zahlen zeigt aber, dass wir es hier mit einer Erscheinung von allgemeinerer Bedeutung zu thun haben:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme.

$a_0$	$a_1$	$A_1$	$a_2$	$A_2$
Nagoya—Kurosawa 0 · 709	0.215	69.3	0.068	283.0
Genf—Chamonix0.564	0.292	$83 \cdot 7$	0.124	252.0

Aus den vorhergehenden Gleichungen habe ich die folgenden Zahlenwerthe berechnet:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe (pro 100 m).

	Genf Mont- blanc 4400 m	Chamonix  Mont- blanc  3772 m	Grands Mulets Mont- blanc 1800 m	St. Bernhard  Montblanc 2330 m	Chamonix Grands Mulets 1975 m	Genf Chamonix 628 m
			1 Monat			2 Monate
Mittern.	•580	•528	•679	•644	•383	•736
2	•551	•499	.671	•638	•335	•739
4	•542*	·489 <b>*</b>	•657*	·631*	·333*	•763
6	•555	•521	•659	.633	•406	.714
8	•590	•577	•682	•647	.604	•539
10	•635	•691	•716	•668	•698	•303
Mittag	•676	•756	· 783	·677	•797	•156*
2	•699	· 765	.721	•667	.802	205
4	· 702	.723	.689	•649	•733	•417
6	•685	•659	•665	•635	630	•650
8	•656	•623	.662	•634	•472	•773
10	•617	•561	.674	•641	•452	·778
Mittel	•624	•616	•684	•647	• 554	•564
i						

Die aus den Temperaturregistrirungen des Herrn Vallot auf dem Gipfel des Montblanc folgende tägliche Wärmeschwankung dürfte jedenfalls etwas zu gross sein in Folge der Unmöglichkeit, das registrirende Thermometer genügend gegen die Insolation und die Wärmereflexion des Schnees zu schützen. Das geht wohl schon aus einer Vergleichung mit dem täglichen Wärmegange auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel in viel geringerer Seehöhe hervor.

Täglicher Wärmegang im Sommer.

Obirgipfel 2140  $m cdots 1.65 \sin(238.1+x) + 0.25 \sin(24.3+2x)$ Sonnblickgipfel 3100  $m cdots 1.04 \sin(224.0+x) + 0.12 \sin(16.9+2x)$ Montblanc-Gipfel 4807  $m cdots 1.70 \sin(243.4+x) + 0.38 \sin(58.0+2x)$ 

Man darf wohl annehmen, dass die wahre Amplitude der täglichen Temperaturvariation auf dem Montblanc-Gipfel nur halb so gross (oder noch kleiner) ist, als man sie hier angegeben findet.

Herr Nilson Ekholm hat während seines Aufenthaltes auf Spitzbergen bei Cap Thordsen 1882/1883 sehr interessante und instructive Untersuchungen gemacht über den Einfluss der directen Insolation und der Wärmereflexion des Schnees auf die Thermometer in einer dieselben möglichst gegen Wärmestrahlung schützenden Hütte mit doppelten Jalousiewänden. In den Monaten April und Mai zeigten dieselben trotzdem öfter eine bis zu 4° höhere Temperatur als ein Schleuderthermometer.

Stündliche Vergleichsbeobachtungen vom 5.—25. Mai ergaben, dass nach dem Schleuderthermometer das Maximum der Lufttemperatur erst gegen 1½ p. eintrat, in der Hütte dagegen schon vor Mittag. Die tägliche Temperaturamplitude in der Hütte war 3°4, das Schleuderthermometer ergab dieselbe für die Luft ausserhalb bloss zu 2°9. Und auch diese Amplitude ist wohl noch etwas zu gross. Die mittlere Temperatur in der Hütte war um etwas mehr als einen halben Grad zu hoch.

Für die Zeit vom 18. Juli bis 14. August 1887 ergaben die Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel eine mittlere Temperatur von +3.0, d. i. eine Abweichung vom (30-jährigen) Mittel

von +1.5. Darf man annehmen, dass dieselbe auch für den Montblanc Giltigkeit hatte, so erhält man als normale Temperatur desselben für diese Periode —8.0. Die Beobachtungen auf dem Theodulpass (3330 m) stimmen damit sehr gut überein.

Als wahrscheinliches Jahresmittel der Wärme auf dem Montblanc-Gipfel möchte ich die auf verschiedenen Wegen ziemlich übereinstimmend gefundene Temperatur von —14°0 annehmen (für den Jänner —20° rund). Die von Herrn Vallot im Innern des Eistunnels auf dem Gipfel gefundene Mitteltemperatur von —16°5 ist wohl, wofür er ja selbst triftige Gründe angibt, erheblich niedriger als die äussere Lufttemperatur auf dem Gipfel.

Die Luftdruckbeobachtungen des Herrn Vallot auf dem Montblanc-Gipfel haben wohl den grössten Werth, weil die grösste Tragweite. Durch Berechnung der Seehöhe des Montblanc-Gipfels auf Grund derselben hat Herr A. Angot schon gezeigt, dass sie dieselbe zu 4810.5 m ergeben (Mittel nach Säntis und Puy de Dôme) in bester Übereinstimmung mit der trigonometrischen Messung.<sup>1</sup> Am interessantesten ist aber die Constatirung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf einem Gipfel von nahe 5 km Seehöhe. Nach den Ergebnissen der Registrirungen auf dem Sonnblickgipfel hätte man geneigt sein können, anzunehmen, dass in einer 1700 m grösseren Seehöhe der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Minimum am frühen Morgen und ein Maximum am Abend haben möchte. Die früheren vorläufigen Mittheilungen über die Ergebnisse der Beobachtungen des Herrn Vallot lauteten auch in der That so. Herr Rotch, der mit Herrn Vallot auf dem Montblanc war und in die Ergebnisse der Registrirungen auf demselben Einsicht hatte, sagte noch kürzlich, dass auf dem Gipfel des Montblanc der Luftdruck bloss ein Maximum um 1h p. und ein einziges Minimum um 4h Morgens habe mit einer blossen Tendenz zu einem zweiten Minimum am späten Nachmittag.<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Comptes rendus, tome CXVII, p. 786, 4. dec. 1893.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> The highest Met. Station in the world. American Met. Journal, October 1893.

J. Hann.

Die jetzt veröffentlichten Ergebnisse der Aneroïdregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel zeigen aber in der That noch ein ganz ausgesprochenes zweites Minimum am späten Nachmittage. Ich lasse zunächst die mir von Herrn A. Angot freundlichst mitgetheilten Ergebnisse der Reductionen der Aufzeichnungen vom 18. Juli bis 14. August hier folgen.

### Luftdruckmittel Montblanc 4807 m.

Diesen Luftdruckmitteln entspricht die Gleichung:

$$426.62 + 0.429 \sin(203.5 + x) + 0.151 \sin(67.6 + 2x)$$

Nach dem von Herrn J. Vallot nach den Mitteln für die Zeit vom 18. Juli bis 9. September gezeichneten Diagramme des täglichen Ganges verspätete sich das » Vormittagsmaximum « des Luftdruckes auf dem Montblanc bis 3h Nachmittags, das Nachmittagsminimum tritt um  $7^1/_2^h$  Abends ein (das Barometer sinkt doch noch um  $0 \cdot 19 \, mm$ ), das Abendmaximum fällt ganz normal auf  $9^1/_2^h$  Abends ( $+0 \cdot 23$ ), das Hauptminimum am Morgen tritt um  $6^h$  früh ein ( $-0 \cdot 53$ ). Die folgende Zusammenstellung des täglichen Barometerganges auf dem Schafberg, Obir, Säntis, Sonnblick und Montblanc zeigt recht deutlich die continuirliche Verspätung des »Vormittagsmaximums « mit zunehmender Seehöhe, womit die Verspätung des Nachmittagsminimums gleichen Schritt hält. Auch die zunehmende Vertiefung des Morgenminimums tritt sehr charakteristisch hervor.

Täglicher Gang des Barometers im Sommer auf hohen Alpengipfeln.

		Aipeng			
Zeit	Schafberg 1780 m	Obir . 2040 m	Säntis 2500 m	Sonnblick 3100 m	Montblanc 4810 m
Mitternacht	•17	·20	•16	•18	.00
1	.03	•07	03	.00	—·15
2	<b>-</b> ∙13	08	<b></b> ∙18	<b></b> ·15	<b>- · 25</b>
3	<b>-</b> ⋅28	<b></b> · 25	30	<b>—</b> ∙32	35
4	<b></b> ⋅35*	· —·36	•41	<b> · 4</b> 5	-·44
5	<b></b> ∙33	<b>—∙38</b> *	• 44*	<b></b> ∙50*	• 49
6	29	33	<b></b> ⋅39	<b></b> ∙ <b>4</b> 5	<b></b> ⋅53*
7	13	<b></b> ·23	<b></b> ⋅30	<b>—</b> ∙37	52
8	03	·11	·20	<b>-</b> ⋅27	39
9	.06	•02	<b>-</b> ·11	17	24
10	•14	•13	.00	04	06
11	· 19	•22	•11	•08	•09
Mittag	•17	·24	•15	·16	•22
1	·13	•21	·17	•19	.33
2	.07	•13	• 15	- 21	.38
3	.03	•06	•14	.22	.39
4	04	02	·11	·19	•38
5	09*	08	.07*	•14	.33
в	08	12*	.08	·12*	·26
7	02	09	•13	•14	•20
8	.08	•04	·21	•19	·19*
9	•21	•21	•30	.30	.22
10	·24	·28	.30	. 33	·28
11	·24	•27	•25	•29	•15
Sitzb. d. mathemnaturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a.					

Die folgende kleine Tabelle enthält in übersichtlicher Zusammenstellung die Gleichungen des täglichen Ganges des Barometers für verschiedene Seehöhen. Diese letzteren sind relativ genommen, indem die mittlere Seehöhe der Basisstationen Genf und Salzburg (407m und 430m) von den absoluten Höhen abgezogen worden ist. Namentlich für das erste Glied, die einmalige tägliche Barometerschwankung, ist ja fast nur die relative Seehöhe massgebend. Die Zeit ist stets von Mitternacht an gezählt.

Ort	Relative Höhe hm	Täglicher Gang des Barometers im Sommer
Genf 1	0	$0.417 \sin (6.9+x) + 0.326 \sin (148.8+2x)$
Salzburg	0	$0.388 \sin(26.5+x)+0.276 \sin(137.5+2x)$
Wendelstein	13.1	$0.076 \sin (187.8 + x) + 0.187 \sin (130.8 + 2x)$
Schafberg	13.6	$0.123 \sin (195.0+x) + 0.214 \sin (127.1+2x)$
Obir	16.2	$0.141 \sin (194.3 + x) + 0.246 \sin (115.2 + 2x)$
Säntis	20.8	$0.266 \sin (183.1+x) + 0.178 \sin (122.4+2x)$
Sonnblick	26.8	$0.318 \sin (181.7+x) + 0.179 \sin (110.3+2x)$
Montblanc	43.9	$0.425 \sin (194.3+x)+0.130 \sin (82.9+2x)$

Von der absoluten Seehöhe der Gipfelstationen in Hectometern ist gleichmässig 4·2 abgezogen worden, um die »beiläufige« relative Höhe einigermassen anzudeuten. Man sieht aus dieser Zusammenstellung die anfängliche Abnahme der Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung und die dann wieder folgende Zunahme derselben mit entg egen gesetzten Phasenzeiten. Die Ursache dieser Erscheinung habe ich in meiner Abhandlung: »Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers« eingehender nachgewiesen.²

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Mitte Juli bis Anfang September 1877 correspondirend mit Montblanc; die übrigen Mittel mehrjährig.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Denkschriften der Wiener Akademie, LIX. Band, Wien 1892. Tempsky.

Die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation auf den hohen Alpengipfeln scheinen von der Seehöhe fast unabhängig zu sein. Der mittlere Werth der Winkelconstante ist 191°. Das Maximum fällt demnach auf 6³/₄ h Abends, das Minimum auf 6³/₄ h Morgens. Das Maximum des Luftdruckes tritt demnach viel später ein, als das der Temperatur. Für diese liegt die Winkelconstante bei 240°, das Maximum wie das Minimum tritt demnach mindestens drei Stunden früher ein.

Die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation nimmt ziemlich regelmässig im Verhältniss mit dem Luftdrucke mit der Höhe ab, aber auch die Winkelconstante wird mit der Höhe kleiner, was eine Verspätung der Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation mit der Höhe bedeutet, auf deren Ursache ich in meiner citirten Abhandlung gleichfalls hingewiesen habe.

Den allmäligen Übergang der Amplituden und der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Barometerschwankung von der Erdoberfläche bis zu jener relativen Höhe, in welcher die Phasenzeit in die entgegengesetzte umschlägt, vermag man aus den oben und ebenso aus den von mir früher mitgetheilten Beobachtungen nicht ersehen, weil die Zwischenstationen bisher fehlten. Es ist das Verdienst der königlich baierischen meteorologischen Centralstation in München, solche Zwischenstationen mit registrirenden Barometern versehen zu haben.

In dem Jahrgang 1892 der \*Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Baiern« finden sich mit Juni beginnend die Ergebnisse zweistündlicher Reductionen dieser Aufzeichnungen bereits mitgetheilt.¹ Ich habe Mittel für die drei Sommermonate Juni, Juli, August gebildet und die correspondirenden Mittel für Obir, Säntis und Sonnblick zum Vergleiche beigegeben. So erhält man ein höchst lehrreiches Bild der allmäligen Modification des täglichen Barometerganges mit zunehmender Seehöhe, wie man ein solches bisher noch nie besessen hat. Die Station Hirschberg ist wohl keine eigentliche Gipfelstation, sondern nimmt eine Mittelstellung ein zwischen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> F. Erk, Die Resultate der Barometerregistrirung in München und Wendelstein, sowie in Hirschberg und Hohenpeissenberg im Jahre 1892. S. 147 und 148.

einer Gehängstation und einer Gipfelstation. Der etwas auffallende tägliche Gang des Barometers an derselben stimmt vollständig überein mit jenem zu Kolm Saigurn, einer Thalstation (mehr Gehängstation) in 1600 m absoluter Seehöhe; die relative Seehöhe aber stimmt wohl sehr nahe mit jener der Station Hirschberg überein. Diese beiden Stationen repräsentiren einen ganz aparten Typus des täglichen Barometerganges.

Täglicher Barometergang im Sommer 1892.

								_
	München	Hohen- Peissen- berg	Hirsch- berg 1	Wendel- stein	Obir	Säntis	Sonn- blick	-
Breite	48° 9′	47° 48′	47° 40′	47° 42′	46° 30′	47° 15′	47° 3′	1
Höhe	526.4	993.9	1512.0	1727 · 22	2044.0	2500.0	3106.5	
Luftdruck	716.8	678 • 4	638 · 2	622 · 1	598.4	566.5	525 · 1	,
Temperatur.	16.7	14.9	11.4	9.7	8.3	4.9	0.6	1
	 			l				ĺ
Mitternacht	•30	•26	•24	•18	<b></b> ⋅15	•17	•12	
2	•11	•04	<b></b> ∙05	10	10	17	17	
4	•01	16	<b></b> · 26	<b></b> ⋅31	- • 29	<b> · 4</b> 5	40	
ti	•20	<b>-</b> ∙ 07	15	21	27	38	36	
8	•36	·12	•01	.00	<b></b> · 06	17	50	
10	.33	•22	.07	•10	-11	01	.05	İ
Mittag	•08	•08	.01	•10	•18	•14	•15	
2	32	17	12	02	•11	•16	•24	
4	62	31	20	12	.03	-11	•14	
6	55	31	-:12	<b>-</b> ⋅10	08	.08	.04	
8	13	<b> 02</b>	•19	•15	.00	•20	•14	
10	•19	.28	•37	.30	.20	.31	· 24	
4	1	1						

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Täglicher Gang des Barometers zu Kolm Saigurn, 1600 m:

Mittn. 
$$2^h$$
  $4^h$   $6^h$   $8^h$   $10^h$  Mittg.  $2^h$   $4^h$   $6^h$   $8^h$   $10^h$   $\cdot 27 - \cdot 13 - \cdot 32 - \cdot 24 - \cdot 05 \cdot \cdot 07 \cdot \cdot 03 - \cdot 07 - \cdot 11 - \cdot 05 \cdot \cdot 23 \cdot \cdot 41$ 

# Diesen Zahlenwerthen entsprechen folgende Gleichungen:

```
München ......0·346 sin (15^{\circ}1+x)+0·289 sin (141\cdot8+2x)
Peissenberg ....0·117 sin (36\cdot7+x)+0·251 sin (133\cdot6+2x)
Hirschberg ....0·118 sin (120\cdot1+x)+0·225 sin (144\cdot4+2x)
Wendelstein ....0·095 sin (163\cdot5+x)+0·214 sin (138\cdot0+2x)
Obir .......0·124 sin (202\cdot1+x)+0·179 sin (114\cdot7+2x)
Säntis .......0·267 sin (182\cdot6+x)+0·181 sin (122\cdot8+2x)
Sonnblick .....0·249 sin (192\cdot3+x)+0·167 sin (111\cdot5+2x)
```

Die vorstehende Tabelle und die darauf gegründeten Gleichungen des täglichen Ganges zeigen in sehr instructiver Weise den Übergang der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers von einem Maximum am Morgen bis zu einem Maximum am Nachmittage auf den hohen Gipfelstationen. Die Winkelconstante geht allmälig aus dem ersten Quadranten in den dritten über. Zugleich nimmt die Amplitude zuerst ab und dann wieder zu (dass Peissenberg eine so kleine Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung hat, ist wohl nur eine Zufälligkeit des Mittels von bloss drei Monaten). Für diese Verhältnisse ist der Natur der Sache nach nur die relative Seehöhe massgebend, d. i. die Mächtigkeit der unterhalb der Station befindlichen Luftschichte. Man darf nach den Ergebnissen der baierischen Stationen wohl annehmen, dass in einer relativen Seehöhe von 1300-1400 m die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung im Sommer nahezu verschwunden ist und die Phasenzeiten darüber hinaus in die entgegengesetzten von jenen am Erdboden übergehen. Das hängt aber natürlich nicht bloss von der Mächtigkeit der unterlagernden Luftschichte, sondern auch von der Grösse der täglichen Temperaturschwankung in derselben ab. Wenn die normale einmalige Barometerschwankung am Erdboden nicht genau die entgegengesetzten Phasenzeiten hat von jenen des Temperaturganges in der überlagernden Luftschichte, so wird die Combination derselben mit der rein »thermischen« Barometerschwankung in 1300-1400 m Seehöhe keineswegs die Barometerschwankung daselbst ganz aufheben, sondern es wird eine solche von geringer Amplitude mit zwischenliegenden Phasenzeiten übrigbleiben. Auf solche Verhältnisse scheint die

tägliche Barometerschwankung auf dem Wendelstein hinzudeuten.

Es ist interessant zu bemerken, wie in einer relativen Seehöhe von etwa 1000 m das Vormittagsmaximum des Barometers zwar zur normalen Zeit eintritt, aber ausserordentlich abgeschwächt erscheint.

Die vorstehenden Erörterungen gelten selbstverständlich nur für den Sommer oder für die Zeit, wo die \*thermische \*Druckschwankung in der Höhe am grössten ist. Im Winter reicht die normale einmalige tägliche Barometerschwankung bis zu viel grösseren Höhen hinauf.

Das Nachmittagsminimum und Abendmaximum auf sehr hohen Berggipfeln. Es hat einiges Interesse, sich specieller Rechenschaft darüber zu geben, wie es kommt, dass selbst auf dem Montblanc-Gipfel in nahe 5km Seehöhe das zweite Minimum im täglichen Gange des Barometers noch nicht verschwunden ist, und wesshalb das Abendmaximum des Barometers mit der Höhe zunimmt.

Renou hat die Ansicht ausgesprochen, dass in sehr grosser Höhe der Atmosphäre der tägliche Gang des Barometers bloss ein Maximum um 4<sup>h</sup> Nachmittags und ein Minimum um 4<sup>h</sup> Morgens haben dürfte. Nach den neueren Ergebnissen der Luftdruckregistrirungen auf den hohen Alpengipfeln scheint es mir zweitelhaft geworden zu sein, ob dies für die Tropengegenden mit ihrer grossen doppelten täglichen Barometerschwankung in der Ihat noch angenommen werden darf. Jedenfalls werden aber diese Extreme nach den neueren Erfahrungen näher bei der Stunde 6<sup>h</sup> als 4<sup>h</sup> zu finden sein.

Um diesem Problem etwas näher zu treten, habe ich mir zunächst die Frage vorgelegt: wie müsste der Temperaturgang in der 1700 m mächtigen Luftschichte zwischen Montblancund Sonnblickgipfel beschaffen sein, damit auf ersterem der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Maximum und ein Minimum haben würde?

Zu diesem Zwecke wurde der Gang des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel (Mittel Juli-August von 4 Jahren) auf die

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> De l'oscillation diurne du baromètre par E. Renou. Comptes rendus de l'Acad. d. Sc. 1878, I. Sem., tome 86.

Höhe des Montblanc-Gipfels reducirt (d. h. die Amplituden im Verhältniss von 426:525 mm Luftdruck verkleinert). Man erhält derart

$$0.241 \sin (182^{\circ} + x) + 0.145 \sin (111^{\circ} + 2x);$$

das wäre die Gleichung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, wenn es in der Luftschichte zwischen 3100 m und 4800 m gar keine tägliche Temperaturvariation geben würde. Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende Luftdruckabweichungen für zweistündige Intervalle:

	OP	24	4 h	$\theta_P$	8 հ	10"
	Vormittag					
Einfache Welle	008	128	213	241	<b> · 2</b> 05	113
Doppelte Welle	.136	.022	<b>—</b> ·113	136	022	.113
Summe	.128	106	326	377	227	•000
			Nachn	nittag		
Einfache Welle	.008	.128	.213	.241	.205	•113
Doppelte Welle	•136	.022	113	136	022	.113
Summe	.144	.150	.100	.105	•183	.226

Man sieht zunächst aus dieser kleinen Tabelle, wie das hohe Maximum der Hochstationen am Abende zustande kommt, d. i. durch die Auflagerung des Maximums der doppelten täglichen Oscillation auf einen Theil des Wellenberges der einmaligen täglichen Schwankung. Da die Amplitude der letzteren mit der Höhe zunimmt, die Phasenzeit sich aber dabei fast gleich bleibt, so wächst die Summe beider Wellen für die Stunde 10<sup>h</sup> etwas schneller, als sie beide vermöge der Druckabnahme mit der Höhe kleiner werden; freilich nur bis zu einer gewissen, aber schon sehr grossen Höhe.

Die erste Welle erreicht ihren Scheitelpunkt etwas vor 6<sup>b</sup> Abends, gleichzeitig tritt aber bei der doppelten täglichen Oscillation das Wellenthal ein. Die Superposition der entgegengesetzten Phasen der beiden Wellen erzeugt das späte Nachmittagsminimum auf den hohen Berggipfeln.

Sollte dieses Minimum ausbleiben, so müsste mindestens folgende Ungleichheit bestehen, wenn wir mit x die gesuchte Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung bezeichnen, welche diesen Effect zu erzielen im Stande wäre:

$$x-0.136 > 0.113 + x \sin 30^{\circ}$$
, d. i.  $> 113 + \frac{x}{2}$ ,  
 $x > 272 + 226$ , d. i.  $> 498$ .

Wenn also die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung auf dem Montblanc-Gipfel 0.50 mm wäre, so würde der Gang des Barometers auf demselben nur mehr ein Maximum und ein Minimum zeigen. Der tägliche Gang des Barometers in 4810 m würde dann sein:

Das Abendmaximum würde dann auf 8<sup>h</sup> fallen. Wie man leicht findet, würde eine tägliche Wärmeschwankung von 0°76 in der Luftschichte zwischen 3100 m und 4800 m genügen, um die Amplitude der einmaligen thermischen Druckschwankung auf 0.5 mm zu erhöhen und so den obigen Effect hervorzubringen.

Aus dem correspondirenden täglichen Gange des Barometers auf dem Sonnblick- und Montblanc-Gipfel (16. Juli bis 10. September 1887) findet man für den täglichen Wärmegang in der zwischenliegenden Luftschichte von 1700 m die Gleichung

$$0^{\circ}49 \sin (189^{\circ} + x) + 0^{\circ}23 \sin (354 + 2x).$$

Die einfache tägliche Wärmewelle hat also nur eine Amplitude von  $\frac{1}{2}$ ° statt  $\frac{3}{4}$ ° C., wie sie zur Unterdrückung des secundären Abendminimums nöthig wäre.

Wenn man den früher berechneten täglichen Gang des Barometers auf dem Sonnblickgipfel reducirt auf Montblanchöhe graphisch darstellt und dann durch eine Curve aus freier Hand das Abendminimum unterdrückt und der Curve nur ein Abendmaximum gibt, was sich in der That nur auf eine Weise ungezwungen erzielen lässt, so erhält man auf einem anderen Wege die Ordinaten der einmaligen thermischen Welle, welche den täglichen Barometergang auf dem Montblanc-Gipfel zu einer einfachen Welle gestalten würde. Die Amplitude fällt dann etwas grösser aus und das Abendmaximum verlagert

sich auf  $5^{1}/_{2}^{h}$  p. Die Gleichung dieses Barometerganges wäre:

$$0.599 \sin (191^{\circ} + x) + 0.145^{\circ} \sin (111^{\circ} + 2x)$$
.

Die Amplitude der täglichen Wärmeschwankung in der Luftschichte zwischen Montblanc und Sonnblick müsste dann 1°05 sein, d. i. mehr als zweimal so gross als sie aus dem beobachteten Barometergang in 4800 m zu erschliessen ist, aber immer noch viel kleiner als die Registrirungen der Lufttemperatur auf dem Montblanc-Gipfel ergeben haben.

Unterdrückt man in der von Herrn Vallot mitgetheilten Curve des täglichen Barometerganges auf dem Montblanc das kleine secundäre Abendminimum durch freie Ergänzung der Curve, die sich auch ganz ungezwungen ergibt, so erhält man ein Maximum um 6<sup>h</sup> p. etwa mit der Ordinate + 0·50 und ein Minimum um 6<sup>l</sup>/<sub>2</sub><sup>h</sup> Morgens mit — 0·60. Diese Curve stellt aber keinen reellen Barometergang mehr vor, weil die doppelte tägliche Oscillation fast völlig aufgehoben erscheint, was ganz unnatürlich wäre. Der vorhin eingeschlagene Weg zur Kenntniss der Bedingungen zu gelangen, unter denen auf dem Montblanc-Gipfel der tägliche Barometergang nur ein Maximum und ein Minimum haben würde, ist desshalb der richtigere.

Die Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel durch Herrn Vallot beweisen abermals, dass die tägliche Temperaturschwankung in den freien höheren Schichten der Atmosphäre viel kleiner ist, als man sie auf Grund der directen Beobachtungen annehmen müsste. Es scheint mir, dass die Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln gerade dadurch ein besonderes Interesse erlangen, dass sie uns gestatten, Schlüsse auf die tägliche Temperaturvariation in den freien atmosphärischen Luftschichten zu ziehen, die auf einem anderen Wege kaum zu erzielen wären. Um die Anwendbarkeit meiner Methode der Berechnung des täglichen Wärmeganges in der freien Atmosphäre aus dem täglichen Gange des Barometers auf Berggipfel zu zeigen, habe ich für einige Höhenschichten

<sup>1</sup> Die Gleichung dieser Curve ist:

 $<sup>0.543 \</sup>sin (205^{\circ} + x) + 0.048 \sin (128^{\circ}2 + 2x)$ .

den täglichen Wärmegang aus dem Barometergang passend gewählter Gipfelstationen berechnet, wozu mir namentlich als Mittelglieder die bairischen Stationen besonders dienlich waren. Dieselben gestatten die Abnahme der Amplituden der täglichen Temperaturvariation mit der Höhe in der freien Atmosphäre aufs Deutlichste vor Augen zu führen. Ich halte die nachfolgenden Rechnungsergebnisse mehr nur als Proben für die Anwendbarkeit der Methode als für irgend definitive oder absolute Werthe. Um solche zu erhalten, müssten erstlich gleichzeitige Registrirungen verwendet werden, und dann müssten noch manche Fehlerquellen eliminirt werden, die den jetzigen Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln und deren Reductionen noch anhaften und die sich störend erweisen, wo, wie im vorliegenden Falle, äusserste Genauigkeit erforderlich erscheint.<sup>1</sup>

Die Berechnung des Temperaturganges in der verticalen Luftschichte zwischen zwei Stationen verschiedener Seehöhe aus dem bekannten täglichen Gange des Barometers an denselben wurde in folgender Weise geführt.

Z. B. München. Luftdruck 716·8, Temperatur 16·7, Seehöhe 526·4. Hohenpeissenberg. Luftdruck 678·4, Temperatur 14·9, Seehöhe 993·9.  $\Delta h = 467\cdot5$ ;  $678\cdot4:716\cdot8 = 0.946$ ; Factor zur Reduction der Druckschwankungen auf Temperaturschwankung in der zwischenliegenden · Luftschichte, d. i. der Quotient.  $RT^2:b\ \Delta h = 7\cdot44$  (wobei  $T_0$ , um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen = 263° oder  $\alpha = 0.0038$  und R dementsprechend =  $30\cdot37$  gesetzt wurde; bei Temperaturen unter Null wurde T = 273 und  $R = 29\cdot3$  gesetzt).

Bezeichnet man ferner, wie schon früher, die Coëfficienten der harmonischen Reihen mit  $p_1$   $q_1$ ;  $p_2$   $q_2$ , so steht die Rechnung wie folgt:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wenn Herr Richard seinen registrirenden Aneroiden (grosses Modell) eine Temperaturregistrirung (auf demselben Papierblatte) beigeben würde, was leicht ausführbar wäre und den Preis der Instrumente nur wenig erhöhen dürfte, so würde der tägliche Gang des Luftdruckes mittelst derselben mit viel grösserer Sicherheit abgeleitet werden können.

Täglicher Gang des Barometers (Sommer 1892).

Gleichung der thermischen Druckschwankung somit:

$$0.222 \sin (183.9+x) + 0.044 \sin (17.2+x)$$
.

Daraus folgt durch Multiplication der Coëfficienten mit 7.44 als Gleichung der täglichen Temperaturvariation in der Luftschichte zwischen München und Hohenpeissenberg:

$$1.66 \sin (183.9 + x) + 0.33 \sin (17.2 + 2x)$$
.

In analoger Weise wurden auch die nachfolgenden Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten. Jene für das Höhenintervall Paris—Eiffelthurm ist aus den Beobachtungen im Sommer 1890 abgeleitet worden. Als beiläufige mittlere Seehöhe der Luftschichte, für welche die angegebene tägliche Temperaturvariation gilt, ist die mittlere relative Höhe (über dem Erdboden) derselben eingestellt. Z. B. Peissenberg hat circa 470 m relative Höhe, Wendelstein 1200 m; die Luftschichte zwischen den Stationen hat demnach circa 840 m relative Höhe; München—Peissenberg 240 m etc.

Stationspaare	Relative Höhe der Luftschichte	Gleichung des täglichen Wärmeganges in derselben im Sommer
Paris - Eiffelthurm	. 140 <i>m</i>	$2.16 \sin (207^{\circ} + x) + 0.45 \sin (54 + 2x)$
München-Peissenberg.	. 240	$1.66 \sin (184 + x) + 0.33 \sin (17 + 2x)$
Munchen-Wendelstein1	. 630	$1.10 \sin (197 + x) + 0.18 \sin (13 + 2x)$
Peissenberg-Hirschberg	. 730	$1.06 \sin (166 + x) + 0.31 \sin (243 + 2x)$
Peissenberg - Wendelst.	. 840	$0.87 \sin (192 + x) + 0.01 \sin (270 + 2x)$
Schafberg $^2$ —Sonnblick.	. 2000	$0.72 \sin (174 + x) + 0.12 \sin (18 + 2x)$
Santis-Montblanc	. 3200	$0.52 \sin (204 + x) + 0.19 \sin (5 + 2x)$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> München, Salzburg, als untere Station genommen und verglichen mit Wendelstein Schafberg.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Mittel aus Schafberg und Obir.

Ich habe auch versucht, die mittlere Temperaturvariation in der ganzen Luftschichte zwischen dem Montblanc-Gipfel und der Erdoberfläche zu berechnen. Als untere Stationen nahm ich Genf einerseits, Mailand und Turin anderseits. Auf diese Weise erhielt ich folgenden täglichen Temperaturgang in der circa 4400 m mächtigen Luftschichte:

$$0^{\circ}98 \sin (203^{\circ} + x) + 0.17 \sin (15^{\circ} + 2x)$$
.

Das Resultat stimmt sehr gut mit dem partiell berechneten täglichen Wärmegang in den einzelnen Höhenstufen.<sup>2</sup>

Die Amplitude der aus dem täglichen Barometergange auf den Gipfelstationen von verschiedener Seehöhe berechneten täglichen Temperaturvariation nimmt demnach mit der Höhe ziemlich regelmässig ab, wie es sein muss, wenn dem Rechnungsergebnisse eine reelle Bedeutung zugesprochen werden soll.

Die Winkelconstante des ersten massgebenden Gliedes ist im Mittel der ersten drei Stationen 196°, im Mittel der drei letzten 190°, also so gut wie übereinstimmend für alle See-

$$0.45 \sin (357^{\circ} + x) + 0.33 \sin (144^{\circ} 4 + 2x)$$

<sup>1</sup> Der tägliche Barometergang im Mittel dieser Stationen ist:

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Das seitliche Ausweichen der Luft bei der thermischen Ausdehnung der Lust in den Thälern kann bewirken, dass auf den umgebenden Berghöhen die Drucksteigerung am Nachmittage nicht mit dem vollen Betrage, d. i. der Temperaturamplitude entsprechend, zur Geltung kommt. Der mögliche Maximaleffect dieser Abstumpfung der täglichen thermischen Druckvariation auf den Berggipfeln lässt sich aber leicht beurtheilen aus der abnormen Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung in den Thälern unten. Nehmen wir z B. an, dieselbe betrüge zu Chamonix und Courmayeur 1.0 mm statt 0.45 mm wie draussen im Vorlande der Alpen. Die Differenz 0.55 mm kommt auf Rechnung des seitlichen Absliessens der Lust gegen die geneigten Bergabhänge. Für den Montblanc-Gipfel könnte dies eine Verringerung der thermischen Druckschwankung um 0.32 bewirken und die Amplitude derselben könnte deshalb, wenn der Montblanc auf einer freien Ebene liegen würde, 0.75 statt wie jetzt 0.43 betragen. Hätten wir oben Chamonix und Courmayeur als untere Stationen gewählt, so würden wir die Temperaturamplitude 1.73 statt 0.98 gefunden haben, unter der gegebenen Voraussetzung. Auf die Berechnung der Temperaturamplituden in den Lustschichten zwischen Gipselstationen hat diese Bemerkung keine Geltung.

höhen.¹ Nehmen wir 195° rund im Mittel, so würde in den freien Luftschichten der Hauptsache nach (im Sommer) das Temperatur-Minimum um 5<sup>h</sup> Morgens und das Maximum um 5<sup>h</sup> Abends eintreten, was durchaus nicht unwahrscheinlich ist. Die Winkelconstante des zweiten Gliedes liegt, wie bei dem Temperaturgang an der Erdoberfläche, im ersten Quadranten. Man erhält also aus den Unterschieden des täglichen Barometerganges an den Gipfelstationen verschiedener Seehöhe einen täglichen Temperaturgang, welcher grosse Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Theoretisch besteht kein Zweifel darüber, dass so lange man die barometrische Höhenformel anwenden darf, man auch aus den Druckunterschieden in den verschiedenen Niveaux die Temperatur der zwischen liegenden Luftschichte berechnen kann. Da zur Ableitung der Temperaturvariationen in denselben die Kenntniss der Barometercorrectionen und die genaue Seehöhe der Stationen nicht erforderlich ist, so kann selbe mit grosser Genauigkeit erfolgen, wenn die Registrirbarometer die Druckvariationen genau liefern. Da auf den täglichen Gang des Wasserdampfgehaltes der Luft nur angenähert Rücksicht genommen werden konnte, so kann derselbe noch einigen Einfluss auf die obigen Rechnungsresultate haben, der aber gewiss sehr geringfügig sein dürfte.

Wenn wir auch durch mancherlei Erfahrungen darauf vorbereitet sein müssen, dass die Amplituden der täglichen Temperaturvariation in der freien Atmosphäre viel kleiner sein werden, als sie sich aus den Beobachtungen an festen Stationen an der Erdoberfläche und auf Berggipfeln direct ergeben, so sind doch die überraschend kleinen täglichen Temperaturschwankungen, wie sie sich aus den Luftdruckschwankungen berechnen lassen, geeignet, stutzig zu machen und Bedenken gegen deren Richtigkeit einzuflössen.

Solche Bedenken hat jüngst Herr A. Angot geäussert in einer kurzen Discussion jener Registrirungen des Luft-

<sup>&#</sup>x27; Peissenberg—Hirschberg bleibt am besten unberücksichtigt, da Hirschberg Eigenthümlichkeiten zeigt, wie sie vielleicht nur den Stationen an Bergabhängen zukommen.

druckes auf dem Montblanc-Gipfel, die wir vorhin auch benutzt haben.<sup>1</sup>

Aus den dreistündigen Temperaturbeobachtungen auf dem Montblanc, zu Bern, Genf und Lyon leitet er für die tägliche Temperaturvariation in der zwischenliegenden Luftschichte die Gleichung ab:

$$\Delta T = 3^{\circ}11 \sin(230^{\circ} + x) + 0.32 \sin(69^{\circ} + 2x).$$

Daraus ergibt sich, wie er bemerkt, als Luftdruckvariation auf dem Montblanc-Gipfel:

$$2.55 \sin (230^{\circ} + x) + 0.26 \sin (69^{\circ} + 2x)$$
.

Die wirklich beobachtete Druckvariation bleibt nun, wie wir bereits wissen, weit hinter dieser berechneten Variation zurück, was wir eben dadurch erklären, dass die beobachteten täglichen Temperaturvariationen viel zu gross sind.<sup>2</sup> Herr Angot glaubt das nicht gelten lassen zu dürfen, indem er das arithmetische Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation für die zwischenliegende Luftschicht als giltig annehmen zu müssen vermeint.

Täglicher Temperaturgang:

	$p_1$	$q_1$	$p_2$	$q_2$
Genf 407 m	-3.88	-3:31	+0.57	+0.01
Chamonix—Grands Mulets				
2020 m	-4.05	-1.93	+1.06	+0.18
Montblanc 4807 m	<b>-1·78</b>	-0.44	+0.40	+0.05
Mittel	-3.24	—1·89	+0.68	+0.07

Daraus folgt als Gleichung des täglichen Wärmeganges in der Luftschichte von  $4400\,m$  Mächtigkeit

$$\Delta T = 3.75 \sin (239.8 + x) + 0.68 \sin (84.1 + 2x)$$

welche natürlich eine noch grössere Druckvariation auf dem Montblanc ergeben würde.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Sur la variation diurne de la pression au sommet du mont Blanc. Comptes rendus. 11. déc. 1893. Tome CXVII, p. 847.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ein, soweit man den directen Beobachtungen folgen darf, genauerer Ausdruck für die tägliche Temperaturvariation zwischen Montblanc-Gipfel und dem Niveau von Genf wäre folgender:

Um aber dem Widerspruch mit den daraus folgenden grossen Druckvariationen auf den Berggipfeln zu begegnen, glaubt Herr Angot annehmen zu können, dass in Folge der Erwärmung Luft seitlich absliesst, wodurch dann die Druckvariationen auf den Bergen kleiner werden. Er sagt »Eine andere Erklärung der Widersprüche« (als die meine) »zwischen Rechnung und Beobachtung scheint einfacher. Man hat für die Rechnung angenommen, dass die Luft wie in einem verticalen Cylinder sich ausdehnt, ohne seitliche Bewegung. Aber in dem Masse, als die Luft sich in einer Gegend ausdehnt, sliesst sie wahrscheinlich seitlich nach minder erwärmten Gegenden ab, so dass nicht die ganze Luftmasse emporsteigt, die in Rechnung gestellt wird; der wirkliche Effect wird daher auch nur ein Bruchtheil des berechneten Effectes sein.«

Auf den ersten Eindruck hin könnte Manchem diese Erklärung zureichend scheinen, darum ist es wohl nöthig, darauf aufmerksam zu machen, dass sie physikalisch nicht haltbar ist und auf einem Übersehen oder auf einem Missverständniss beruht. Ob Luft horizontal zufliesst oder abfliesst hat auf die Giltigkeit meiner Berechnungen der Temperaturvariationen aus den Druckvariationen keinen Einfluss. Wenn durch ein Abfliessen der Luft der Druck unten (Barometerstand B) um  $\Delta B$  sinkt, so sinkt er auch oben (Barometerstand b) um  $\Delta B \times (b:B)$  und die Druckdifferenz beider Stationen bleibt wie früher nur eine Function der Temperatur (und des Wasserdampfgehaltes) der zwischenliegenden Luftschichte. Durch ein Abfliessen der erwärmten Luft kann man demnach die aus der Rechnung sich ergebenden kleinen Temperaturamplituden nicht erklären.

Übrigens ist ein solches tägliches periodisches Absliessen und Zusliessen der Luft in dem Masse, dass dadurch tägliche Druckschwankungen von 4 mm in 4800 m Seehöhe entstehen, respective unterdrückt werden, im höchsten Grade unwahrscheinlich und widerspricht allen Beobachtungen. Man müsste ja doch an den Orten, wohin die Luft absliesst, eine entsprechend grosse Druckzunahme am Nachmittage (bis zu 3½ mm) beobachten können in Form einer totalen Umkehrung des täglichen Barometerganges. Davon ist aber nirgend wo etwas zu bemerken.

Man kann leicht berechnen, welchen Effect das von Herrn Angot angenommene tägliche Abfliessen der Luft (am Nachmittage und Wiederzuströmen bei Nacht) in der Umgebung des Montblanc auf den täglichen Barometergang zu Genf haben müsste.

Die von Herrn Angot aufgestellte tägliche Barometervariation auf dem Montblanc-Gipfel ergibt:

	$p_1$	$q_1$	$p_2$	$q_2$
Thermische Druckschwankung auf	i		•	
dem Montblanc	1.954	-1:639	+0.243	+0.093
Beobachtete Druckschwankung	0.267	-0.336	+0.150	-0.020
-				
Differenz	<u>-1.687</u>	-1.303	+0.093	+0.113
Reducirt auf Genf (728: 426)	2.879	$-2 \cdot 224$	+0.159	+0.193

Der Ausdruck für die periodische tägliche Abnahme und Zunahme des Druckes, welche nöthig wäre, um die durch die beobachteten täglichen Temperaturamplituden hervorgerufenen Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel bis zu der beobachteten Grösse herabzumindern, wäre demnach:

Tägliche Druckschwankung in Genf in Folge des vorausgesetzten periodischen Abfliessens und Zuströmens der Luft

$$3.64 \sin (232.3+x) + 0.25 \sin (39.5+2x)$$
.

Es würde also in Genf eine tägliche Druckvariation von mindestens 7 mm nöthig sein, um die Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel auf die beobachtete Amplitude herabzudrücken, wenn die tägliche Variation der Lufttemperatur in der That dem arithmetischen Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation gleich wäre.

Durch die Annahme eines periodischen Abströmens und Zusliessens der Luft kann man desshalb die beobachteten geringen thermischen Druckschwankungen auf den Berggipfeln nicht verträglich machen mit den beobachteten Temperaturschwankungen, wenn man selbe für die freie Atmosphäre gelten lassen will. Dass die von mir für letztere berechneten Temperaturvariationen nicht völlig richtig sein werden, gebe ich gerne zu und habe auch schon auf eine der Ursachen hin-

gewiesen,¹ welche die täglichen Druckvariationen auf Berggipfeln von jenen der freien Atmosphäre etwas abweichend gestalten mögen.

Nur Stationen wie jene auf dem Eiffelthurm sind von jedem derartigen Einwurfe frei, denn die von Herrn Teisseren c de Bort angenommenen dynamischen Druckschwankungen scheinen mir, wenigstens in dem angenommenen Betrage, vorläufig noch höchst unwahrscheinlich zu sein. Sollte die tägliche Windperiode in Folge der saugenden Wirkung des Windes auf den täglichen Barometergang einen merklichen Einfluss haben, so würde derselbe, da ja das Maximum der Windstärke in der Höhe auf die Nachtstunden fällt, dem Sinne nach mit der thermischen Druckschwankung übereinstimmen, sich zu selber addiren und die aus dem Luftdrucke berechneten Temperaturamplituden noch vergrössern, statt sie zu verkleinern. Und doch weist selbst auf dem Eiffelthurm die tägliche Barometerschwankung auf eine tägliche Temperaturamplitude der unterhalb liegenden Luftschichte von kaum 2°2 hin, während selbe nach den Thermometerständen unten und oben 3°3 sein würde.2

Die Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel stehen also in vollkommener Übereinstimmung mit jenen auf anderen Gipfelstationen und auch jenen auf dem Eiffelthurm, indem sie dafür sprechen, dass in den höheren Schichten der freien Atmosphäre die tägliche Wärmeschwankung viel kleiner ist, als die directen Temperaturmessungen sie zu ergeben scheinen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Weitere Untersuchungen über die t\u00e4gliche Oscillation des Barometers. Denkschriften Bd. LIX.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Täglicher Temperaturgang zwischen Eiffelthurm und Paris (\( \Delta h 279 m \):

Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen

von

#### Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

Die beiden Salzlösungen im Daniell-Elemente beeinflussen dasselbe bekanntlich in einer Weise, dass die Vergrösserung der Concentration des ZnSO<sub>4</sub> mit einer Abnahme, die des CuSO<sub>4</sub> hingegen mit einer Zunahme der elektromotorischen Kraft verbunden ist. In den einschlägigen Arbeiten von Kittler¹ und G. Meyer² sind die Concentrationen der Lösungen aus ihren specifischen Gewichten oder nach Gewichtsprocenten bestimmt worden.

Mit Rücksicht auf den Entwicklungsgang der Elektrochemie erscheint es von Bedeutung, die Lösungen so herzustellen, dass sie in molecular einfachen Verhältnissen stehen. Derartige Versuche an Elementen, welche aus zwei Metallen in den entsprechenden Salzlösungen bestanden, sind von A. Wright und C. Thompson<sup>3</sup> angestellt worden; das Daniell-Element war mit äquimolecularen Lösungen von Zink- und Kupfersulfat nach dem Schema  $mMSO_a.100H_{\bullet}O$  beschickt worden;

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Kittler, Wied. Ann., 17, S. 894, 1882.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> G. Meyer, Wied. Ann., 33, S. 277, 1888.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> A. Wright und C. Thompson, Phil. Mag., V, S. 19, p. 17 und 209, 1885.

dabei wurde m innerhalb der Grenzen von 0.1 bis 2.25 verändert. Es ergab sich eine von m unabhängige elektromotorische Kraft von 1.114 Volt. Löst man also je ein Gramm-Molekül der beiden wasserfreien Salze in gleichen Mengen Wasser auf, so bleibt die elektromotorische Kraft constant, wenn die Verdünnung von 0.8 l bis 18 l fortschreitet.

Zweck der vorliegenden Mittheilung ist der Nachweis, dass dieser Satz in weitem Umfange besteht und nicht nur für äquimoleculare Lösungen gilt, sondern auch dann, wenn das Verhältniss des Salzgehaltes derselben einen beliebigen constanten Werth besitzt.

Das Element bestand aus einem kleinen Becherglase, welches einen Kupferstreifen und eine Thonzelle enthielt; in die letztere wurde ein Stäbchen von amalgamirtem Zink gesenkt. Durch Auflösen eines Gramm-Moleküls ZnSO<sub>4</sub>, beziehungsweise CuSO<sub>4</sub> in je einem Liter Wasser, die Krystallwasser eingerechnet, wurden zweifach normale Lösungen hergestellt, welche beliebigen Verdünnungen unterworfen werden konnten. Die Salze waren als chemisch rein bezogen.

Zu den Messungen diente ein tadellos functionirendes Quadrantenelektrometer. Es wurden regelmässig die ersten Ausschläge nach beiden Seiten der Ruhelage beobachtet. Ein Normal-Clark-Element rief einen solchen von 160 mm an einer über 300 cm vom Spiegel des Instrumentes entfernt aufgestellten Scala hervor. Zehntel eines Millimeters konnten noch mit Sicherheit geschätzt werden.

Selbstverständlich wurde auf das Reinigen der verwendeten Gefässe und der Metalle besondere Aufmerksamkeit gerichtet; zudem gebrauchte man die Vorsicht, das Element mit den neuen Lösungen gefüllt durch einige Minuten zunächst sich selbst zu überlassen, dann jene abzuhebern und durch gleichartige zu ersetzen. Dann erst wurden die Bestimmungen vorgenommen.

Bezeichnet man die Combination durch

$$Zn|ZnSO_4+m$$
 aqua  $|CuSO_4+n$  aqua  $|Cu$ ,

wobei m und n in Litern ausgedrückt werden, so ergeben sich nachstehende Resultate:

1. 
$$\frac{m}{n} = 1$$
. (Äquimoleculare Lösungen.)  
 $m = E_1 = m = E_1$   
1. 1.114 V. 16 1.114 V.  
2. 1.114 32 1.114  
4. 1.113 64 1.112  
8. 1.114 128 1.107

Die Zahlen stehen in vollständiger Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Wright und Thompson. Innerhalb des Intervalles von m=1 bis 64 ist E. K. vollkommen constant und ergibt einen Mittelwerth  $E_1=1\cdot 1136$  V. Über diese Verdünnungsgrenze hinaus nimmt  $E_1$  ab.

256

1.099

Eine Veränderung der elektromotorischen Kraft ist hier auch bei grossen Verdünnungen nicht aufgetreten. Der Mittelwerth  $E_2$  beträgt 1·1061 V.

3. 
$$\frac{m}{n} = 8$$
.  
8 1.099 V. 64 1.098 V.  
16 1.098 128 1.099  
32 1.097 256 1.101

Für n = 8 bis 128 ist im Mittel  $E_8 = 1.0982$  V.

$$4. \quad \frac{m}{n} = 32.$$

$$n \quad E_{32} \quad n \quad E_{32}$$

$$32 \quad 1.092 \text{ V.} \quad 256 \quad 1.093$$

$$64 \quad 1.091 \quad 512 \quad 1.095$$

$$128 \quad 1.091$$

Mittel für n = 32 bis 256,  $E_{32} = 1.0917$  V.

Es sei hervorgehoben, dass die Werthe für E bei grossen Verdünnungen des Kupfervitriols sich einem Grenzwerthe nähern, welcher bei 1·100 V. gelegen ist.

Bei den unter 2., 3. und 4. mitgetheilten Beobachtungen stand einer concentrirteren Zinklösung eine verdünntere Kupferlösung gegenüber. Verfährt man in entgegengesetzter Weise, so ergibt sich:

5. 
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$
.

 $\frac{m}{2} = \frac{E_{1/2}}{1.119} = \frac{m}{64} = \frac{E_{1/2}}{1.118}$ 

8 1.120 128 1.100

16 1.120

Mittel  $E_{1/2} = 1.1193$  von m = 2 bis 64.

6. 
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$$
  
8 1·129 V. 64 1·125 V.  
16 1·128 128 1·124  
32 1·124 256 1·115

Mittel  $E_{1/2} = 1.1260 \text{ V. für } m = 8 \text{ bis } m = 128.$ 

7. 
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{32}$$
  
 $\frac{m}{32}$   $\frac{E_{1/sz}}{1.143}$  V.  $\frac{m}{128}$   $\frac{E_{1/sz}}{1.136}$  V.  $\frac{1}{64}$   $\frac{1}{141}$   $\frac{1}{256}$   $\frac{1}{130}$ 

Mittel  $E_{1/12} = 1.1425 \text{ V. für } m = 32 \text{ und } m = 64.$ 

Aus den mitgetheilten Zahlen folgt:

Die elektromotorische Kraft des Daniell-Elementes hängt nur von dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen ab; sie ist mithin unabhängig von der Stärke der Einzelconcentrationen. Nach F. Kohlrausch<sup>1</sup> besitzt das moleculare Leitungsvermögen der beiden Salzlösungen in der gleichen beliebigen Verdünnung fast denselben Werth. Der von Arrhenius<sup>2</sup> eingeführte Activitätscoëfficient ist somit für beide Sulfate von gleicher Grösse, und weiters haben die Zink- und Kupferjonen dieselbe Wanderungszahl. Für die elektromotorische Kraft eines Elementes, dessen Metalle zweiwerthig sind und dessen Lösungen die bezeichneten Bedingungen erfüllen, hat Nernst<sup>3</sup> die Gleichung abgeleitet:

$$E = \frac{p_0}{2} \left( \log n \frac{P_1 p_2}{P_2 p_1} + \frac{u - v}{u + v} \log n \frac{p_1}{p_2} \right) + A.$$

Darin bedeuten  $P_1$  und  $P_2$  die elektrolytischen Lösungstensionen der Metalle Zn und Cu,  $p_1$  und  $p_2$  die Diffusionstensionen (osmotischen Drucke) der entsprechenden Salzlösungen; ferner stellt u die gemeinsame Beweglichkeit der Cu- und Zn-Jonen und v diejenige des gemeinsamen Jons  $SO_4$  der beiden Lösungen dar. Endlich bezeichnet  $p_0$  die elektrolytische Gasconstante multiplicirt mit der absoluten Temperatur, bei welcher E beobachtet wurde, und A eine etwaige bei Berührung der Elektroden hervorgerufene Potentialdifferenz.

Das Verhältniss der Diffusionsdrucke  $\frac{p_1}{p_2}$  entspricht der Zahl  $\frac{m}{n}$  in den vorliegenden Beobachtungen; die Unabhängigkeit der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes von der Stärke der Einzelconcentrationen seiner Lösungen ergibt sich daher als eine erste Consequenz der Nernst'schen Theorie.

Die für die verschiedenen  $\frac{m}{n}$  gefundenen Werthe von E lassen sich jedoch auch unter einander in Beziehung bringen durch eine Gleichung

$$E = A - B \log \left(\frac{m}{n}\right).$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> F. Kohlrausch, Wied. Ann., 26, S. 196, 1885.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Arrhenius, Ostw. Zeitschr., 1, S. 633, 1887.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Nernst, Ostw. Zeitschr., 4, S. 179, 1889.

Die Rechnung ergibt für den Coëfficienten A den Werth 1·1139 V., für B = 0·0177 V. Der Grad der Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen wird aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

	$m{E}$ beob.	E ber.	Δ
$\frac{m}{n}=1$	1·1136 V.	1·1139 V.	-0.0003
. 2	1 · 1061	1 · 1086	-0.0025
8	1.0982	1.0979	+0.0003
32	1.0917	1.0873	+0.0044
$\frac{1}{2}$	1 · 1193	1 · 1192	+0.0001
1/8	1 · 1260	1 · 1299	-0.0039
$\frac{1}{32}$	1 · 1425	1 · 1405	+0.0020

Für zwei Einzelbestimmungen, bei welchen  $\frac{m}{n}$  die Werthe 4, beziehungsweise  $\frac{1}{4}$  besass, ergaben sich:

m
 E beob.
 E ber.
 
$$\Delta$$

 4
 1.1050 V.
 1.1032 V.
  $+0.0018$ 
 $\frac{1}{4}$ 
 1.1257
 1.1246
  $+0.0011$ 

Man überzeugt sich nun leicht, dass den beiden Coëfficienten A und B nach Nernst folgende Bedeutung zukommen muss:

$$A = \frac{p_0}{2} \cdot \log \frac{P_1}{P_2} + A, \quad B = p_0 \frac{u}{u + v} \cdot \frac{1}{\log e}$$

Für  $p_0$  ist  $0.860.T.10^{-4}$  einzusetzen; da die Beobachtungen von E bei 18° C. erfolgten, ergibt sich  $p_0$  zu 0.0250. Die gemeinsame Wanderungszahl für die Zn- und Cu-Jonen,

$$\frac{u}{u+v}$$
, wurde von Hittorf zu 0.360 bestimmt. Daraus folgt

$$B = 0.0207 \text{ V}.$$

Mit Rücksicht auf die mannigfachen Schwierigkeiten, welche sich aus der Natur der Theorie¹ ergeben, weiters mit Rücksicht auf die Thatsache, dass der Grad der Dissociation bei den angewendeten Lösungen ein mässiger ist, wird man die Übereinstimmung mit dem durch den Versuch gefundenen Werth B=0.0177 als genügend bezeichnen können.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Nernst, a. a. O., 144, 145.

#### III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das k. k. Ackerbau-Ministerium übermittelt ein Exemplar des von demselben veröffentlichten Werkes: »Geologischbergmännische Karten mit Profilen von Idria nebst Bildern von den Quecksilber-Lagerstätten in Idria.«

Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Friedrich Czapek, betitelt: \*Zur Kenntniss des Milchsaftsystems der Convolvulaceen«.

Herr Dr. Stanislaus Klemensiewicz, Professor am k. k. Gymnasium in Rzeszow, übersendet eine Abhandlung: »Beiträge zur geographischen Verbreitung der Schmetterlinge in Galizien.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Abhandlung des Herrn Carl Grafen Attems in Wien, betitelt:
Die Copulationsfüsse der Polydesmiden.«

Ferner überreicht Herr Hofrath Claus eine Arbeit des Herrn A. König in Wien, unter dem Titel: \*Hemispeiropsis comatulae, eine neue Gattung der Urceolariden.\*

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht den Bericht über die im vorigen Jahre in Gemeinschaft mit Herrn Hauptmann A. Schindler im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführte »Trigonometrische Höhenbestimmung des hohen Sonnblick, in der Goldberggruppe der hohen Tauern«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn Prof. Dr. E. Kobald in Leoben über eine »Verallgemeinerung eines Appel'schen Satzes aus der Theorie der Wärmeleitung«.

Das c. M. Herr Prof. K. Grobben in Wien überreicht eine Abhandlung: »Zur Kenntniss der Morphologie, der Verwandtschaftsverhältnisse und des Systems der Mollusken.«

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über ein isomeres Jodmethyl-Brucin.«

Herr Dr. Gustav Jäger in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne«.

## Die trigonometrische Höhenbestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern

von

Oberst A. v. Obermayer, c. M. k. Akad.

und

Hauptmann Anton Schindler.

Da der Sonnblickgipfel kein Hauptpunkt des Triangulirungsnetzes ist, so liegt auch keine hinreichend genaue Bestimmung seiner Höhe auf trigonometrischem Wege vor.

Die Höhenangaben differiren sehr erheblich. In der vom k. und k. Militärgeographischen Institute herausgegebenen Original-Aufnahmssection im Massstabe 1:25.000 vom Jahre 1871 findet sich für den Sonnblick die Höhencôte 3090 m; in der Specialkarte im Massstabe 1:750.000 die Höhencôte 3103 m angegeben.

Bei der Unsicherheit, welche den umliegenden von der trigonometrischen Triangulirung des Katasters aus den DreissigerJahren dieses Jahrhunderts herrührenden Punkten anhaftet, sind solche abweichende Angaben nicht zu verwundern.

Durch den Bestand des Observatoriums auf dem Sonnblick wurde es Herrn Hofrath Hann möglich (1891), aus correspondirenden, corrigirten Luftdruckmitteln nach der barohypsometrischen Formel, aus den Beobachtungen der vier Jahrgänge 1887—1890 die Höhe des Sonnblickgipfels zu berechnen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. C, April 1891, S. 451.

Es wurden so aus den unten angeführten Vergleichsstationen, von denen Ischl—Lienz an das Präcisionsnivellement angeschlossen sind, gefunden:

Vergleichsstation	Seehöhe	Höhendifferenz	Sonnblick- gipfel
Schafberggipfel	1776 · 1	1327.0	3103 · 1
Obir	2044	1064.7	3108.7
Säntis	2464	645.5	3109.9
Ischl—Lienz	$573 \cdot 2$	2531 · 2	3104 · 4

Wird aus den so berechneten Höhen des Sonnblickgipfels das Mittel genommen, so ergibt sich für diese Höhe:

$$3106.5 \pm 1.6 m$$

bis zum Gefäss des in der Gelehrtenstube aufgehangenen Fortin'schen Barometers. Dasselbe dürfte sich nach ungefährer Schätzung 60 cm über dem äusseren Boden befinden.

Bei der Bedeutung, welche der genauen Kenntniss der Höhe des Sonnblicks zukommt, hat die kaiserliche Akademie der Wissenschaften Einen von uns aufgefordert, eine trigonometrische Höhenbestimmung auszuführen.

Überdies wurden vom Sonnblick-Verein die Kosten des Transportes der Instrumente, der Führer etc. mit einem Betrage von circa 60 fl. bestritten.

Zu dem Zwecke der soliden Aufstellung der Instrumente wurde Peter Lechner der Auftrag ertheilt, zwei Pfeiler in Stein in einer Höhe von etwa 1·1 m mit möglichst ebenen oberen Platten aufzumauern. Peter Lechner hat die Aufstellungsorte der Pfeiler so gut gewählt, dass dieselben nicht nur gegenseitig sichtbar sind, sondern auch jeder für sich die grösstmöglichste Rundsicht gewähren. Allerdings hat dies eine Regulirung der Ostseite des Gipfels nöthig gemacht.

Die Kosten der Bauführung, die sich aus dem letzteren Grunde auf etwa 47 fl. stellten, hat auch der Sonnblick-Verein getragen und dadurch einem, bei wissenschaftlichen Specialuntersuchungen sehr fühlbaren Bedürfnisse Rechnung getragen.

Die Pfeiler, nach ihrer Lage Ost- und Westpfeiler genannt, sind auf ihren Platten, die gerade nicht sehr eben ausfielen, mit eingemeisselten Kreuzen versehen und dadurch der Aufstellungsort der Instrumente bezeichnet worden.

Die Distanz zwischen den so festgelegten Mitten der Pfeiler wurde mittelst Latten gemessen und gleich  $36.81 \pm 0.02 \, m$  gefunden.

Der Höhenunterschied der Platten wurde allerdings nicht mit genügender Sicherheit gemessen. Die Platte des Westpfeilers dürfte nahe 0·19 m höher sein, als jene des Ostpfeilers. Die Höhe der Platte des Westpfeilers über dem Erdboden ist 1·14 m, jene der Platte des Ostpfeilers 1·12 m.

Eine Beobachtungsreihe wurde anfangs Juli von uns beiden angestellt. Dieselbe umfasst die eben angeführten Messungen, die Bestimmung der Horizontalwinkel zwischen einer Reihe von Punkten und die Bestimmung der Höhenwinkel dieser Punkte. Das Wetter war um diese Zeit ziemlich veränderlich. Die ersten Tage waren zum Theil trüb und vergingen mit der Rectification des Instrumentes. Am 4. Juli Vormittag konnte gemessen werden. Am 5. Juli war es vollständig rein, am 6. Juli war Nebel, am 7. war es rein, am 8. theilweise rein, am 9. vollkommen rein, am 10. war Nebel, am 11. war es zum Theil rein, dann folgte ein Wetterumschlag.

Eine zweite Beobachtungsreihe wurde von Einem von uns, Hauptmann A. Schindler, in der Zeit vom 14. bis 17. September ausgeführt und dabei ausschliesslich Höhenwinkel gemessen. Das Wetter war um diese Zeit beständig.

Von den sichtbaren und bezeichneten Punkten haben wir in die Messung einbezogen: den Grossglockner mit Pyramide, 3798·4 m; den Unholden mit grossem Steinmandl auf dem einen Gipfel, 2870 m; das Böse Weibl mit Steinmandl, 3110 m; den Sandkopf mit Steinmandl und Stange, 3084 m; die Stanziwurten mit Steinmandl und Stange, 2704 m; den Ziethenkopf mit schöner und hoher Pyramide, 2484·8 m; den Stellkopf mit Steinmandl, 2846 m; das Alteck mit charakteristischem Gipfel, 2939 m; den Ankogel mit charakteristischer Gipfelform, 3262·7 m; den Silberpfennig mit Steinmandl und vertikaler und schiefer, ausspreizender, weisser Latte, 2597 m; den Hochnarr mit Steinmandl und Stange, 3258 m. Von allen diesen Punkten konnten wir aber bloss die vom k. u. k. Militär-

geographischen Institute bestimmten Punkte Grossglockner, Ziethenkopf und Ankogel der Rechnung zu Grunde legen. Die Coordinaten der übrigen, von der schon erwähnten Katastralvermessung herrührenden Punkte erwiesen sich so wenig in Übereinstimmung, dass wir die zahlreichen darauf bezüglichen Messungen unbenützt lassen mussten.

Zu den Messungen hatte uns das k. u. k. Militärgeographische Institut einen Theodolithen zur Landesvermessung von Starke & Kammerer (Nr. 250) zur Verfügung gestellt, welcher am Horizontalkreise und am Höhenkreise mittelst Mikroskopen mit Ocularmikrometern 2 Sekunden abzulesen gestattet. Beide Theilkreise sind mit Reibung drehbar, um verschiedene Stellen der Kreise zur Ablesung benützen zu können.

# Die Bestimmung der Lage des Sonnblicks nach dem Pothenot'schen Verfahren.

Hiezu wurde, wie schon erwähnt, die aus den Triangulirungsarbeiten des Militärgeographischen Institutes folgenden Coordinaten von Grossglockner, Ankogl und Ziethenkopf benützt. Der Coordinatenanfangspunkt ist in der Nähe des Hochnarrs angenommen worden, die x-Axe läuft von W gegen E und die y-Axe von N nach S.

Diese Coordinaten sind:

	x	y
A Ankogl	+23710.8	+ 3153.3
B Ziethenkopf	+ 176.7	+30180.9
C Grossglockner	-18371.7	+ 0.4

Denselben entsprechen die Dreieckseiten:

$$c = 35837 \cdot 77 m$$
,  $a = 35424 \cdot 65 m$ ,  $b = 42200 \cdot 50 m$  und die Winkel:

$$C = 54^{\circ} 8' 28 \cdot 0''$$
,  $A = 53^{\circ} 14' 13 \cdot 7''$ ,  $B = 72^{\circ} 37' 18 \cdot 3''$ .

Wird der Ostpfeiler mit E, der Westpfeiler mit W bezeichnet, so ergab die Messung folgende Mittelwerthe der Winkel bei einer Anzahl n Messungen:

$$\angle CWB = 94^{\circ} 25' 16 \cdot 9'' \pm 0 \cdot 73''$$
  $n = 8$   
 $\angle AWB = 91$  20 44 · 9 ± 1 · 90  $n = 6$   
 $\angle CEB = 94^{\circ} 20' 34 \cdot 0'' \pm 2 \cdot 34''$   $n = 6$   
 $\angle AEB = 91$  25 37 · 9 ± 2 · 17  $n = 8$ 

Damit wurden folgende Abstände der Pfeiler von den Punkten berechnet:

Entfernung von	$\boldsymbol{\mathit{E}}$	ur
C Grossglockner	. 20140 · 8 m	20104·6 m
B Ziethenkopf	. 22113.1	$22149 \cdot 2$
A Ankogl	. 27656.7	$27658 \cdot 2$

Hieraus folgen die Coordinaten der beiden Pfeiler:

	x	$\boldsymbol{y}$
$E \dots$	1605 · 6 m	2561 · 1 m
W	1569.6	$2557 \cdot 7$

Aus den Coordinaten ist es möglich, den Abstand der Pfeilermitten zu ermitteln. Dieser wird so gefunden:  $36 \cdot 1 \, m$ , was gegen die directe Messung um  $0 \cdot 7 \, m$  differirt und eine nützliche Controle der Messungen bietet.

Ein Fehler der gemessenen Winkel CWB und AWB z. B., um je 2 Secunden bringt eine Änderung in der Länge WC, WB und WA hervor, welche bloss in den Centimetern liegt, daher kaum in Betracht kommt.

#### Die trigonometrische Höhenmessung.

Von den drei gewählten Fixpunkten ist insbesondere der Grossglockner durch den Herrn Oberstlieutenant H. Hartl des k. u. k. Militärgeographischen Institutes, mit Hilfe von Zwischenpunkten in kleinen Distanzen, an das Präcisionsnivellement im Pusterthale angeschlossen. Ebenso sind der Ziethenkopf und der Ankogl sorgfältig bestimmt worden. Die Höhen sind auf den Erdboden des Gipfels bezogen.

Grossglockner	$3798 \cdot 4 m$
Ankogl	3262 · 7
Ziethenkopf	2484 · 8

Zur Höhenberechnung wurde die von Oberstlieutenant H. Hartl benützte Formel 1 verwendet, welche der Krümmung der Erde und dem Einflusse der Refraction Rechnung trägt. Dieselbe lautet:

$$U = S \cot z + S^2 q, \qquad q = \frac{1 - K}{2\rho}.$$

Darin sind: U die gesuchte Höhendifferenz in Metern zwischen dem Vergleichsgipfel und dem Mittelpunkte des Höhenkreises, S die Entfernung vom Vergleichsgipfel, z der Zenithwinkel,  $\rho$  der Erdhalbmesser.

Für K ist zu setzen:

$$K = 0.1470 - 0.00080 h$$

worin h die beiläufige Höhendifferenz in Hectometern bedeutet. Ferner wurde genommen:

$$\log \frac{1}{2} \rho = 2.8942233 - 10.$$

Die Instrumentenhöhe beträgt beim Ostpfeiler 1.38 m, beim Westpfeiler 1.40 m. Der Mittelpunkt des Höhenkreises steht nahe 0.26 m über der Aufstellungsebene.

Wegen der Veränderlichkeit der Refraction wurden die Messungen der Höhenwinkel hauptsächlich um die Mittagszeit ausgeführt. Um aber doch den Einfluss der Refraction kennen zu lernen, haben wir auch in den Vormittagsstunden und am späten Nachmittage Messungen ausgeführt. Insbesondere die letzteren gaben auffallend abweichende Werthe.

In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Höhenwinkel unter z angesetzt und dazu angeführt: das Datum, die Versuchszeit, die Anzahl n der Messungen, die Pfeilerbezeichnung und die Höhe H in Metern.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Mittheilungen des k. und k. Militärgeographischen Institutes, Bd. IV, S. 173.

#### Ankogl.

			Z	n	H
7.	Juli	1 25 2 10	E 89° 40′ 49·0"±0·67"	10	3105·37±0·10
7.	>	2 12— 2 25	E 89 40 50·1 ±1·47	8	3105·49±0·16
8.	>	10 40—11 0	$W 89 41 14.0 \pm 0.89$	6	3107·53±0·10
8.	>	12 50— 1 10	$W$ 89 40 59·4 $\pm$ 2·22	7	3105·96±0·24
15.	Sept.	10 50-11 30	$W$ 89 40 51.6 $\pm 2.12$	5	3105·14 <u>+</u> 0·24
16.	>	11 40- 1 10	$W$ 89 40 58 8 $\pm 2.44$	7	3105·93±0·25

Aus diesen 43 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3106 \cdot 09 \pm 0.21 \text{ m}.$$

#### Ziethenkopf.

		Z	n	H
8. Juli	10 15-12 0 W	1° 24′ 13·0″±5·4 ″	16	3110·24±0·73
8. >	12 20-12 40 W S	$01 \ 24 \ 52 \cdot 1 \ \pm 0 \cdot 83$	5	3107·43±0·10
14. Sept.	$9 \ 30 - 3 \ 30 \dots W $	$01 \ 24 \ 13 \cdot 2 \ \pm 0 \cdot 13$	10	3110·27 <u>+</u> 0·18
15. •	11 50—12 0 W S	$01 \ 24 \ 20 \cdot 1 \ \pm 5 \cdot 18$	2	3111·21±0·77
16. •	$10  0-12  31  \dots  W$	1 24 $9.5 \pm 7.20$	5	3109·78 <u>+</u> 0·96
7. Juli	$12 \ 40-1 \ 10 \dots E $	01 24 10·2 ±1·11	15	3110 05 <u>+</u> 0·16
15. Sept.	2 5— 2 35 E 9	1 24 3.5 $\pm 2.47$	3	3107·15±0·32

Aus diesen 56 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3108.84 \pm 0.62 m$$
.

#### Grossglockner.

							Z	n	H
5.	Juli	10	30-11	15	W 88°	6'	30·3"±3·44"	7	3105·84 <u>+</u> 0·38
5.	•	11	15-11	50	W 88	6	$34.8 \pm 2.81$	6	3106·28±0·31
8.	•	11	0-11	30	W 88	6	31·1 ±1·16	9	3105·90 <u>+</u> 0·13
8.	>	12	30-12	50	W 88	в	43.5 ±1.52	8	3107·12±0·17
8.	>	1	10-1	30	W 88	6	54.6 ±1.66	7	3108·22±0·18
9.	>	1	45- 2	15	W 88	7	$5.1 \pm 2.05$	10	$3109 \cdot 23 \pm 0 \cdot 20$
14.	Sept.	9	50—10	0	W 88	в	$31.3 \pm 1.04$	4	3108·73±0·11
15.	•	9	40-10	<b>3</b> 0	W 88	в	32·4 ±1·58	5	3106·04±0·17
16.	>	11	30-12	0	W 88	6	41·7 ±1·68	6	3106·95 <u>+</u> 0·18
15.	•	2	45- 3	0	E 88	6	49.8 ±0.94	5	$3106.63 \pm 0.10$

Aus diesen 67 Beobachtungen folgt unter Berücksichtigung der Genauigkeit und der Anzahl der Messungen, aus denen die Werthe abgeleitet sind:

$$H = 3106 \cdot 47 \pm 0 \cdot 12 m$$
.

Alle Beobachtungen sind auf den Erdboden beim Westpfeiler bezogen.

Die Genauigkeit der Beobachtungen des Ziethenkopfes ist geringer wie jene der anderen Beobachtungen, da dieser Gipfel fast genau in der Mittagslinie liegt und dadurch das Visiren um die Mittagszeit sehr erschwert ist.

Unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Mittelwerthe und der Anzahl der Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, ergibt sich:

$$H = 3106 \cdot 47 \pm 0 \cdot 10 \ m.$$

Weiter ist unter Berücksichtigung der früher angegebenen Höhenmessungen der Pfeiler etc.:

Platte des Westpfeilers	.3107 ·61 n	n
Platte des Ostpfeilers	.3107 • 42	
Beiläufige Höhe des Barometergefässes	.3106.9	
Durch Hann aus Barometermitteln	.3106.5	$\pm 1.6m$

wonach unsere Bestimmung der Höhe des Barometergefässes innerhalb der Fehlergrenze des Mittels aus den Hann'schen Werthen liegt.

# Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen

von

#### Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist die Mittheilung einiger neuer Sätze über die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch bestimmte Formen. Zu dem Behufe soll zunächst im ersten Paragraphe eine auf den grössten gemeinschaftlichen Theiler eines Systems von ganzen Zahlen bezügliche Formel ermittelt und gelegentlich auf mehrere specielle Fälle angewendet werden, während im zweiten die mit Hilfe einiger der gefundenen Beziehungen und von bekannten Theoremen Jacobi's, Eisenstein's und Liouville's leicht zu beweisenden Theoreme aufgestellt werden.

#### I. In der Summe

$$x_1, x_2, \dots, x_s = n$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s])$$

tritt das Glied F(d), wo d irgend ein Theiler von n ist, so oft auf, als es Werthsysteme  $x_1, x_2, \ldots, x_s$  gibt, welche den Beziehungen

$$x_1 = dy_1, x_2 = dy_2, \dots, x_s = dy_s$$
  $(y_{\lambda} = \text{ganze Zahl})$  
$$\left[\frac{n}{d}, y_1, y_2, \dots, y_s\right] = 1$$

genügen, d. i. also so vielmal, als dem Intervalle  $1 cdots \frac{n}{d}$  angehörige Systeme von s ganzen Zahlen existiren, deren grösster

gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist, und demnach hat man die Relation

$$x_1, x_2, \dots, x_s = n \\ \sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_d F(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right),$$

in welcher die Summation nach d über alle Theiler von n zu erstrecken ist.

Berücksichtigt man, dass

$$\varphi_s(n) = \sum_d d^s \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

ist, so kann man derselben sofort eine der zwei folgenden Gestalten geben:

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_{d} d^s f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} F([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_{d} \chi(d) \mu(\frac{n}{d}),$$

wo

$$\sum_{d} f(d) = F(u)$$

$$\sum_{s} F\left(\frac{n}{d}\right) d^{s} = \chi(n)$$

ist.

Setzt man in diesen Gleichungen

$$f(x) = \mu \sqrt[r]{x}, \quad \lambda_r(x), \quad \alpha(x),$$

so erhält man für die Anzahl  $\varphi_{r,s}(n)$  derjenigen Systeme von s beliebigen ganzen Zahlen des Intervalles  $1 \dots n$ , deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keine r<sup>te</sup> Potenz (ausser 1) gemein hat, die Ausdrücke

Darstellung einer ganzen Zahl.

$$\varphi_{r,s}(n) = \sum_{d_r} d_r^s \, \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)$$

$$= \sum_{d} \mu_r(d) \, \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d} \overline{\psi}_{r,s}(d) \, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

für die Anzahl  $\chi_{r,s}(n)$  derjenigen Systeme von s dem Intervalle  $1 \dots n$  beliebig entnommenen ganzen Zahlen, welche mit n ein (s+1)-gliedriges Zahlensystem bilden, dessen grösster gemeinsamer Theiler eine r<sup>te</sup> Potenz ist, die Werthe

$$\bar{\gamma}_{r,s}(n) = \sum_{d_r} \varphi_s(d_r) 
= \sum_{d} \lambda_r(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) 
= \sum_{d} \rho_{s,r}(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

und für die Summe  $A_s(n)$  derjenigen Werthe, welche die Function  $f_1(x)$  annimmt, wenn ihr Argument jene grössten gemeinsamen Theiler von s beliebig herauszugreifenden ganzen Zahlen des Bereiches  $1 \dots n$  durchläuft, welche Primfactoren von n sind, die Werthe

$$A_s(n) = \sum_{d} \alpha \left(\frac{n}{d}\right) d^s$$
$$= \sum_{p} f_1(p) \varphi_s \left(\frac{n}{p}\right)$$

und speciell für die  $A_s^{(0)}(n)$  Anzahl der zuletzt genannten s-gliedrigen Zahlensysteme

$$A_s^{(0)}(n) = \sum_d \alpha_0 \left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$= \sum_p \varphi_s \left(\frac{n}{p}\right)$$

$$= \sum_s \mu \left(\frac{n}{d}\right) p_s(d),$$

wo die Summationen nach d über alle, jene nach  $d_r$  aber nur über diejenigen Theiler von n zu erstrecken sind, deren complementärer Divisor eine  $r^{\text{te}}$  Potenz ist, die Summationen nach p sich auf alle Primtheiler von n beziehen, mit  $\overline{\psi}_{r,s}(x)$  die Summe der  $s^{\text{ten}}$  Potenzen derjenigen Theiler von x bezeichnet wird, deren complementärer Divisor durch keine  $r^{\text{te}}$  Potenz theilbar ist, und  $p_s(x)$  die Summe der  $s^{\text{ten}}$  Potenzen jener Theiler von x vorstellt, deren complementärer Divisor eine Primzahl ist.

Es mag bei dieser Gelegenheit nur erwähnt werden, dass aus den obigen Erörterungen die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi_{r,s}(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma - s)}{\zeta(r\sigma)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{\gamma}{\chi_{r,s}(n)}}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(r\sigma)\zeta(\sigma - s)}{\zeta(\sigma)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\overline{\psi}_{r,s}(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma)\zeta(\sigma - s)}{\zeta(r\sigma)}$$

folgen.

Die Substitutionen

$$f(x) = x^{t}$$
,  $\left(\frac{\Delta}{x}\right)$  ( $\Delta$  = Fundamental discriminante),  $\phi_{t}(x)$ ,  $f_{\beta-1}(x)$ ,  $\frac{f_{\beta-2}(x) \psi(x^{2}\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(x)}}$ 

liefern die Relationen

$$x_1, x_2, \dots, x_S = n$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_S = 1} \psi_t([n, x_1, x_2, \dots, x_S]) = \sum_d \psi_t(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_d \psi_s(d) \varphi_t\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= n^t \psi_{s-t}(n)$$

 $\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1} \varphi([n,x_1,x_2,\ldots,x_s],\Delta) = \mathfrak{t} n^s \sum_{d} \left(\frac{\Delta}{d}\right) \frac{1}{d^s} \quad (\mathfrak{t}=\text{Anzahl der Transformationen einer Form der Discrete})$ 11, 12, 1 . 1 . 1 . 1 . 1

$$= \tau n^{s} \sum_{d} \left(\frac{d}{d}\right)_{d}^{s} (\tau)$$
$$= \sum_{d} \varphi(d, \Delta) \varphi_{s} \binom{n}{d}$$

$$\sum_{x_{1},x_{2},...,x_{S}=1}^{x_{1},x_{2},...,x_{S}} [n,x_{1},x_{2},...,x_{S}]^{l} = \sum_{d} d^{l} \varphi_{s} \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d} d^{s} \varphi_{t} \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} f_{\beta}([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) = \sum_{d} f_{\beta}(d) \varphi_s(\frac{n}{d})$$

$$= \sum_{d} f_{\beta-1}(\frac{n}{d}) d^s$$

$$= \sum_{d} f_{\beta-1}(\frac{n}{d}) d^s$$

$$\sum_{(\beta-1)^{\tilde{\phi}}([n, x_1, x_2, \dots, x_s])} \frac{f_{\beta-1}([n, x_1, x_2, \dots, x_s])}{(\beta-1)^{\tilde{\phi}}([n, x_1, x_2, \dots, x_s])} = \sum_{d} \frac{f_{\beta-2}(\frac{n}{d}) \psi(\frac{n^2}{d^2} \pi^{\beta-3}(\frac{n}{d}))}{(\beta-2)^{\tilde{\phi}}(\frac{n}{d})}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_s = n$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1} \int_{\beta - 1([n, x_1, x_2, \dots, x_s])} \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_s]) \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_s])$$

$$=\sum_{d}\frac{f_{\beta-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(d)}}\,\varphi_s\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr)$$

und speciell

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_S = 1} \omega([n, x_1, x_2, \dots, x_S]) = \sum_{d} \omega(d) \varphi_s \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d} \mu_2 \left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_S = 1} \psi^2([n, x_1, x_2, \dots, x_S]) = \sum_{d} \psi^2(d) \varphi_s \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d} \omega \left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_S = 1} \psi([n, x_1, x_2, \dots, x_S]^2) = \sum_{d} \psi(d^2) \varphi_s \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d} \psi^2 \left(\frac{n}{d}\right) d^s,$$

$$= \sum_{d} \psi^2 \left(\frac{n}{d}\right) d^s,$$

aus denen u. A. die folgenden Formeln sich ergeben:

$$x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S} = n$$

$$\sum_{x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S} = 1} \psi_{t}([n, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S}]) = \sum_{x_{1}, x_{2}, \dots, x_{t} = 1} \psi_{s}([n, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{t}])$$

$$x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S} = n$$

$$\sum_{x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S} = 1} [n, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{S}] = \sum_{x_{1}, x_{2}, \dots, x_{t} = 1} [n, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{t}]^{S}.$$

§. 2. Auf Grund der im vorigen Paragraphe aufgestellten Formeln kann man nun für die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen eine Reihe von Sätzen aufstellen, deren grösster Theil einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen dieser Anzahl und einer für jede Form besonderen Function der grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit den einzelnen demjenigen Bereiche, dessen Grenzen 1 und die dargestellte Zahl sind, beliebig entnehmbaren Zahlensystemen von einer Elementenanzahl, die von der darstellenden Form abhängt,

aufdeckt. Von diesen Theoremen mögen hier die folgenden angeführt werden:

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und ein zu demselben theilerfremdes System bilden.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnte Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der bezügliche Divisor sind, beliebig entnommenen dreigliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor kein Quadrat (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen

Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnten Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der betreffende Divisor sind, beliebig entnommenen fünfgliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor keinen quadratischen Factor (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs

Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form 4s+3 durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen viergliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Gebiete beliebig entnommen werden, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form 4s+3 durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Theilers der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen viergliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der  $2\left\{4-\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$ -fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, den Bedingungen  $y \ge 0$ , 2x > 3y genügenden Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Theiler der dargestellten Zahl und aller dieselbe nicht übertreffenden ganzen Zahlen durch die binäre quadratische Form (1, 0, -2).

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der

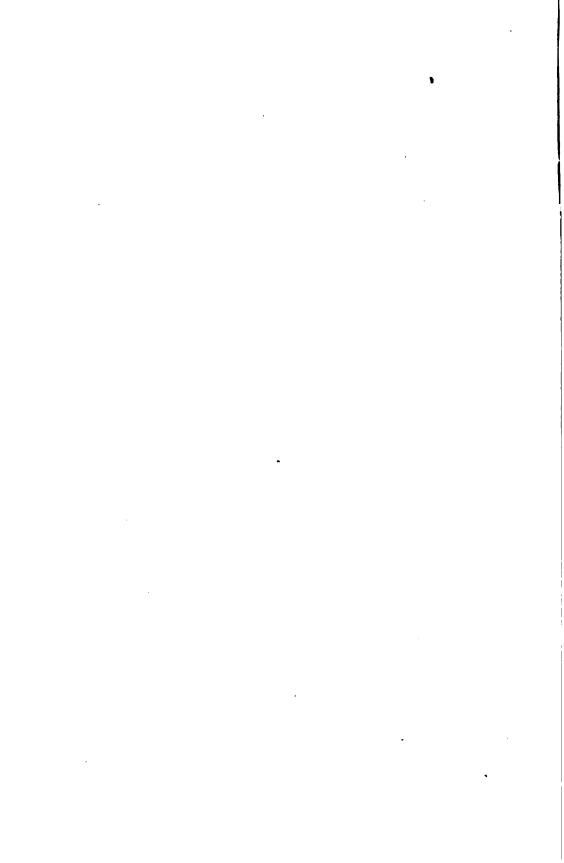
 $2\left|4-\left(\frac{2}{n}\right)\right|$ -fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, die Bedingungen  $y \ge 0$ , 2x > 3y erfüllenden Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form (1,0,-2) mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht übertreffenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der  $\frac{1}{6}\left\{4-\left(\frac{-2}{n}\right)\right\}$ -fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Tneiler der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnehmbar sind, durch die binäre quadratische Form (1, 0, 2).

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der  $\frac{1}{6}\left\{4-\left(\frac{-2}{n}\right)\right\}$ -fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 2) mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, welche den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Ich will bei dieser Gelegenheit als Berichtigung eines sinnstörenden Druckfehlers meiner im Decemberhefte 1893 dieser Sitzungsberichte enthaltenen Mittheilung »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung« bemerken, dass der Coëfficient des auf der rechten Seite der vorletzten Gleichung

auf S. 13 stehenden Integrales zu lauten hat 
$$\frac{arc \cos \frac{b}{2\sqrt{ac}}}{\sqrt{4ac-b^2}}$$



### SITZUNGSBERICHTE

DER

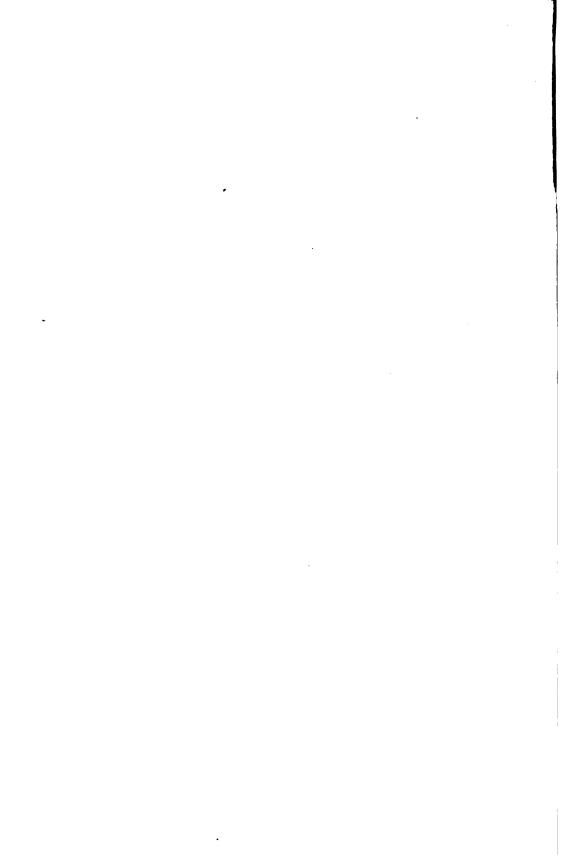
## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



### IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1894.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 25. Jänner l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Emil Weyr erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Wien übersendet eine Arbeit unter dem Titel: Die Stauungspapille und ihre Bedeutung als eines Zeichens von gesteigertem Druck in der Höhle des Schädels«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (9. Fortsetzung).

Der Secretär legt folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor, und zwar:

Von Herrn Dr. Alexander Marmorek in Wien

- Neues Heilverfahren gegen die septischen Krankheiten«,
- 2. Ȇber den Ersatz der chirurgischen Drainage«;

ferner von Herrn Friedrich Strohmer, Vorstand der chemisch-technischen Versuchsstation des Centralvereines für Rübenzucker-Industrie in der österreichisch-ungarischen Monarchie in Wien

3. Beitrag zur Prophylaxis parasitärer Krankheiten der landwirthschaftlichen Culturpflanzen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei im pharmacognostischen Institute der Universität Lemberg ausgeführte Arbeiten:

- Über die α-Epichlorhydrin-Verbindungen« von Prof. L. Niemiłowicz.
- Über eine neue pyknometrische Dichtebestimmungsmethode der weichen Fette« von Z. Zawalkiewicz.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Obermayer, A. v., Zur Erinnerung an Josef Stefan, k. k. Hofrath und Professor der Physik an der Universität in Wien. Wien und Leipzig, 1893; 8°.

### V. SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1894.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten führt Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 6. Februar l. J. in Abbazia erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Theodor Billroth erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w.M. Herr Hofrath Prof. Wiesner übersendet die dritte pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg unter dem Titel: »Über den vorherrschend ombrophilen Charakter des Laubes der Tropengewächse«.

Von dem k.u.k. Oberlieutenant Herrn Victor Dziubińskí in Peterwardein wird ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität eingesendet, welches die Aufschrift führt: »Gaskraft-Motor«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Kerner v. Marilaun bespricht eine Abhandlung von Dr. E. v. Halácsy, welche den Titel führt: »Beiträge zur Flora von Epirus«.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Wilhelm Webers Werke, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. IV. Bd. Galvanismus und Elektrodynamik. II. Theil. Besorgt durch Heinrich Weber. (Mit 4 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°. — VI. Bd. Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Besorgt durch Friedrich Merkel und Otto Fischer. (Mit 17 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°.

### VI. SITZUNG VOM 15. FEBRUAR 1894.

Das Executiv-Comité des unter dem Allerhöchsten Protectorate Sr. k. und k. apost. Majestät stehenden VIII. Internationalen Congresses für Hygiene und Demographie ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an diesem Congresse, welcher vom 1. bis 9. September d. J. in Budapest tagen wird, ein und übermittelt ein hierauf bezügliches vorläufiges Programm.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Dr. Ad. Jolles in Wien, betitelt: »Das Margarin, seine Verdaulichkeit und sein Nährwerth im Vergleich zu reiner Naturbutter«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. J. Herzig ausgeführte Arbeit: »Über Brasilin und Hämatoxylin«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Abhandlung von Dr. K. Zsigmondy in Wien: »Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n-ten Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen«.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Denkschriften der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. (3. Bd. II. Theil). Vergleichend-anatomische und entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen

- an Walthieren, von W. Kükenthai. (Mit 12 Tafeln und 115 Abbildungen im Text.) Jena, 1893; 4°.
- Mitscherlich Alexander, Erinnerung an Eilhard Mitscherlich 1794—1863. Berlin, 1894; 8°.
- The collected Papers of Sir W. Bowman. (Vol. I and II.) Edited for the Committee of the \*Bowman Testimonial Fund\* by J. Burdon-Sanderson and J. W. Hulke. Presented by Harriet Lady Bowman. London, 1892; 4°.

Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n<sup>ten</sup> Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen

von

### K. Zsigmondy in Wien.

1.

Im Folgenden werden wie gewöhnlich zwei Polynome von x mit ganzzahligen Coëfficienten nur dann als nach dem Primzahlmodul p wesentlich von einander verschieden angesehen, wenn wenigstens ein Coëfficient in dem einen modulo p nicht congruent ist dem entsprechenden Coëfficienten derselben Potenz von x in dem anderen Polynom.

Ferner wird der Coëfficient der höchsten Potenz von x in jeder Congruenz gleich der Einheit angenommen, was stets durch Multiplication mit einem geeigneten Factor erreicht werden kann.

In einer Congruenz vten Grades bleiben mithin v Coëfficienten willkürlich; da jeder ein vollständiges Restsystem modulo p durchlaufen kann, erkennt man, dass es nur  $p^{\nu}$  verschiedene Congruenzen vten Grades gibt.

2.

Um die Anzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades zu finden, welche die x vorgegebenen verschiedenen Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$
 (I)

als Wurzeln nach dem Modul p nicht besitzen, hat man aus der Gesammtheit S der  $p^n$  verschiedenen Congruenzen

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

diejenigen auszuscheiden, welche durch einen der linearen Factoren  $x-a_i$  (j=1,2,...x) theilbar sind.

Es kann dies nach einem Verfahren, das ich bereits bei einer anderen Gelegenheit verwendet habe, leicht durchgeführt werden.<sup>1</sup>

Bekanntlich lässt sich die linke Seite jeder Congruenz

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$
,

welche die Wurzeln  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,... $\alpha_i$  besitzt, nur auf eine Weise modulo p in die Form

$$f_n(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_i)f_{n-i}(x) \tag{II}$$

bringen, wo  $f_{n-i}(x)$  ein Polynom n-iten Grades bedeutet, in welchem der Coëfficient der höchsten Potenz von x wieder gleich der Einheit ist. Nimmt man für  $f_{n-i}(x)$  alle  $p^{n-i}$  modulo p verschiedenen Functionen n-iten Grades, so liefern die zugehörigen  $f_n(x)$  ein bestimmtes in S enthaltenes System von Congruenzen  $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ .

Fügt man zu dem Systeme S alle diejenigen Systeme  $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$  hinzu, bei welchen  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$  irgend eine Combination aus einer geraden Anzahl der Elemente der Reihe  $a_1, a_2, \ldots, a_k$  bedeutet und scheidet man hierauf alle diejenigen Systeme aus, bei denen  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$  eine Combination aus einer ungeraden Anzahl von den genannten Elementen darstellt, so bleibt in dem schliesslich sich ergebenden Systeme die Gesammtheit derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades übrig, welche die  $n_1, n_2, \ldots, n_k$  als Wurzeln nicht besitzen.

Es lässt sich nämlich, wie schon erwähnt, jede Congruenz  $f_n(x) \equiv 0$ , welche die verschiedenen, der Reihe (I) angehörigen Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$  zulässt und für keinen weiteren

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zur Verallgemeinerung der Function  $\varphi(m)$  in der Zahlentheorie. Journ. für r. und ang. Math., Bd. 111.

Werth der Reihe (I) verschwindet, eindeutig modulo p in die Form (II) bringen, wo dann  $f_{n-i}(x)$  durch keinen von  $x-\alpha_j$  (j=1,2,...i) verschiedenen linearen Factor  $x-a_p$  (p=1,2,...x) theilbar ist. Die Congruenz  $f_n(x) \equiv 0$  wurde somit

$$\binom{i}{2} + \binom{i}{4} + \dots$$
 mal

hinzugefügt und

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{3} + \dots$$
 mal

ausgeschieden, kommt daher im Ganzen

$$1 - {i \choose 1} + {i \choose 2} - {i \choose 3} + \dots = (1-1)^i \text{mal},$$

d. h. überhaupt nicht vor.

Da den  $p^n$  Congruenzen  $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$  im Ganzen

$$\binom{\varkappa}{2}p^{n-2}+\binom{\varkappa}{4}p^{n-4}+\ldots$$

Congruenzen hinzugefügt, und hingegen

$$\binom{\varkappa}{1}p^{n-1}+\binom{\varkappa}{3}p^{n-3}+\ldots$$

Congruenzen weggenommen wurden, erhält man das folgende Theorem:

Die Anzahl  $\psi$   $(n, \varkappa)$  derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades nach einem Primzahlmodul p, welche  $\varkappa$  vorgegebene verschiedene Zahlen als Wurzeln nicht besitzen, wird bestimmt durch den Ausdruck

$$\psi(n, \mathbf{x}) = p^n - \binom{\mathbf{x}}{1} p^{n-1} + \binom{\mathbf{x}}{2} p^{n-2} - \ldots + (-1)^n \binom{\mathbf{x}}{n}. \quad \text{(III)}$$

3.

Der eben für  $\psi$  (n, x) gefundene Ausdruck nimmt im Falle  $n \ge x$  die besonders einfache Gestalt

$$\psi(n, \mathbf{x}) = p^{n-\mathbf{x}}(p-1)^{\mathbf{x}} \tag{IV}$$

an, während für jeden möglichen Werth von n die Recursionsformel

$$\psi(n, \mathbf{x}) = p\psi(n-1, \mathbf{x}) + (-1)^n \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

besteht.

Ferner folgt unmittelbar aus der Gleichung (III) die Relation

$$\psi(n, \mathbf{x} + 1) = \psi(n, \mathbf{x}) - \psi(n - 1, \mathbf{x}), \tag{V}$$

welche ihrerseits wieder im Zusammenhalte mit dem Anfangswerthe  $\psi(n,0) = p^n$  die Function  $\psi(n,x)$  charakterisirt. Man erhält nämlich durch wiederholte Anwendung von (V) die Gleichung

$$\psi(n, \mathbf{x}+i) = \psi(n, \mathbf{x}) - \left(\frac{i}{1}\right)\psi(n-1, \mathbf{x}) + \left(\frac{i}{2}\right)\psi(n-2, \mathbf{x}) - ..., \text{ (VI)}$$

welche in der That für x = 0 in den Ausdruck (III) übergeht.

Endlich lässt sich auf Grund der Beziehung (V) die Relation

$$p^{n} = \psi(n, \mathbf{x}) + \binom{\mathbf{x}}{1} \psi(n-1, \mathbf{x}-1) + \binom{\mathbf{x}}{2} \psi(n-2, \mathbf{x}-2) + \dots$$

mittelst des Schlusses von x auf x+1 bewahrheiten.

4.

Von besonderem Interesse ist der Fall  $\mathbf{x} = p$ . Man erhält alsdann für die Anzahl  $\psi(n)$  derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades nach einem Primzahlmodul p, die überhaupt keine Wurzeln besitzen, gemäss der Gleichung (III) den Ausdruck

$$\psi(n) = p^n - \binom{p}{1} p^{n-1} + \binom{p}{2} p^{n-2} - \cdots$$

Einen Zusammenhang zwischen den Functionen  $\psi(n)$  und  $\psi(n, x)$  vermittelt die Relation (VI). Wird in derselben i = p - x gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\psi(n) = \psi(n, \mathbf{x}) - {p - \mathbf{x} \choose 1} \psi(n - 1, \mathbf{x}) + {p - \mathbf{x} \choose 2} \psi(n - 2, \mathbf{x}) - \dots,$$

welche, wie eine einfache auf die Bedeutung von  $\psi(n, x)$  gegründete Überlegung lehrt, in folgender Art umgekehrt werden kann:

$$\psi(n, \mathbf{x}) = \psi(n) + \left(\frac{\overline{p-x+1}-1}{1}\right)\psi(n-1) + \left(\frac{\overline{p-x+2}-1}{2}\right)\psi(n-2) + \dots \quad \text{(VII)}$$

Die folgenden Sätze fliessen unmittelbar aus der Bedeutung der Function  $\psi(n)$ :

1. Die Anzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades modulo p, welche überhaupt Wurzeln zulassen, wird durch die Differenz

$$p^n - \psi(n)$$

bestimmt.

2. Die Anzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die genau i verschiedene Wurzeln besitzen, wird durch das Product

$$\binom{p}{i} \psi(n-i)$$

bestimmt.

3. Die Anzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die i verschiedene und gleiche Wurzeln haben, wird durch das Product

$$\binom{p+i-1}{i}\psi(n-i)$$

bestimmt.

Nach dem Satze 2 (beziehungsweise 3) erhält man als die Gesammtzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die bloss verschiedene, beziehungsweise verschiedene und gleiche Wurzeln besitzen, die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} {p \choose i} \psi(n-i),$$

beziehungsweise

$$\sum_{i=1}^{n} {p+i-1 \choose i} \psi(n-i).$$

Das letztere Resultat liefert im Zusammenhalte mit dem Satze 1 die Recursionsformel

$$\psi(n) = p^n - \sum_{i=1}^n {p+i-1 \choose i} \psi(n-i),$$

welche sich auch aus der Gleichung (VII) für den speciellen Werth  $\varkappa = 0$  ergibt. Übrigens kann die zuletzt gefundene Formel auch in der folgenden Art verallgemeinert werden:

$$\psi(n, \mathbf{x}) = p^n - \sum_{i=1}^n {\binom{\mathbf{x} + i - 1}{i}} \psi(n - i, \mathbf{x}).$$

5.

Wird im Falle x = p noch ausserdem  $n \ge p$  vorausgesetzt, so besteht gemäss der Relation (IV) die Gleichung

$$\psi(n) = p^{n-p}(p-1)^p.$$

Versteht man unter dem Quotienten  $\frac{\psi(n)}{p^n}$  die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die keine Wurzeln besitzen, so kann man das folgende Theorem aussprechen:

Die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades modulo p, welche keine Wurzeln zulassen, besitzt für  $n \ge p$  den von n unabhängigen Werth  $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p$  und nähert sich mit wachsendem Modul der Grenze  $e^{-1}$ .

Dieser Satz gewährt einen Einblick in die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich angenommene Congruenz  $n^{\text{ten}}$  Grades Wurzeln besitzt, im Falle, als  $n \ge p$  ist und p einen grossen Werth hat; sie ist etwas kleiner als  $\frac{2}{3}$ .

6.

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten auch eine Anwendung auf den von Kronecker eingeführten Begriff des Ranges eines Systems von Grössen, worauf mein hochverehrter Lehrer Herr Prof. Gegenbauer mich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

Nach einem Satze von Herrn Julius König, den Herr Gustav Rados bewiesen hat, besitzt die Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \dots + a_{p-2} = 0 \pmod{p}$$
 (VIII)

unter der Voraussetzung, dass  $a_{p-2}$  nicht durch die ungerade Primzahl p theilbar ist, dann und nur dann genau p-1-i verschiedene Wurzeln, wenn alle Subdeterminanten  $(i+1)^{\text{ter}}$  Ordnung der Determinante

$$|a_{j+x}|$$
  $\begin{pmatrix} j, x = 0, 1, \dots p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{pmatrix}$ ,

aber nicht alle Subdeterminanten  $i^{\text{ter}}$  Ordnung modulo p verschwinden, wenn also nach der Definition Kronecker's ads System der  $(p-1)^2$  Grössen

$$a_{j+x}$$

den Rang i bezüglich des Moduls p besitzt.

Bezeichnet nun  $a_{r-1}$  die erste durch p nicht theilbare Zahl der Reihe

$$a_0, a_1, \ldots a_{p-2},$$

so soll gesagt werden, das Grössensystem

$$a_{j+x}$$
  $\begin{pmatrix} j, x = 0, 1, \dots p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{pmatrix}$ 

habe die Ordnung r modulo p.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Rados, Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades, Journ. . r. und ang. Math., Bd. 99, S. 258-260.

Vergl. z. B. Kronecker, Periodensyst. von Functionen reeller Var., Berliner Sitzungsber., 1884, XLVI.

In diesem Falle besitzt die Congruenz (VIII) den Grad p-1-r und der Coëfficient  $a_{r-1}$  kann nach Multiplication der Congruenz mit einer geeigneten Zahl gleich der Einheit angenommen werden. Die Grössen  $a_{j+x}$  erleiden hiedurch nur insoferne eine Veränderung, als alle mit einem und demselben durch p nicht theilbaren Factor multiplicirt erscheinen. Zwei Grössensysteme aber, welche sich bloss in der angegebenen Art unterscheiden, haben augenscheinlich denselben Rang und sollen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachtet werden.

Nach einem dem Satze 2 in Nr. 4 analogen Satz ist die Anzahl derjenigen Congruenzen vom Grade p-1-r, welche genau p-1-i verschiedene Wurzeln (den Werth 0 ausgeschlossen) besitzen, gleich dem Producte

$$\binom{p-1}{p-1-i}\psi(\overline{p-1-r}-\overline{p-1-i}).$$

Man ist mithin zu dem folgenden Theorem gelangt:

Es gibt  $\binom{p-1}{i} \psi(i-r)$  wesentlich von einander verschiedene Systeme  $a_{j+x}$  vom Range i und der Ordnung r modulo p.

$$\begin{pmatrix}
j, \mathbf{z} = 0, 1, \dots p-2, \\
a_{j+\overline{p-1}} = a_j, & a_{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p}
\end{pmatrix}^{-1}$$

7.

Zum Schlusse mögen noch folgende Bemerkungen Platz finden.

Zu der Gleichung (III) hätte man auch noch auf einem anderen Wege successive gelangen können.

Scheidet man nämlich zunächst aus der Gesammtheit der  $p^n$  Congruenzen  $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$  alle  $p^{n-1}$  Congruenzen,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man vergleiche hiezu den Ausdruck für die Anzahl aller möglichen modulo p verschiedenen Systeme vom Range i mit bestimmter Zeilen- und Colonenzahl, welchen Herr Georg Landsberg im Journ. f. r. und ang. Math. Bd. 111, S. 87 angibt.

welche den Factor  $x-a_1$  besitzen, aus, so bleiben  $\psi(n,1)=p^n-p^{n-1}$  Congruenzen übrig. Von diesen hat man wieder diejenigen, welche den Factor  $x-a_2$ , also die Form  $(x-a_2)$ .  $f_{n-1}(x)\equiv 0$  haben, zu entfernen, wo jedoch das im Übrigen beliebige Polynom  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades  $f_{n-1}(x)$  nicht durch  $x-a_1$  theilbar ist. Die Anzahl der zulässigen Functionen  $f_{n-1}(x)$  wurde aber eben ermittelt; sie wird ausgedrückt durch  $\psi(n-1,1)$ . Es bleiben mithin  $\psi(n,2)=\psi(n,1)-\psi(n-1,1)$  Congruenzen stehen, welche weder durch  $x-a_1$ , noch durch  $x-a_2$  theilbar sind. Von diesen hat man wieder diejenigen wegzunehmen, welche den Factor  $x-a_3$ , also die Form  $(x-a_3)f_{n-1}(x)\equiv 0$  besitzen, deren Anzahl eben als  $\psi(n-1,2)$  ermittelt wurde u. s. f.

Man gelangt auf diese Art allgemein zu der Relation (V), deren wahre Bedeutung hier in Evidenz tritt und beweist auf Grund derselben mittelst vollständiger Induction die Gleichung (III).

Schliesslich sei ausdrücklich hervorgehoben, dass das in Nr. 2 auseinandergesetzte Verfahren wesentlich auf der Eindeutigkeit der Form (II) modulo p beruht, und dass dasselbe auch in anderen Fällen, wo ebenfalls eine eindeutige Zerlegung stattfindet, angewendet werden kann.

Beispielsweise ist bekanntlich die Zerlegung von f(x) überhaupt in irreductible Factoren modulo p nur auf eine Weise möglich. Bezeichnet man demnach mit  $\chi(i)$  die Anzahl der irreductiblen Functionen  $i^{\text{ten}}$  Grades modulo p, so wird die Anzahl derjenigen Congruenzen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die keinen irreductiblen Factor  $i^{\text{ten}}$  Grades zulassen, auf Grund des angegebenen Verfahrens durch den Ausdruck

$$\Psi(n,\chi(i)) = p^n - \left(\chi_1^{(i)}\right) p^{n-i} + \left(\chi_2^{(i)}\right) p^{n-2i} - \cdots + \cdots$$

bestimmt werden.

Es leuchtet ein, dass  $\Psi(n, \chi(i))$  analogen Formeln, wie sie in Nr. 3 für  $\psi(n, x)$  entwickelt wurden, genügen wird. Hier sei bloss das eine Resultat hervorgehoben:

Die mittlere Dichte derjenigen Functionen  $n^{\text{ten}}$  Grades, die modulo p durch keinen irreductiblen Factor  $i^{\text{ten}}$  Grades theilbar sind, nähert sich mit

wachsendem Modul der Grenze 
$$e^{-\frac{1}{i}}$$
  $(n > i \cdot \chi(i))$ 

Man gelangt zu diesem Satze auf dem nämlichen Wege, der in Nr. 4 eingeschlagen wurde, unter Benutzung des in der Literatur<sup>1</sup> vorfindlichen Ausdrucks für

$$\chi(i) = \frac{\sum_{d} p^{d} \, \mu\left(\frac{i}{d}\right)}{i},$$

wo die Summe sich auf alle Theiler von i zu erstrecken hat und  $\mu(x)$  die bekannte zahlentheoretische Function bedeutet.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Serret, Algebra II, deutsche Ausgabe, 1868, S. 111.

### Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne

von

#### Dr. Gustav Jäger.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1894.)

In seiner Abhandlung  $\star$ Zählung der nördlichen Sterne im Bonner Verzeichnisse nach Grössen  $\star$  zeigt K. v. Littrow, dass die Folgerungen aus der Annahme, die Sterne haben im Allgemeinen dieselbe Entfernung von einander und dieselbe Helligkeit, zu keinem Widerspruche mit den thatsächlichen Verhältnissen führen, wenn man sich auf die Sterne erster bis zwölfter Grösse beschränkt. Dabei verfährt er folgendermassen. Bezeichnen wir mit  $z_m$  die Zahl der Sterne bis inclusive einer gewissen Grössenclasse, und nennen wir analog  $r_{m+1}$  den Radius der betreffenden Kugel, so ist, wenn k eine Constante bedeutet,

$$z_m = kr_{m+1}^3 \tag{1}$$

oder

$$r_{m+1} = \sqrt[3]{\frac{z_m}{k}} {2}$$

Alle Sterne der m-Grösse befinden sich in der Hohlkugel zwischen den Radien  $r_m$  und  $r_{m+1}$ . Die Helligkeit der Sterne an der inneren Grenze einer solchen Hohlkugel kann durch  $\frac{c}{r_m^2}$ , wo c wieder eine Constante, an der äusseren durch  $\frac{c}{r_{m+1}^2}$  ausgedrückt werden, somit die mittlere Helligkeit  $H_m$  der Sterne dieser Hohlkugel durch

Wiener Ber., LIX, S. 569 ff, 1869.
Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a.

$$H_m = \frac{1}{r_{m+1} - r_m} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{cdr}{r^2} = \frac{c}{r_m r_{m+1}}.$$
 (3)

Nach dem Sinne, in welchem man die Schätzung von Sterngrössen gewöhnlich auffasst, ist ferner

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r_m}{r_{m+2}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta, \tag{4}$$

eine Constante. Indem man nun für  $z_{m-1}$  und  $z_{m+1}$  die bekannten Zahlen von  $z_6$  und  $z_8$  einsetzt, ferner  $H_1=1$  und  $r_2=1$  macht, lassen sich aus den vorhandenen Gleichungen die Werthe für k,c und  $\delta$  finden. Da nun weiter

$$\frac{r_m}{r_{m+1}}=\frac{r_{m+1}}{r_{m+2}},$$

so folgt nach Gleichung (4)

$$\frac{r_m}{r_{m+1}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta},$$

folglich

$$z_{m-1} = z_m \sqrt{\overline{\delta^3}}. \tag{5}$$

Die Zahl der Sterne mter Grösse allein ist gegeben durch

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\overline{\delta}^3}). \tag{6}$$

Berechnet man nach dieser Formel die Zahl der Sterne der verschiedenen Grössenclassen, so ist die Übereinstimmung mit der directen Zählung eine sehr befriedigende.

Wie man annehmen kann, die Helligkeit der Fixsterne sei durch deren Entfernung bedingt, so liegt es auch nahe, die wahren Eigenbewegungen der Sterne als durchschnittlich gleich und die scheinbare Verschiedenheit bloss als Folge der verschiedenen Entfernung zu betrachten. Auf Grund dieser Annahme findet Struve<sup>1</sup> folgende Tabelle.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Klein, Fixsternhimmel, S. 123.

1. und 2. Classe;		Entfernung	1.00	
3.	>	>	1.32	
4.	»	*	1.62	
5.	*	>	<b>2</b> ·00	
6.	<b>»</b>	<b>»</b>	2.45	
7.	<b>»</b>	»	2.56	

Nimmt man hingegen die wahre Helligkeit als gleich gross an, so erhält man

1. und 2. Classe;		asse;	Entfernung	
	3.	<b>&gt;</b>	*	1.89
	4.	<b>*</b>	<b>»</b>	2.76
	5.	*	*	$4 \cdot 00$
	6.	<b>»</b>	*	5.78
	7.	*	>	$8 \cdot 32$

Diese beiden Zahlenreihen lassen sich nicht vereinen, und infolge dessen können die beiden Annahmen über die gleiche Vertheilung der Fixsterne, sowohl der Helligkeit, als auch der Eigenbewegung nach nicht gleichzeitig bestehen.

In neuerer Zeit hat nun O. Stumpe in seiner Abhandlung \*Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems«¹ gezeigt, dass sich die gleichmässige Vertheilung der Eigenbewegungen der Fixsterne aufrecht erhalten lässt. Er vereinigt zu dem Zwecke die Sterne in vier Gruppen, wie folgt:

1.	Gruppe.	Jährliche	Eigenbewegung	0'16-0'32551	Sterne
2.	>	*	>>	0.32-0.64340	*
3.	<b>»</b>	>	>	0.64-1.28105	*
4.	>	<b>»</b>	>	1.28— ∞ 58	>>

Stumpe folgert nun: Da das Mittel der Eigenbewegungen für die vier Sterngruppen der Reihe nach

ist, so erhält nicht nur die allerdings von vorneherein plausible Annahme, dass die Sterne mit grösserer Eigenbewegung uns

Astr. Nachr. CXXV, S. 385 ff.

näher sind, als die mit geringerer, ihre volle Berechtigung, sondern es scheint sich sogar direct das Gesetz auszusprechen, dass die Entfernungen der Sterne umgekehrt proportional sind der Grösse ihrer Eigenbewegung.

Bemerkenswerth ist ferner, dass sich für die vier Sterngruppen ein Gang nach den Helligkeitsgruppen nicht zeigt. Es sind im Mittel die Helligkeiten der Sterne in den vier Gruppen

$$6 \cdot 0^{m}$$
,  $6 \cdot 7^{m}$ ,  $6 \cdot 1^{m}$ ,  $6 \cdot 5^{m}$ .

Hieraus scheint hervorzugehen, dass die Grösse der Eigenbewegung ein sichereres Kriterium, die Entfernungsverhältnisse der Fixsterne zu bestimmen, bietet als die Helligkeit«.

So sehen wir denn, dass sowohl die eine Annahme, die Eigenbewegungen seien für alle Sterne gleich gross, als auch die Annahme, die Leuchtstärke sei im Allgemeinen für alle Sterne dieselbe, während eine die andere ausschliesst, eine jede für sich wohl bestehen kann. Zweck der folgenden Untersuchung ist nun, diese beiden Annahmen so zu verallgemeinern, dass nicht nur jede für sich als Bild der wirklichen Verhältnisse gelten kann, sondern gleichzeitig die eine durch die andere bedingt wird.

Wir lassen die Voraussetzung, dass die Lichtstärke für alle Sterne dieselbe sei, fallen, jedoch wollen wir die Annahme beibehalten, dass die Sterne ein und derselben Leuchtkraft im Raume gleichmässig vertheilt seien. Die scheinbare Helligkeit lässt sich dann wiederum, wenn wir die K. v. Littrow'sche Bezeichnungsweise beibehalten, nach Gleichung (3) darstellen durch

$$H_m = \frac{c'}{r'_m r'_{m+1}} = \frac{c''}{r''_m r''_{m+1}} = \ldots = \frac{c^{(n)}}{r^{(n)}_m r^{(n)}_{m+1}}.$$

Dabei sind also die verschiedenen c proportional der Lichtmenge, welche die entsprechenden Sterne in Wirklichkeit aussenden. Es folgt weiter

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \ldots = \frac{r_m^{(n)}}{r_{m+2}^{(n)}} = \delta.$$

Bezeichnen wir nun mit  $z'_m$  die Zahl jener Sterne, welche innerhalb des Kugelraumes vom Radius  $r_{m+1}$  liegen und in

ihrer wahren Leuchtstärke der Constanten c' entsprechen, in gleicher Weise mit  $z''_m$  die Zahl jener Sterne, welche sich auf c'' und  $r''_{m+1}$  beziehen u. s. f., so ergibt sich

$$z'_m = k'r'_{m+1}^3, \ z''_m = k''r''_{m+1}^3, \dots z''_m = k^{(n)}r'^{(n)3}_{m+1}$$

Hiebei sind die verschiedenen k Constanten, welche lediglich von der Zahl der Sterne einer jeden Classe in einem bestimmten Volumen abhängen.

Nennen wir nun die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Helligkeit gleich oder grösser als  $H_m$  ist,  $z_m$ , so ist

$$z_m = z'_m + z''_m + \ldots + z_m^{(n)} = k'r'_{m+1}^{(3)} + k''r'_{m+1}^{(3)} + \ldots + k^{(n)}r_{m+1}^{(n)3}.$$

Ferner erhalten wir

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}'}{z_{m+1}'}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}''}{z_{m+1}''}} = \dots = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}''}{z_{m+1}''}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, wie Gleichung (4). Wir können daher auch hier dieselben Folgerungen machen, wie dort. Es ist ebenfalls

$$\sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta}, \qquad z_{m-1} = z_m \sqrt{\delta^3},$$

und es ist die Zahl der Sterne mter Grösse durch die Gleichung

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\overline{\delta}^3})$$

gegeben.

Wie wir schon erwähnt haben, entspricht diese Gleichung den thatsächlichen Verhältnissen. Es hindert uns also gar nichts anzunehmen, dass die Lichtmengen, welche die verschiedenen Sterne aussenden, innerhalb des Intervalls 0 → ∞ variiren können. Bedingung ist nur, dass die Sterne verschiedener Lichtstärke über den ganzen Himmelsraum gleichmässig vertheilt sind, was nach dem Obigen für die Sterne erster bis zwölfter Grösse zutrifft.

Wiederum finde ich hier, wie ich schon seinerzeit auf anderem Wege in der Abhandlung »Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne« <sup>1</sup> gezeigt habe, die grosse Analogie

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Monatsh. für Math. und Phys. II.

zwischen dem gasförmigen und dem Zustande des Weltalls. Nur sind hier die Sterne das, was wir dort Molekeln nennen. In einem Gase können wir nicht annehmen, dass einer jeden Molekel dieselbe Temperatur zukommt, sondern das, was wir die Temperatur eines Gases nennen, ist nur das Mittel der Temperaturen der einzelnen Molekeln, welche, nach der absoluten Temperaturscala gemessen, zwischen 0 und ∞ variiren können. Es ergibt sich das unmittelbar aus dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Molekeln in einem Gase, indem ja die Temperatur einer Molekel von der jeweiligen Geschwindigkeit derselben abhängig ist.

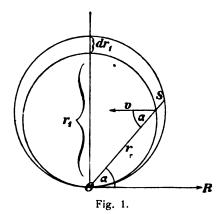
In gleicher Weise fanden wir nun auch für die Himmels-körper, dass die Temperaturen derselben — denn nach diesen richten sich ja die ausgestrahlten Lichtmengen — nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sein müssen. Welcher Art jedoch dieses Gesetz ist, können wir aus dem Bisherigen nicht erschliessen, indem ja zwischen den verschiedenen Werthen von c und k die willkürlichsten Beziehungen angenommen werden können, ohne dass dadurch das Resultat unserer Untersuchung gestört wird.

Desgleichen ist ersichtlich, dass, wenn die wahren Eigenbewegungen der Himmelskörper im Allgemeinen gleich und die scheinbaren nur durch die verschiedene Entfernung der Sterne bedingt wären, die gleich grossen scheinbaren Eigenbewegungen sich auf die verschiedensten Sternclassen vertheilen müssten, da ja aus ein und derselben Entfernung von den verschiedenen Sternen uns ganz verschiedene Lichtmengen zugesandt werden können.

Damit wäre eigentlich schon der Widerspruch gelöst, welcher sich in den eingangs erwähnten Annahmen zeigt. Doch wir wollen uns damit noch nicht begnügen, sondern es soll auch für die Eigenbewegungen nachgewiesen werden, dass eine jede Annahme bezüglich der Vertheilung der wahren Eigenbewegungen für das Resultat vollständig willkürlich ist, wenn nur wiederum das angenommene Vertheilungsgesetz auf den ganzen Himmelsraum ausgedehnt wird.

Die scheinbare Eigenbewegung eines Sternes rührt zum Theil von der wahren Eigenbewegung desselben, zum Theil von der Eigenbewegung des Sonnensystems her. Wir wollen demnach unsere Untersuchung in zwei Theile zerlegen. Zuerst wollen wir annehmen, alle Sterne stehen still und die scheinbaren Eigenbewegungen rühren nur von der Bewegung des Sonnensystems her. Im zweiten Falle lassen wir das Sonnensystem stillstehen und nur die Sterne sich bewegen. Bewegt sich nur die Sonne in O (Fig. 1) in der Richtung OR mit der

Geschwindigabsoluten keit v, so hat das für das Auge dieselbe Wirkung, als würde sich der Stern S mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegen. Die Entfernung des Sternes von der Sonne sei r, und es schliesse Verbindungsgerade die Sonne — Stern mit der Bewegungsrichtung der



Sonne den Winkel a ein, so ist die scheinbare laterale Eigenbewegung c des Sternes durch die Gleichung

$$c=\frac{v\sin\alpha}{r}$$

gegeben. Das ist, wie Fig. 1 zeigt, die Gleichung eines Kreises, welcher von der OR-Achse tangirt wird. Lassen wir diesen Kreis um die Achse rotiren, so erhalten wir eine wulstförmige Fläche und es haben alle Sterne, welche sich auf dieser Fläche befinden, dieselbe Eigenbewegung. Daraus ist schon ersichtlich, dass die Eigenbewegung des Sternes nicht nur von seiner Entfernung, sondern auch von seiner Lage gegen das Sonnensystem abhängt. Es kann für ein und dieselbe Eigenbewegung c die Entfernung des Sternes von 0 bis  $r_1$  wachsen, wenn wir mit r<sub>1</sub> den Durchmesser des Kreises bezeichnen, und zwar sei unter  $r_i$  jener Durchmesser verstanden, welcher auf OR senkrecht steht.

Wächst r um dr bei constantem  $\alpha$ , so nimmt  $r_1$  um  $dr_1$  zu und es ist  $dr = dr_1 \sin \alpha$ , da ja  $r = r_1 \sin \alpha$ . Lassen wir noch  $\alpha$  um  $d\alpha$  wachsen, so erhalten wir ein Volumelement der Wulstes von der Grösse

$$2 \pi r^2 \sin \alpha d\alpha dr = 2 \pi r_1^2 \sin^4 \alpha d\alpha dr_1$$
.

Ist ferner die Zahl der Sterne in der Volumeinheit N, so resultirt für die Zahl der Sterne in unserem Volumelemente

$$2\pi N r_1^2 dr_1 \sin^4 \alpha d\alpha. \tag{I}$$

Integriren wir diesen Ausdruck für die Variable  $\alpha$  von 0 bis  $\pi$ , so erhalten wir die Zahl jener Sterne, welche die Eigenbewegung c besitzen. Dieselbe ist, da

$$\int_{0}^{\pi} \sin^{4} \alpha d\alpha = \frac{3}{8} \pi,$$

$$Z' = \frac{3}{4} \pi^{2} N r_{1}^{2} dr_{1}.$$
(7)

Bedenken wir nun, dass  $c=\frac{v}{r_1}$ , so ergibt sich in gleicher Weise für eine andere Eigenbewegung  $c'=\frac{v}{r'_1}$ , oder

$$r_1 = \frac{v}{c}, \qquad r'_1 = \frac{v}{c'}.$$

Die Zahl Z sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen c und c' liegen, erhalten wir nun, wenn wir Gleichung (7) von  $r_1$  bis  $r'_1$ , d. i. von  $\frac{v}{c}$  bis  $\frac{v}{c'}$  integriren. Dies ergibt dann

$$Z = \frac{3}{4} \pi^2 N \int_{r_1}^{r_1'} r_1^2 dr_1 = \frac{\pi^2 N}{4} (r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N v^3}{4} \left( \frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right), \quad (8)$$

wobei natürlich c > c' ist.

Wir wollen nun den zweiten Fall untersuchen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, sämmtliche Sterne hätten dieselbe wahre Eigenbewegung, doch seien die Bewegungsrichtungen

regelmässig im Raume vertheilt, während das Sonnensystem still stehe. Wiederum erhalten wir für c, wie aus Fig. 1 ersichtlich,

$$c=\frac{u\sin\alpha}{r}.$$

Nur ist OR jetzt eine willkürlich gelegte Coordinatenachse, während u die wirkliche Geschwindigkeit der Sterne sein soll. In gleicher Weise gestaltet sich jede weitere Rechnung genau so, wie für den früheren Fall, so dass wir auch hier schliesslich für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen, die Gleichung (8) erhalten. Wir können also ohneweiters die Eigenbewegung der Sonne auf die Sterne und umgekehrt übertragen, ohne dass wir an der Erscheinung etwas ändern. Daraus folgt, dass, wenn sowohl die Sterne mit einer Geschwindigkeit u begabt sind, als auch die Sonne mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt, das wahre Resultat für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c liegt, durch die Gleichung

$$Z = \frac{\pi^2 N}{4} (r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N (u + v)^3}{4} \left( \frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2 N v^3}{4} \left( \frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right) = k \left( \frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3} \right)$$
(9)

gefunden wird, wobei natürlich

$$c = \frac{u+v}{r_1}, \qquad c' = \frac{u+v}{r_1'}$$

zu setzen ist.

Wir wollen nun die Annahme, dass w für alle Sterne gleich sei, fallen lassen, und wie seinerzeit für die Lichtstärken, soll jetzt für die Eigenbewegungen angenommen werden, dass dieselben nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sind, welches für den ganzen Himmelsraum gilt. Die verschiedenen Geschwindigkeiten seien  $w_1, w_2, \dots w_n$ , die verschiedenen Werthe von  $r_1$  seien jetzt dargestellt durch  $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ , so dass

$$c_1 = \frac{w_1}{\rho_1} = \frac{w_2}{\rho_2} = \ldots = \frac{w_n}{\rho_n}$$

wird. Sind die zugehörigen Zahlen der Sterne in der Volumeinheit  $N_1, N_2, \dots N_n$ , so erhalten wir nach Gleichung (8), indem wir  $c' = c_1$ ,  $c = \infty$  setzen, für die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als  $c_1$  ist,

$$\begin{split} Z_1 &= \frac{\pi^2}{4} (N_1 \rho_1^3 + N_2 \rho_2^3 + \ldots + N_n \rho_n^3) = \\ &= \frac{\pi^2}{4 c_1^3} (N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3). \end{split}$$

In gleicher Weise ergibt sich für die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als  $c_1'$  ist, da nun

$$c'_{1} = \frac{w_{1}}{\rho'_{1}} = \frac{w_{2}}{\rho'_{2}} = \dots = \frac{w_{n}}{\rho'_{n}},$$

$$Z'_{1} = \frac{\pi^{2}}{4 c'_{1}^{3}} (N_{1} w_{1}^{3} + N_{2} w_{2}^{3} + \dots + N_{n} w_{n}^{3}).$$

Daraus folgt für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c' liegt,

$$Z = Z_1' - Z_1 = \frac{\pi^2}{4} \left( N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \dots + N_n w_n^3 \right) \left( \frac{1}{c_1'^3} - \frac{1}{c_1^3} \right) =$$

$$= k \left( \frac{1}{c_1'^3} - \frac{1}{c_1^3} \right).$$

Indem wir nun

$$\frac{\pi^2}{4} \left( N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3 \right) = \frac{\pi^2 N w^3}{4} = k$$

setzen, erhalten wir wiederum die Gleichung (9), so dass wir auch bei der Annahme verschiedener Sterngeschwindigkeiten für die Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen dasselbe Gesetz erhalten müssen, wie für die Annahme gleicher Geschwindigkeiten aller Sterne. Wiederum lässt sich über die Art des Gesetzes gar nichts aussagen, da eine jede Annahme zum selben Resultate führt.

Schon für den Fall, dass wir annehmen, Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung sei für alle Sterne gleich gross, kommen

wegen der Gleichung  $c = \frac{w \sin \alpha}{r}$  den Sternen gleicher schein-

barer Eigenbewegung ganz verschiedene Entfernungen zu. Wie vielmehr muss das der Fall sein, wenn wir Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung nach willkürlichen Gesetzen vertheilt annehmen. Es nimmt daher gar nicht Wunder, dass die vier Gruppen, in welche Stumpe die Sterne nach ihrer Eigenbewegung eingetheilt hat, so ziemlich dieselbe mittlere Helligkeit besitzen, und dass umgekehrt die mittlere Eigenbewegung der verschiedenen Grössenclassen der Sterne viel weniger varrirt, als man von vornherein erwartet hat.

Man kann natürlich auch nach unserer neuen Anschauungsweise von der mittleren Entfernung der Sterne 1., 2...:n. Grösse sprechen. Nur ist dabei zu überlegen, dass diese Grössenclassen sich jetzt nicht mehr in getrennten Kugelschichten vorfinden, sondern dass die Sterne einer jeden Grössenclasse über den ganzen Raum vertheilt sein können.

Um die mittlere Entfernung einer bestimmten Grössenclasse zu finden, haben wir die Summe sämmtlicher Entfernungen durch die Zahl der Sterne dieser Classe zu dividiren. Somit ist die mittlere Entfernung

$$r_m = \frac{N'r'_m + N''r''_m + \ldots + N^{(n)}r_m^{(n)}}{N},$$

wenn wir

$$N = N' + N'' + \ldots + N^{(n)}$$

setzen. In gleicher Weise ist

$$r_{m+2} = \frac{N'r'_{m+2} + N''r''_{m+2} + \dots + N^{(n)}r'^{(n)}_{m+2}}{N}.$$

Da nun

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \dots = \frac{r_m^{(n)}}{r_{m+2}^{(n)}},$$

so ist auch

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{N'r'_m + N''r''_m + \dots + N^{(n)}r^{(n)}_m}{N'r'_{m+2} + N''r''_{m+2} + \dots + N^{(n)}r^{(n)}_{m+2}} = \frac{r_m}{r_{m+2}}.$$

Das heisst es stehen die mittleren Entfernungen der einzelnen Grössenclassen der Fixsterne im selben Verhältnisse, wie wir es nach Gleichung (4) erhalten haben, welche aus der Annahme gleicher wirklicher Helligkeit für alle Fixsterne entsprang.

Auf ganz analoge Weise lässt sich natürlich auch bei den Eigenbewegungen verfahren. Auch da ändert sich für das Verhältniss der mittleren Entfernung der Sterne verschiedener scheinbarer Eigenbewegung durch unsere erweiterte Annahme nichts.

Bei einem Vergleich von Zählung und Rechnung muss natürlich immer vorausgesetzt werden, dass die Zählung erschöpfend ist. Das ist bei den verschiedenen Grössenclassen der Sterne als sicher anzunehmen, da man es ja hier nur mit Sternen zu thun hat, die man auch thatsächlich sieht. Nicht so ist es bei den Eigenbewegungen, zumal wenn man zu kleineren Werthen derselben herabsteigt. Da ist es sehr wahrscheinlich, dass viele Sterne wegen ihrer geringen Helligkeit vollständig übersehen werden. Man hat ja die Bestimmung der Eigenbewegung nur etwa auf Sterne 1. bis 7. Grösse ausgedehnt. Das hat zur Folge, dass sich das Gesetz, welches durch Gleichung (8) dargestellt wird, nur für die grösseren Eigenbewegungen prüfen lässt, wie es Stumpe gethan hat. Hier dürfte die Zahl der Sterne, welche einer jeden Gruppe zukommt, ziemlich vollständig sein. Die Beschränkung auf grössere Eigenbewegungen führt aber wieder den Nachtheil mit sich, dass die Zahl der Sterne eine geringe wird. So beträgt dieselbe bei Stumpe z. B. nur 1055. Würde man sich bei der Prüfung des Helligkeitsgesetzes auf dieselbe Anzahl beschränken, so wäre die Übereinstimmung zwischen Zählung und Rechnung eine ungemein rohe. Es sei erwähnt, dass K. v. Littrow seine Untersuchungen über eine Zahl von fast 60.000 Sternen ausdehnte.

Wir wollen daher untersuchen, welche Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen sich ergibt, wenn wir unsere Zählung nur auf einen bestimmten Raum beziehen. Wir stellen z. B. die ganz bestimmte Frage: Wie vertheilen sich die scheinbaren Eigenbewegungen über die Sterne 1. bis 4. Grösse? Beschränken wir uns bloss auf Verhältnisszahlen, so ist es für

die Rechnung, wie schon wiederholt gezeigt wurde, ganz gleichgiltig, welches Vertheilungsgesetz der wahren Helligkeiten und Eigenbewegungen wir annehmen. Wir setzen desshalb der Einfachheit halber voraus, die wahre Helligkeit und die wahre Eigenbewegung w sei für alle Sterne dieselbe. Unsere Aufgabe ist dann die, für eine bestimmte scheinbare Eigenbewegung c die Zahl der Sterne zu finden, welche innerhalb einer Kugel liegen, deren Radius p bis zur Grenze der Sterne 4. Grösse reicht. Es lässt sich dann der Ausdruck (I) nicht ohneweiters über a von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  und über  $r_1$  von 0 bis  $r_1$  integriren, sondern wir haben dann verschiedene Fälle zu

unterscheiden, für welche verschiedene Integrationsgrenzen einzusetzen sind.

Ist  $r_1 = \frac{w}{c}$  kleiner als  $\rho$ , so ist die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen 0 und c liegt, proportional dem Volumen, welches von der Kugel mit dem Radius  $\rho$ 

und von der Oberfläche

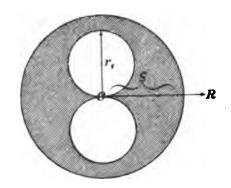


Fig. 2.

des Wulstes begrenzt wird, welcher durch Rotation eines Kreises vom Durchmesser  $r_1$  um die Achse OR als Tangente entsteht. In Fig. 2 ist dieser Raum durch Schraffen gekennzeichnet. Dieses Volumen entspricht dem Ausdrucke

$$\frac{4\pi}{3} \rho^3 - \frac{\pi^2}{4} r_1^3$$
.

Der zweite Fall ist derjenige, dass

$$\rho < r_1 < \sqrt{2} \rho.$$

Für diesen Fall haben wir an der erzeugenden Curve unseres Rotationskörpers, wie Fig. 3 zeigt, drei Stücke zu unterscheiden, nämlich OA, AB und BC. A ist der Durchschnittspunkt des Kreises mit der Senkrechten, welche von B

auf OR gefällt wird. Ist OR die x-Achse eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so wird unser Raum durch die yz-Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt, und wir erhalten unser Volumen, wenn wir von der Summe des durch OA und BC begrenzten Raumes jenen subtrahiren, welcher durch die Rotation von AB bestimmt wird. Dieses Resultat ist doppelt zu nehmen,

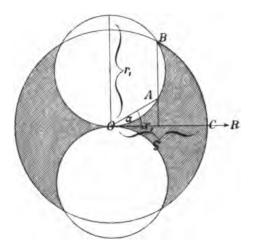


Fig. 3.

da wir ja für die linke Seite unseres symmetrischen Körpers dasselbe Volumen erhalten.

Für OA gilt die Gleichung

$$y^2 - r_1 y + x^2 = 0$$

woraus folgt

$$y = \frac{r_1}{2} \pm \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2}$$

Für das Volumen erhalten wir dann

$$\pi \int_0^{x_1} y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} \left[ \frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right] dx,$$

wobei  $x_1$  die Abscisse von A ist.

Für BC gilt die Gleichung

$$x^2 + y^2 = p^2$$

daher ist das zugehörige Volumen gleich

$$\pi \int_{x_{\bullet}}^{p} (\rho^{2} - x^{2}) dx.$$

Das Volumen, welches von dem Kreissegmente AB erzeugt wird, wollen wir nach dem Guldin'schen Theorem berechnen, indem wir die Fläche des Segments

$$2\int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} \, dx$$

mit  $2\pi$  und der Ordinate des Schwerpunktes  $\frac{r_1}{2}$  multipliciren, wodurch wir

$$2\pi r_1 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} dx$$

erhalten.

Es ist somit das Volum, innerhalb dessen sich unsere Sterne befinden, gleich

$$\begin{split} 2\,\pi\!\int_{0}^{x_{1}}\!\left(\frac{r_{1}^{2}}{2}-r_{1}\sqrt{\frac{r_{1}^{2}}{4}-x^{2}}-x^{2}\right)dx + \\ &+2\,\pi\!\int_{x_{1}}^{\rho}\left(\rho^{2}-x^{2}\right)dx + 4\,\pi\,r_{1}\!\int_{x_{1}}^{r_{1}}\sqrt{r_{1}^{2}-x^{2}}\,dx\,. \end{split}$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit der Zahl der Sterne in der Volumeinheit N, so ergibt sich die Zahl jener Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen.

Der dritte Fall ist nun der, dass

$$r_1 > \sqrt{2} \rho$$

ist. Wir erhalten dann nach Analogie des Vorhergehenden, wie aus Fig. 4 zu ersehen ist, für das entsprechende Volumen

$$2\pi \int_0^{x_1} \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2\right) dx + 2\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2) dx.$$

Welcher von den drei Fällen bei einer bestimmten Aufgabe in Rechnung zu ziehen ist, muss sich aus der Art der

Aufgabe ergeben. Man sieht, dass man es dabei im Allgemeinen mit sehr verwickelten Rechnungen zu thun hat.

Für die Frage, welche wir uns oben stellten, die Vertheilung der Eigenbewegungen der Sterne 1. bis 4. Grösse zu bestimmen, genügt die Beiziehung des ersten Falles. Es ist

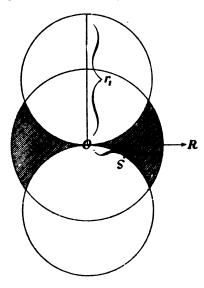


Fig. 4.

daher die Zahl der Sterne mit einer Eigenbewegung zwischen 0 und c gegeben durch

$$N\left(\frac{4\pi}{3}\rho^3 - \frac{\pi^2}{4}r_1^3\right) = \frac{4\pi}{3}N\rho^3 - \frac{\pi^2Nw^3}{4c^3} = a - \frac{b}{c^3}$$

wenn wir

$$\frac{4\pi}{3}N\rho^3=a, \qquad \frac{\pi^2Nw^3}{4}=b$$

setzen, wobei a und b Constanten sind.

In folgender Tabelle sind die Sterne 1. bis 4. Grösse, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen, zusammengestellt, wie sie sich bei »Mädler, Untersuchungen über die Fixsternsysteme« vorfinden. Dabei ist c in Secunden für das Jahrhundert angegeben.

c	Zahl der Sterne
10	318
20	485
30	537
40	563

Setzen wir

$$a = 540$$
,  $b = 222000$ ,

und berechnen wir daraus die verschiedenen Sternzahlen, so ergibt sich folgende Tabelle.

с	Zählung	Rechnung	Quotient
10	318	318	1.00
20	485	512	0.95
30	537	532	1.01
40	563	537	1.05

In der That stimmen Zählung und Rechnung so weit überein, wie man es bei der geringen Sternzahl erwarten kann.

Wenn wir für die Sterne 1. bis 4. Grösse die Annahme einer gleichen Vertheilung der Eigenbewegungen aufrecht halten können, so ist dies natürlich nicht massgebend für die übrigen Grössenclassen. Ja es dürfte mit Gewissheit anzunehmen sein, dass die lichtärmeren Sterne, d. h. die in Wahrheit kleineren Sterne im Durchschnitt eine grössere wahre Eigenbewegung haben, als die grösseren. Denn denkt man sich diese infolge der Vereinigung kleinerer Himmelskörper entstanden, so ist leicht einzusehen, dass wegen der Erhaltung des Schwerpunktes diese grösseren Massen sich langsamer fortbewegen müssen als die kleineren. Und darauf weisen ja auch thatsächlich die Beobachtungen hin.



Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(I. Theil)

von

### Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1894.)

Das vor mehr als zwei Jahrhunderten aufgestellte Hooke'sche¹ Gesetz: \*Ut tensio, sic vis«, d. i. das Gesetz der Proportionalität der Spannungen und der gleichzeitigen Deformationen bildet noch heute die gewöhnliche Grundlage der Elasticitätstheorie, denn die innerhalb der Elasticitätsgrenzen gewöhnlich als allgemein giltig angenommenen Elasticitätsgrundgesetze, die bekanntlich für isotrope Substanzen zuerst von Navier,² Poisson,³ Cauchy⁴ aus der Wechselwirkung der Moleküle theoretisch deducirt worden sind, setzen voraus, dass die

<sup>1</sup> Robert Hooke, Lectures de potentia restitutiva or of Spring« (Philosophical tracts and collections, 1678). Das bekannte Anagramm ceiiinosssituv dieses Gesetzes findet sich schon in Hooke's Decription of Helioscopes« (1676) vor.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Navier, »Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques« (Mémoires de l'Académie des sciences, 1824, Tome VII, p. 375 e. s.).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques « (Mémoires de l'Académie des sciences. Tome VIII, 1828, p. 357 e. s.).

<sup>4</sup> Cauchy, \*Exercises de mathém. Tome III, p. 188 (1828) und Tome IV, p. 129 (1829).

Spannungen lineare Functionen der Deformationsgrössen sind, indem Glieder, welche in Bezug auf die letzteren von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden. Nur das fragliche Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten, welches nach der Moleculartheorie sich für sämmtliche isotrope Körper im Gegensatze zu den Beobachtungsresultaten als constant ergab, war der Anlass von mannigfachen theoretischen und experimentellen Untersuchungen. Zwar wurde hie und da durch manche Beobachtungsergebnisse der Zweifel wachgerufen, ob das in den meisten Fällen wohl durch die Beobachtungen (von Wertheim, Edlund, Morin u. A.) bestätigte Proportionalitätsgesetz eine unbeschränkte Giltigkeit habe. Doch erst in neuerer Zeit ist durch genaue Beobachtungen von A. Miller<sup>1</sup> und von J. O. Thompson<sup>2</sup> festgestellt worden, dass selbst vollkommen elastische feste Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau befolgen, sondern dass dasselbe nur ein Näherungsgesetz ist und dass dementsprechend der sogenannte Elasticitätsmodul nicht als eine Elasticitätsconstante anzusehen ist, sondern dass derselbe mit zunehmender Belastung abnimmt. Diese Beobachtungsergebnisse und überdies gewisse theoretische, mit den Erfahrungsthatsachen nicht in Einklang zu bringende Folgerungen, zu welchen die Anwendung der derzeit herrschenden Elasticitätsgrundgesetze auf Untersuchungen aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie geführt haben, bewogen den Verfasser, auf theoretischem Wege die bei der Berechnung der Spannungen in isotropen Substanzen zu den bekannten linearen Gliedern hinzuzufügenden Glieder, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind, zu ermitteln, beziehungsweise das Potential der inneren Kräfte bis auf Glieder dritter Ordnung genau zu berechnen, und diese theoretischen Untersuchungen bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> A. Miller, Ȇber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elasticitätsmoduls« (Abhandlungen der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften, II. Classe, Bd. 16, Jahrg. 1888).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Jos. Osgood Thompson, Ȇber das Gesetz der elastischen Dehnung« (Wiedemann's Annalen, Bd. 44, Jahrg. 1891, S. 555—576).

Ein Element irgend eines festen oder flüssigen Körpers werde unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte bei constant bleibender Temperatur deformirt. Infolge dieser Deformation erlangen die anfänglichen, zur Zeit  $t_0$  bestehenden und auf ein an der Deformation des Körpers nicht theilnehmendes, orthogonales Axensystem sich beziehenden Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes m, welcher durch diese Deformation zur beliebigen Zeit t in die Lage M gelangt, zu dieser Zeit t die Werthe XYZ. Durch  $\xi \eta \xi$  seien die als einwerthige und stetige Functionen von xyz und t vorausgesetzten Coordinatenänderungen (Componenten der Verschiebung) bezeichnet, so dass

$$X = x + \xi$$

$$Y = y + \eta$$

$$Z = z + \xi$$
(1)

ist.

Da in diesen Gleichungen die Grössen xyz von t unabhängig sind, während XYZ Functionen von xyz und t sind, so sind die Geschwindigkeitscomponenten  $u_xu_yu_z$  des Punktes M zur Zeit t durch die partiellen Differentialquotienten

$$u_{x} = \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$u_{y} = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$u_{z} = \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$(2)$$

bestimmt, welche gleichfalls Functionen der vier von einander unabhängigen Variablen xyzt sind. Die in der Elasticitätstheorie allgemein betrachteten Verschiebungsderivationen (shift-fluxions) für das dem Punkte M unmittelbar benachbarte, unendlich kleine Körperelement, dessen ursprüngliches Volum durch dv bezeichnet sei, sind zur Zeit t

$$\lambda_{x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ \lambda_{y} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \ \lambda_{z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\mu_{x} = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \ \mu_{y} = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \ \mu_{z} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\nu_{x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \ \nu_{y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ \nu_{z} = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$
(3)

Den Gleichungen (2) und (3) zufolge ist

$$\frac{\partial u_{x}}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_{x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{y}}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_{y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{z}}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_{z}}{\partial t} 
\frac{\partial u_{z}}{\partial y} = \frac{\partial \mu_{x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{x}}{\partial z} = \frac{\partial \mu_{y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{y}}{\partial x} = \frac{\partial \mu_{z}}{\partial t} 
\frac{\partial u_{y}}{\partial z} = \frac{\partial \nu_{x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{z}}{\partial x} = \frac{\partial \nu_{y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{x}}{\partial y} = \frac{\partial \nu_{z}}{\partial t}$$
(4)

Die Geschwindigkeitscomponenten eines dem Punkte m benachbarten Punktes m', dessen anfänglichen Coordinaten x+dx, y+dy, z+dz sind und welcher durch die stattgehabte Deformation zur Zeit t in die Lage M' gelangt, haben zu dieser Zeit t die Werthe

$$u_{x} + du_{x} = u_{x} + \frac{\partial u_{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial u_{x}}{\partial y} dx + \frac{\partial u_{x}}{\partial z} dz =$$

$$= u_{x} + \frac{\partial \lambda_{x}}{\partial t} dx + \frac{\partial v_{z}}{\partial t} dy + \frac{\partial \mu_{y}}{\partial t} dz$$

$$u_{y} + du_{y} = u_{y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} dy + \frac{\partial u_{y}}{\partial z} dz =$$

$$= u_{y} + \frac{\partial \mu_{z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \lambda_{y}}{\partial t} dy + \frac{\partial v_{x}}{\partial t} dz$$

$$u_{z} + du_{z} = u_{z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial x} dx + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} dy + \frac{\partial u_{z}}{\partial z} dz =$$

$$= u_{z} + \frac{\partial v_{y}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mu_{x}}{\partial t} dy + \frac{\partial \lambda_{z}}{\partial t} dz$$

$$= u_{z} + \frac{\partial v_{y}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mu_{x}}{\partial t} dy + \frac{\partial \lambda_{z}}{\partial t} dz$$

und die Coordinaten dieses Punktes M' zu derselben Zeit t sind X+dX, Y+dY, Z+dZ, wo

$$dX = d(x + \xi) = (1 + \lambda_x) \cdot dx + \nu_z \cdot dy + \mu_y \cdot dz$$

$$dY = d(y + \eta) = \mu_z \cdot dx + (1 + \lambda_y) \cdot dy + \nu_x \cdot dz$$

$$dZ = d(z + \xi) = \nu_y \cdot dx + \mu_x \cdot dy + (1 + \lambda_z) \cdot dz$$
(6)

ist.

Da diese Gleichungen in Bezug auf dx dy dz linear sind, so ist die Deformation eines unendlich kleinen Elementes eine homogene, und es müssen daher sämmtliche unendlich nahe an M gelegenen Punkte M', die ursprünglich innerhalb irgend eines Tetraëders dv gelegen sind, nach der Deformation in ihrer Gesammtheit ein zweites Tetraëder dV bilden.

Dasjenige elementare Tetraëder nun, dessen Eckpunkte  $m m_1 m_2 m_3$  ursprünglich die bezüglichen Coordinaten (x, y, z), (x+dx, y, z), (x, y+dy, z), (x, y, z+dz) besitzen und dessen anfängliches Volum  $dv = \frac{1}{6} dx . dy . dz$  ist, erlangt durch die Deformation zur Zeit t eine durch die neue Lage  $M M_1 M_2 M_3$  dieser Eckpunkte bestimmte Lage und Gestalt, für welche zufolge (6) die Coordinaten dieser vier Eckpunkte beziehungsweise [X, Y, Z],  $[X+(1+\lambda_x)dx, Y+\mu_z dx, Z+\nu_y . dx]$ ,  $[X+\nu_z . dy, Y+(1+\lambda_y)dy, Z+\mu_x . dy]$ ,  $[X+\mu_y . dz, Y+\nu_x . dz, Z+(1+\lambda_z)dz]$  sind. Demgemäss ist das Volum dV des Tetraëders  $M M_1 M_2 M_3$  bestimmt durch

$$dV = D. dv, (7)$$

wofern D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_{x}, & \mu_{z}, & \nu_{y} \\ \nu_{z}, & 1 + \lambda_{y}, & \mu_{x} \\ \mu_{y}, & \nu_{x}, & 1 + \lambda_{z} \end{vmatrix}$$
 (8)

bedeutet. Die Grösse der cubischen Dilatation  $\nu$  in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M ist demnach

$$v = \frac{dV - dv}{dv} = D - 1. \tag{9}$$

Die Componenten jener im Punkte M herrschenden Spannung, die sich auf ein Flächenelement bezieht, welches zur Zeit t im deformirten Körperelemente zur x-Axe, beziehungsweise y-Axe, beziehungsweise z-Axe normal ist, seien  $(X_xY_xZ_x)$ , beziehungsweise  $(X_yY_yZ_y)$ , beziehungsweise  $(X_zY_zZ_z)$ , während  $p_xp_yp_z$  die Componenten der beschleunigenden äusseren Kraft zu derselben Zeit t bedeuten mögen. Die normalen Componenten  $X_xY_yZ_z$  der Spannungen seien positiv oder negativ

168 J. Finger,

in Rechnung gezogen, je nachdem dieselben Druck- oder Zugspannungen sind. Es sei vorausgesetzt, dass zum mindesten in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M die Componenten  $p_x p_y p_z$  und die cubische Dichtigkeit  $\delta$  stetige Functionen der Punktcoordinaten und der Zeit t sind, so dass auch innerhalb desselben Bereiches die früher erwähnten Componenten der Spannung und die Glieder der Gleichungen (4) als stetige Functionen derselben Variablen angesehen werden können. Zur selben Zeit t ist dann den Gleichungen (4) zufolge beim Übergange von einem Punkte zum anderen das Differential der componentalen Beschleunigung der Bewegung parallel zu irgend einer Axe, etwa parallel zur x-Axe, nämlich

$$d\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} \cdot dx + \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} \cdot dy + \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2} \cdot dz$$

jedenfalls unendlich klein, so dass die Annahme gerechtfertigt ist, dass diese Beschleunigung  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$  innerhalb der ganzen Ausdehnung eines Parallelepipeds, dessen vom Punkte M ausgehende Kanten mit den drei Coordinatenaxen gleichgerichtet sind und die Längen  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  haben, dasselbe Qualitätszeichen besitzt, wofern diese Kanten entsprechend klein gewählt werden. Es hat sonach auch  $P_x = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t}$ , d. i. die X-Componente der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf irgend einen innerhalb dieses Parallelepipeds befindlichen materiellen Punkt von der Masse µ zur Zeit t einwirken, für alle Punkte des Parallelepipeds dasselbe Qualitätszeichen. Es kann demnach die auf alle diese Punkte sich erstreckende Summe  $\Sigma[P_x.u_x]$ , d. i. der Gesammteffect der auf dieselben einwirkenden Kräftecomponenten  $P_x$  gleichgesetzt werden dem Producte aus  $\Sigma P_x$ und irgend einem Mittelwerthe der diesen einzelnen Punkten entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten, der durch  $v_x$ bezeichnet sei. Anderseits ist, wenn  $e_x$  den mittleren Effect dieser Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers bedeutet, dieser Gesammteffect auch durch  $e_x$ .  $\Delta X$ .  $\Delta Y$ .  $\Delta Z$  ausdrückbar, demnach

$$e_x \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z = \Sigma [P_x \cdot u_x] = v_x \cdot \Sigma P_x.$$
 (10)

Für die zwischen den einzelnen materiellen Punkten  $\mu$  des Parallelepipeds gegenseitig wirkenden, anziehenden, beziehungsweise abstossenden inneren Kräfte ist  $\Sigma P_x = 0$ , so dass bei der Bildung von  $\Sigma P_x$  blos die X-Componenten der auf dieses Parallelepiped wirkenden äusseren Kräfte zu berücksichtigen sind, nämlich die auf die Masse  $\delta.\Delta X\Delta Y\Delta Z$  des Parallelepipeds einwirkende äussere Kraft  $\delta.\Delta X\Delta Y\Delta Z$ .  $p_x$  (wo durch die oberhalb einer Bezeichnung beigefügten Querstriche hier und in der Folge die Mittelwerthe angedeutet sein mögen), ferner die Druckkräfte, welche auf die zur x-Axe senkrechten Seitenflächen  $\Delta Y.\Delta Z$  seitens der das Parallelepiped umschliessenden Masse ausgeübt werden, nämlich

$$\bar{X}_x \cdot \Delta Y \Delta Z$$
 und  $-(\bar{X}_x + \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} \cdot \Delta X) \cdot \Delta Y \Delta Z$ ,

ferner die auf die Seitenflächen  $\Delta Z \Delta X$  wirkenden Schubkräfte

$$\overline{X}_y \cdot \Delta Z \Delta X$$
 und  $-(\overline{X}_y + \frac{\Delta_y \overline{X}_y}{\Delta Y} \cdot \Delta Y) \cdot \Delta Z \Delta X$ 

und schliesslich die auf die Fläche  $\Delta X \Delta Y$  entfallenden Schub-kräfte

$$\overline{X}_z \cdot \Delta X \Delta Y$$
 und  $-(\overline{X}_z + \frac{\Delta_z \overline{X}_z}{\Delta Z} \Delta Z) \cdot \Delta X \Delta Y$ .

Sonach ist der Gleichung (10) zufolge

$$e_x = v_x \left[ \bar{\delta} \cdot p_x - \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} - \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} - \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} \right].$$

Um nun den auf die Volumeinheit des deformirten Körpers entfallenden Effect der inneren Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten des Parallelepipeds wirken, zu bestimmen, hat man zunächst den Effect der Kraft  $\bar{\delta}.\Delta X\Delta Y\Delta Z.\bar{p}_x$  und die Effecte der oberwähnten, auf die Seitenflächen wirkenden sechs Kräfte, nämlich die Effecte  $\bar{X}_x.\Delta Y\Delta Z.\bar{u}_x = \Delta Y\Delta Z.(\bar{X}_x\bar{u}_x)$  und

$$-\Delta Y \Delta Z. (\overline{X_x u_x} + \frac{\Delta_x (\overline{X_x u_x})}{\Delta X} \cdot \Delta X)$$

u. s. w. von  $e_x$ .  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  in Abzug zu bringen und hierauf durch  $\Delta X$ .  $\Delta Y$ .  $\Delta Z$  zu dividiren, wodurch beim Übergange zu den Grenzwerthen für  $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$  nach Einsetzung von  $u_x$  statt  $v_x$  sich als Effect  $e_1$  der X-Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M offenbar der Werth ergibt:

$$e_{1} = \left[ \frac{\partial (X_{x} u_{x})}{\partial X} - u_{x} \frac{\partial X_{x}}{\partial X} \right] + \left[ \frac{\partial (X_{y} u_{x})}{\partial Y} - u_{x} \frac{\partial X_{y}}{\partial Y} \right] + \left[ \frac{\partial (X_{z} u_{x})}{\partial Z} - u_{x} \frac{\partial X_{z}}{\partial Z} \right] = X_{x} \frac{\partial u_{x}}{\partial X} + X_{y} \frac{\partial u_{x}}{\partial Y} + X_{z} \frac{\partial u_{x}}{\partial Z}.$$
(11)

Auf gleiche Art kann man für den Effect  $e_2$  der Y-Componenten und den Effect  $e_3$  der Z-Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers die Werthe bestimmen:

$$e_{2} = Y_{x} \frac{\partial u_{y}}{\partial X} + Y_{y} \frac{\partial u_{y}}{\partial Y} + Y_{z} \frac{\partial u_{y}}{\partial Z}$$

$$e_{3} = Z_{x} \frac{\partial u_{z}}{\partial X} + Z_{y} \frac{\partial u_{z}}{\partial Y} + Z_{z} \frac{\partial u_{z}}{\partial Z}$$
(12)

Sonach ist der Gesammteffect dE der in dem dem Punkte M unmittelbar benachbarten unendlich kleinen Volumelemente dV zur Zeit t wirkenden inneren Kräfte bestimmt durch

$$dE = (e_1 + e_2 + e_3) \, dV. \tag{13}$$

Demgemäss ist die elementare mechanische Arbeit  $da_i$  dieser inneren Kräfte, die in dem der Zeit t unmittelbar angrenzenden Zeitelemente dt geleistet wird, bestimmbar aus der Gleichung

$$da_i = dE \cdot dt = (e_1 + e_2 + e_3) \cdot dV \cdot dt.$$
 (14)

Da die Coordinatenänderungen  $\xi \eta \zeta$  einwerthige Functionen der Variablen xyz und t sind, so können auch, wofern man die drei Gleichungen (1) berücksichtigt, auch xyz als Functionen von XYZ und t betrachtet werden, und es sind dann auch  $\xi = X - x$ ,  $\eta = Y - y$ ,  $\zeta = Z - z$  und daher auch die

Geschwindigkeitscomponenten  $u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,  $u_y = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,  $u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$  als Functionen derselben Variablen XYZ und t anzusehen, wie dies die Glieder der Gleichungen (11) und (12) erheischen.

Ist also u irgend eine dieser drei Geschwindigkeitscomponenten, so ist, da u bei gleich bleibendem t bloss eine Function von XYZ ist, welche letzteren wiederum Functionen von xyz sind, die durch die Gleichungen (1) bestimmt sind,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

Demnach ist den Gleichungen (1) und (3) zufolge

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot (1 + \lambda_x) + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \mu_z + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \nu_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \nu_z + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot (1 + \lambda_y) + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \mu_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \mu_y + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \nu_x + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot (1 + \lambda_z)$$

Bezeichnet man durch  $l_x$ ,  $m_z$ ,  $n_y$ ... die den einzelnen Gliedern  $1+\lambda_x$ ,  $\mu_z$ ,  $\nu_y$ ... der durch (8) bestimmten Determinante D adjungirten Unterdeterminanten, so ist den letzten drei Gleichungen zufolge

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial X} = l_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_z \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + m_y \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot D \cdot \frac{\partial u}{\partial Y} = m_z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + l_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + n_x \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial Z} = n_y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + m_x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + l_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Wendet man diese Gleichungen der Reihe nach auf die Geschwindigkeitscomponenten  $u_x u_y u_z$  an, so nehmen die Gleichungen (11) und (12) nach ihrer Multiplication mit D bei Beachtung von (4) folgende Gestalt an:

$$e_{1} \cdot D = (l_{x} \cdot X_{x} + m_{z} \cdot X_{y} + n_{y} \cdot X_{z}) \cdot \frac{\partial \lambda_{x}}{\partial t} + (n_{z} \cdot X_{x} + l_{y} \cdot X_{y} + m_{x} \cdot X_{z}) \cdot \frac{\partial \nu_{z}}{\partial t} + (m_{y} \cdot X_{x} + n_{x} \cdot X_{y} + l_{z} \cdot X_{z}) \cdot \frac{\partial \mu_{y}}{\partial t}$$

$$= e_{2} \cdot D = (l_{x} \cdot Y_{x} + m_{z} \cdot Y_{y} + n_{y} \cdot Y_{z}) \cdot \frac{\partial \mu_{z}}{\partial t} + (n_{z} \cdot Y_{x} + l_{y} \cdot Y_{y} + m_{x} \cdot Y_{z}) \cdot \frac{\partial \lambda_{y}}{\partial t} + (m_{y} \cdot Y_{x} + n_{x} \cdot Y_{y} + l_{z} \cdot Y_{z}) \cdot \frac{\partial \nu_{x}}{\partial t}$$

$$= e_{3} \cdot D = (l_{x} \cdot Z_{x} + m_{z} \cdot Z_{y} + n_{y} \cdot Z_{z}) \cdot \frac{\partial \nu_{y}}{\partial t} + (n_{z} \cdot Z_{x} + l_{y} \cdot Z_{y} + m_{x} \cdot Z_{z}) \cdot \frac{\partial \mu_{x}}{\partial t} + (m_{y} \cdot Z_{x} + n_{x} \cdot Z_{y} + l_{z} \cdot Z_{z}) \cdot \frac{\partial \lambda_{z}}{\partial t}$$

$$+ (m_{y} \cdot Z_{x} + n_{x} \cdot Z_{y} + l_{z} \cdot Z_{z}) \cdot \frac{\partial \lambda_{z}}{\partial t}$$

Substituirt man nun die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von  $e_1e_2e_3$  in die Gleichung (14), so nimmt dieselbe, da nach (7)  $dV = D \cdot dv$  ist, die Form an:

$$da_{i} = [(L_{x}.d\lambda_{x} + N_{z}.d\nu_{z} + M_{y}.d\mu_{y}) + (M_{z}.d\mu_{z} + L_{y}.d\lambda_{y} + N_{x}.d\nu_{x}) + (N_{y}.d\nu_{y} + M_{x}.d\mu_{x} + L_{z}.d\lambda_{z})].dv,$$
 (16)

wo

$$L_{x} = l_{x}.X_{x} + m_{z}.X_{y} + n_{y}.X_{z} \qquad M_{z} = l_{x}.Y_{x} + m_{z}.Y_{y} + n_{y}.Y_{z}$$

$$N_{z} = n_{z}.X_{x} + l_{y}.X_{y} + m_{x}.X_{z} \qquad L_{y} = n_{z}.Y_{x} + l_{y}.Y_{y} + m_{x}.Y_{z}$$

$$M_{y} = m_{y}.X_{x} + n_{x}.X_{y} + l_{z}.X_{z} \qquad N_{x} = m_{y}.Y_{x} + n_{x}.Y_{y} + l_{z}.Y_{z}$$

$$N_{y} = l_{x}.Z_{x} + m_{z}.Z_{y} + n_{y}.Z_{z}$$

$$M_{x} = n_{z}.Z_{x} + l_{y}.Z_{y} + m_{x}.Z_{z}$$

$$L_{z} = m_{y}.Z_{x} + n_{x}.Z_{y} + l_{z}.Z_{z}$$

$$(17)$$

Setzt man nun für diese inneren Kräfte ein Potential dU voraus, (indem man etwa annimmt, dass die zwischen je zwei Massenpunkten des betrachteten Massenelementes wirkenden inneren Kräfte anziehende oder abstossende Kräfte sind, die von den constant bleibenden Massen dieser Massenpunkte oder überhaupt von gewissen, für jeden einzelnen Massenpunkt charakteristischen Constanten und überdies blos von der variablen Entfernung der beiden auf einander einwirkenden Massenpunkte abhängen) und bezeichnet man durch f den Potential-

werth für die Volumeinheit des anfänglichen Volums dv des betrachteten Massenelementes, so ist

$$dU = f. dv. (18)$$

Für den ganzen Körper wäre das Potential durch das auf das ganze anfängliche (primitive) Volum v desselben auszudehnende Integral  $U = \int f \, dv$  bestimmt.

Da für ein gegebenes Körperelement das Potential dU blos von der veränderlichen relativen Lage der einzelnen Punkte dieses Elementes, sonach blos von den einzelnen relativen Coordinaten dX, dY, dZ dieser Punkte abhängig ist, und da ferner diese Grössen dX, dY, dZ den Gleichungen (6) zufolge bei einem gegebenen Körperelement (bei welchem die den einzelnen Punkten desselben ursprünglich zukommenden Werthe von dx, dy, dz, wie auch dv als constante Grössen anzusehen sind) lediglich Functionen der 9 Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \lambda_z \mu_x \dots$  sind, so ist nothwendigerweise auch das Potential dU und der Gleichung (18) gemäss auch f blos eine Function dieser 9 variablen, von einander unabhängigen Verschiebungsderivationen.

Dem Begriffe des Potentials entsprechend muss aber das dem Zeitelemente dt entsprechende Differential dieser Function dU, nämlich df. dv, der elementaren Arbeit  $da_i$  der inneren Kräfte, die durch (16) bestimmt ist, stets gleich sein, was, wie aus der Form des Ausdruckes (16) ersichtlich ist, nur dann möglich ist, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_{x}} = L_{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu_{z}} = M_{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu_{y}} = N_{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_{z}} = N_{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_{y}} = L_{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu_{x}} = M_{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_{y}} = M_{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu_{x}} = N_{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_{z}} = L_{z}$$
(19)

ist. Setzt man diese Werthe von  $L_x N_z \dots$  in (17) ein und bestimmt aus diesen linearen Gleichungen die unbekannten Span-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Identificirt man, was häufig geschieht, das Potential mit der potenziellen Energie, so muss es hier heissen:  $\rightarrow$ entgegengesetzt gleich $\leftarrow$ . Es ist in diesem Falle, wenn man nämlich diesen letzteren Begriff des Potentials festhalten will, in der ganzen Abhandlung nur statt f durchwegs zu setzen (--f).

nungscomponenten  $X_xX_y...$ , so findet man das folgende für unsere Zwecke wichtige System von Gleichungen:

$$D. X_{x} = (1 + \lambda_{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{x}} + \nu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{z}} + \mu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{y}}$$

$$D. X_{y} = \mu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{x}} + (1 + \lambda_{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{z}} + \nu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{y}}$$

$$D. X_{z} = \nu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{x}} + \mu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{z}} + (1 + \lambda_{z}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{y}}$$

$$D. Y_{x} = (1 + \lambda_{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{z}} + \nu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{y}} + \mu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{x}}$$

$$D. Y_{y} = \mu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{z}} + (1 + \lambda_{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{y}} + \nu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{x}}$$

$$D. Y_{z} = \nu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{z}} + \mu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{y}} + (1 + \lambda_{z}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{x}}$$

$$D. Z_{x} = (1 + \lambda_{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{y}} + \nu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{x}} + \mu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{z}}$$

$$D. Z_{y} = \mu_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{y}} + (1 + \lambda_{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{x}} + \nu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{z}}$$

$$D. Z_{z} = \nu_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu_{y}} + \mu_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu_{x}} + (1 + \lambda_{z}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_{z}}$$

Aus diesen streng richtigen Gleichungen ist zu ersehen, dass die allgemein übliche Identificirung der Spannungscomponenten  $X_x X_y \dots$  mit den partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial f}{\partial \lambda_x}, \frac{\partial f}{\partial \nu_z} \dots$  strenge genommen unstatthaft ist und nur dann gestattet ist, wenn man in erster Annäherung bei der Bestimmung der Spannungscomponenten von allen Gliedern, welche irgend ein Product aus diesen Differentialquotienten und den Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \nu_z \dots$  enthalten, absieht.

Die hier mit f bezeichnete, auf die Volumeinheit bezogene Potentialfunction f wird allgemein in allen den vielen Handund Lehrbüchern, welche die Theorie elastischer Körper behandeln, wie auch bei sämmtlichen für die Praxis so überaus wichtigen technischen Anwendungen als eine bezüglich der Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \mu_z \nu_y \dots$  rationale homogene Function zweiten Grades angenommen, die lediglich Glieder zweiter

Ordnung enthält. Diese willkürliche Annahme ist nicht vollkommen gerechtfertigt. Zunächst liegt nach der Ansicht des Verfassers kein zwingender Grund vor, von den linearen Gliedern ganz abzusehen oder, was dasselbe besagt, anzunehmen, dass in jenem als deformationslos angenommenen anfänglichen Zustande, von welchem aus die in Rechnung gebrachte Deformation in Betracht gezogen wird, absolut keine Spannung im Innern eines Körpers vorhanden ist, - eine Annahme, die umsoweniger gerechtfertigt ist, als dieser Zustand nicht stets derselbe ist, sondern wesentlich von der Temperatur des Körpers abhängt, deren Änderung stets eine Deformation zur Folge hat (ausser man würde, was gewöhnlich nicht geschieht, die Deformation auf jenen Nullpunkt der Temperatur, für welchen eine jegliche Spannung den Werth Null hat, als Ausgangspunkt einer jeden in Betracht gezogenen Deformation beziehen). Für manche Untersuchungen ist es überdies nicht gestattet, die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \mu_z \dots$  zu vernachlässigen, da diese letzteren von demselben Grade sind, wie das Verhältniss der Deformationen zu den ursprünglichen Raumgrössen, das, wenn auch die Dimensionen eines unendlich kleinen Körperelementes nach der Deformation unendlich klein bleiben, dennoch in manchen Fällen nicht so klein ist, dass von höheren Potenzen desselben abgesehen werden kann.

Es soll demnach der im Vorworte gestellten Aufgabe gemäss in dieser Abhandlung die Potentialfunction f als eine ganze rationale Function dritter Ordnung vorausgesetzt werden, und zwar soll von nun an die Betrachtung sich blos auf ein im anfänglichen Zustande elastisch isotropes Körperelement dv beschränken.

Die bedungene elastische Isotropie soll lediglich die Bedeutung haben, dass die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei denselben Coordinatenänderungen von der Lage des als orthogonal vorausgesetzten Coordinatensystems zum Körperelemente unabhängig ist, so zwar, dass, wenn man in dem früher betrachteten elementaren Tetraëder  $m m_1 m_2 m_3$ , welches durch die Deformation die Gestalt  $M M_1 M_2 M_3$  erlangt, die senkrechten Kanten  $m m_1$ ,  $m m_2$  und  $m m_3$  als gleich voraussetzt, die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei dieser Deformation,

daher auch das Potential dU = f.dv denselben Werth beibehält, wie in dem Falle, in welchem das Tetraëder öders  $MM_1M_2M_3$  etwa um die gegen alle drei Coordinatenaxen gleichgeneigte, von M ausgehende Mittellinie, m m<sub>1</sub>m<sub>2</sub>m<sub>3</sub> durch die Deformation im Körper jene Lage und Gestalt erhält, die sich durch Drehung des Tetra-

sei es in einem oder dem anderen Sinne bei einer Amplitude von 120° als Schlusslage ergeben würde, durch

Worten, durch die Isotropie ist hier vorausgesetzt, dass die Potentialfunction f ihren Werth nicht ändert, welche Drehung die Axen xyz in die Lage yzx, beziehungsweise zxy gelangen und die durch (6) bestimmten Grössen dX, dY, dZ die Werthe dY, dZ, dX, beziehungsweise dZ, dX, dY annehmen würden. Mit anderen wenn man die Indices der beliebig angenommenen Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt. Wenn man demgemäss diese Function f der Variabeln  $\lambda_x \mu_z \nu_y \dots$  in eine Reihe von der Form einer ganzen rationalen Function der letzteren entwickelt, so müssen die Coëssienten A, B, C... jener Glieder, die sich in ihrem variablen Theile nur dadurch von einander unterscheiden, dass die Indices xyz der Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt sind, einander gleich sein, so dass diese Function f, wofern man von  $+ \left[ A_1' \alpha_1' + A_2' \alpha_2' + A_3' \alpha_3' + B_1' \beta_1' + B_2' \beta_2' + B_3' \beta_3' + C_1' \gamma_1' + C_2' \gamma_2' + C_1' \gamma_3' + E_1 \cdot \varepsilon + E_1' \varepsilon_1' + E_1' \varepsilon_1' + E_2' \varepsilon_2' + E_3' \varepsilon_3' + E_2' \varepsilon_3' + E_2' \varepsilon_3' + E_2' \varepsilon_3' + E_2' \varepsilon_3' + E_3' \varepsilon_3' + E$  $+[B_{\scriptscriptstyle 1}\beta_{\scriptscriptstyle 1}+B_{\scriptscriptstyle 2}\beta_{\scriptscriptstyle 2}+B_{\scriptscriptstyle 3}\beta_{\scriptscriptstyle 3}+C_{\scriptscriptstyle 1}\gamma_{\scriptscriptstyle 1}+C_{\scriptscriptstyle 2}\gamma_{\scriptscriptstyle 2}+C_{\scriptscriptstyle 3}\gamma_{\scriptscriptstyle 3}+D_{\scriptscriptstyle 1}\delta_{\scriptscriptstyle 1}+D_{\scriptscriptstyle 2}\delta_{\scriptscriptstyle 2}+D_{\scriptscriptstyle 3}\delta_{\scriptscriptstyle 3}+E_{\scriptscriptstyle 1}\varepsilon_{\scriptscriptstyle 1}+E_{\scriptscriptstyle 2}\varepsilon_{\scriptscriptstyle 2}+E_{\scriptscriptstyle 3}\varepsilon_{\scriptscriptstyle 3}]+$  $+A_{12}\alpha_{12}+A_{21}\alpha_{21}+A_{23}\alpha_{23}+A_{32}\alpha_{32}+A_{31}\alpha_{31}+A_{13}\alpha_{13}+B_{12}\beta_{12}+B_{21}\beta_{21}+B_{23}\beta_{23}+B_{32}\beta_{32}+B_{31}\beta_{31}+B_{13}\beta_{13}+B_$ Gliedern höherer Ordnung als der dritten absieht, folgende Form annehmen muss:  $f = A_0 + [A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3] +$ 

wo die Coëssienten A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>... von den Verschiebungsderivationen und von der Wahl der Axenrichtungen  $+C_{12}\zeta_{12}+C_{21}\zeta_{1}+C_{23}\zeta_{21}+C_{32}\zeta_{32}+C_{31}\zeta_{31}+C_{13}\zeta_{13}+D_{12}\delta_{12}+D_{21}\delta_{21}+D_{23}\delta_{23}+D_{32}\delta_{32}+D_{31}\delta_{31}+D_{13}\delta_{13}\right]$ xyz unabhängig sind und die 54 variablen Factoren a a 2... folgende Werthe haben: (22)

 $\delta_{12} = \lambda_y \lambda_z (\mu_y + \mu_z) + \lambda_z \lambda_x (\mu_z + \mu_x) + \lambda_x \lambda_y (\mu_x + \mu_y), \quad \delta_{23} = \mu_y \mu_z (\nu_y + \nu_z) + \mu_z \mu_x (\nu_z + \nu_x) + \mu_x \mu_y (\nu_x + \nu_y),$  $\partial_{21} = \mu_{3} \, \mu_{2} (\lambda_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{z} \, \mu_{x} (\lambda_{z} + \lambda_{x}) + \mu_{x} \, \mu_{y} (\lambda_{x} + \lambda_{y}), \quad \delta_{32} = \nu_{y} \, \nu_{z} (\mu_{y} + \mu_{z}) + \nu_{z} \, \nu_{x} (\mu_{z} + \mu_{x}) + \nu_{x} \, \nu_{y} (\mu_{x} + \mu_{y}),$  $\epsilon_1' = \mu_\lambda \nu_x (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_\nu \nu_y (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z \nu_z (\lambda_x + \lambda_y), \quad \epsilon_2' = \nu_x \lambda_x (\mu_y + \mu_z) + \nu_y \lambda_y (\mu_z + \mu_x) + \nu_z \lambda_z (\mu_x + \mu_y),$  $\gamma_{18}=\lambda_y\lambda_z\mu_x+\lambda_z\lambda_x\mu_y+\lambda_x\lambda_y\mu_z$ ,  $\gamma_{13}=\mu_y\mu_z\nu_x+\mu_z\mu_xv_y+\mu_x\mu_yv_z$ ,  $\gamma_{31}=\nu_y\nu_z\lambda_x+\nu_z\nu_x\lambda_y+\nu_x\nu_y\lambda_z$  $\gamma_{21}=\mu_{3}\mu_{2}\lambda_{x}+\mu_{z}\mu_{x}\lambda_{y}+\mu_{x}\mu_{y}\lambda_{z},\quad \gamma_{32}=\nu_{y}\nu_{z}\mu_{x}+\nu_{z}\nu_{x}\mu_{y}+\nu_{x}\nu_{y}\mu_{z},\quad \gamma_{13}=\lambda_{y}\lambda_{z}\nu_{x}+\lambda_{z}\lambda_{x}\nu_{y}+\lambda_{x}\lambda_{y}\nu_{z}$  $eta_{21} = \mu_x^2(\lambda_y + \lambda_x) + \mu_y^2(\lambda_x + \lambda_x) + \mu_x^2(\lambda_x + \lambda_y), \quad eta_{32} = \nu_x^2(\mu_y + \mu_x) + \nu_y^2(\mu_x + \mu_x) + \nu_x^2(\mu_x + \mu_y),$  $eta_1' = \lambda_1^2(\lambda_y + \lambda_z) + \lambda_2^2(\lambda_z + \lambda_x) + \lambda_2^2(\lambda_x + \lambda_y), \quad eta_2' = \mu_1^2(\mu_y + \mu_z) + \mu_2^2(\mu_z + \mu_x) + \mu_2^3(\mu_x + \mu_y),$  $eta_{12} = \lambda_x^2(\mu_y + \mu_z) + \lambda_y^2(\mu_z + \mu_x) + \lambda_z^2(\mu_x + \mu_y), \quad eta_{23} = \mu_x^2(\nu_y + \nu_z) + \mu_y^2(\nu_z + \nu_x) + \mu_z^2(\nu_x + \nu_y)$  $\mathbf{e}_1 = \mu_x(\nu_y + \nu_z) + \mu_y(\nu_z + \nu_x) + \mu_z(\nu_x + \nu_y), \quad \mathbf{e}_2 = \nu_x(\lambda_y + \lambda_z) + \nu_y(\lambda_z + \lambda_x) + \nu_z(\lambda_x + \lambda_y)$  $lpha_{12}=\lambda_x^2\mu_x+\lambda_y^2\mu_y+\lambda_x^2\mu_z,\quad lpha_{23}=\mu_x^2\nu_x+\mu_y^2\nu_y+\mu_z^2\nu_z,\quad lpha_{31}=\nu_x^2\lambda_x+\nu_y^2\lambda_y+\nu_z^2\lambda_z$  $lpha_{21}=\mu_x^2\lambda_x+\mu_y^2\lambda_y+\mu_x^2\lambda_z,\quad lpha_{32}=\nu_x^2\mu_x+\nu_y^2\mu_y+\nu_z^2\mu_z,\quad lpha_{13}=\lambda_x^2\nu_x+\lambda_y^2\nu_y+\lambda_z^2\nu_z$  $r_1 = \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y$ ,  $r_1 = \mu_y \mu_z + \mu_z \mu_x + \mu_x \mu_y$ ,  $r_2 = \nu_y \nu_z + \nu_z \nu_x + \nu_x \nu_y$   $\delta_1 = \mu_x \nu_x + \mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z$ ,  $\delta_2 = \nu_x \lambda_x + \nu_y \lambda_y + \nu_x \lambda_z$ ,  $\delta_3 = \lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z$  $\varepsilon = \lambda_x \mu_y \nu_z + \lambda_y \mu_z \nu_x + \lambda_z \mu_x \nu_y, \quad \varepsilon' = \lambda_x \mu_z \nu_y + \lambda_y \mu_x \nu_z + \lambda_z \mu_y \nu_x$  $\begin{aligned} \epsilon_3 &= \lambda_x (\mu_y + \mu_z) + \lambda_y (\mu_z + \mu_x) + \lambda_z (\mu_x + \mu_y) \\ \alpha_1' &= \lambda_x^3 + \lambda_y^3 + \lambda_y^3, \quad \alpha_2' &= \mu_x^3 + \mu_y^3 + \mu_z^3, \quad \alpha_3' &= \nu_x^3 + \nu_y^3 + \nu_z^3 \end{aligned}$  $\beta_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2^2$ ,  $\beta_2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_2^2$ ,  $\beta_3 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_2^2$  $\delta_{13} = \lambda_y \lambda_z (\nu_y + \nu_z) + \lambda_z \lambda_x (\nu_z + \nu_x) + \lambda_x \lambda_y (\nu_x + \nu_y)$  $\epsilon_3' = \lambda_x \mu_x (\nu_y + \nu_z) + \lambda_y \mu_y (\nu_z + \nu_x) + \lambda_z \mu_z (\nu_x + \nu_y)$  $\partial_{31} = \nu_y \nu_z (\lambda_y + \lambda_z) + \nu_z \nu_x (\lambda_z + \lambda_x) + \nu_x \nu_y (\lambda_x + \lambda_y)$  $\gamma_1' = \lambda_x \lambda_y \lambda_z, \quad \gamma_2' = \mu_x \mu_y \mu_z, \quad \gamma_3' = \nu_x \nu_y \nu_z$  $eta_{31} = v_x^2(\lambda_y + \lambda_z) + v_y^2(\lambda_z + \lambda_x) + v_z^2(\lambda_x + \lambda_y)$  $eta_{13}=\lambda_x^2(v_y+v_z)+\lambda_y^2(v_z+v_x)+\lambda_z^2(v_x+v_y)$  $\beta_3' = \nu_x^2(\nu_y + \nu_z) + \nu_y^2(\nu_x + \nu_x) + \nu_z^2(\nu_x + \nu_y)$  $\gamma' = \lambda_x \mu_x \nu_x + \lambda_y \mu_y \nu_y + \lambda_z \mu_z \nu_z$ 

2" == N' + N' + N'

 $z_2 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ 

 $x_1 - \lambda - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 

Nun bestehen bekanntlich, da die Spannungen den ursprünglichen Annahmen zufolge stetige Functionen der Coordinaten sind, zwischen den Schubspannungen die von der Constitution des Körpers, von der Art der Bewegung und von der Form der Potentialfunction f vollkommen unabhängigen, allgemein giltigen Gleichungen:

$$Y_z - Z_y = 0$$

$$Z_x - X_z = 0$$

$$X_y - Y_x = 0$$

$$(23)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit der Determinante D und substituirt hierauf die Werthe aus (20), nachdem man die in (20) vorkommenden partiellen Derivationen der Function f mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) bestimmt hat, so ergeben sich nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zwischen den letzteren folgende Beziehungen:

Zunächst verschwinden die Coëfficienten:

$$A_2 = A_3 = C_2 = C_3 = D_2 = D_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0.$$
 (24)

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$B_{3} = B_{2}, A_{32} = A_{23}$$

$$A'_{3} = A'_{2} = \frac{1}{3} A_{32} = \frac{1}{3} A_{23}$$

$$B'_{3} = B'_{2} = \frac{1}{2} D_{23} = \frac{1}{2} D_{32} = B_{32} = B_{23}$$

$$A_{13} = A_{12}, B_{13} = B_{12}, C_{13} = C_{12}, D_{13} = D_{12}$$

$$D_{1} = 2B_{2} - A_{1}, C_{32} = C_{23}, A_{31} = A_{21}, B_{31} = B_{21}$$

$$C'_{3} = C'_{2} = C_{32} - D_{1} = C_{23} - (2B_{2} - A_{1})$$

$$B_{1} = B_{2} + \frac{1}{2} (C_{1} + D_{1}) = 2B_{2} + \frac{1}{2} C_{1} - \frac{1}{2} A_{1}$$

$$E = E' = C_{31} = C_{21}$$

$$E'_{3} = E'_{2} = D_{31} = D_{21}$$

$$C' = 2A_{21} - C_{1}$$

$$E'_{1} = 2(B_{21} - B_{1} + B_{2}) = 2B_{21} - C_{1} - 2B_{2} + A_{1}$$

$$(25)$$

Aus dem Umstande, dass die erstgenannten Coëfficienten  $A_2$  und  $A_3$  verschwinden, muss, wie aus (20), (21) und (22)

sofort zu ersehen ist, gefolgert werden, dass, wenn die durch (3) bestimmten Deformationselemente sämmtlich den Werth Null haben, auch alle Schubspannungen den Werth Null annehmen und dass überdies  $X_x = Y_y = Z_z = A_1$  ist, d. h. die im anfänglichen (primitiven) Zustande vorausgesetzte Isotropie bedingt die Abwesenheit jeglicher Schubspannung und die Gleichheit der normalen Spannungen nach allen Richtungen des Raumes im Elemente dv vor der betrachteten Deformation.

Drückt man mittelst der Gleichungen (24) und (25) alle Coëfficienten in (21) durch die 18 Coëfficienten  $A_0 A_1 C_1 B_2 A_1' B_1' C_1' A_{12} B_{12} C_{12} D_{12} A_{21} B_{21} C_{21} D_{21} A_{23} B_{23} C_{23}$  aus, substituirt man hierauf diese Werthe in (21) und berechnet schliesslich mit Hilfe der Gleichungen (20) die Componenten der Spannungen, so gelangt man bei Berücksichtigung der Werthe (22), wenn kürzehalber durch  $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$  die Summen

$$\varepsilon_{x} = \mu_{x} + \nu_{x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{y} = \mu_{y} + \nu_{y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{z} = \mu_{z} + \nu_{z} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$
(26)

bezeichnet werden, zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{split} D.\,X_{x} &= A_{1} + 4B_{2} \cdot \lambda_{x} + C_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) \\ &+ 2B_{2} \cdot (\mu_{y}^{2} + \nu_{z}^{2}) - C_{1}(\mu_{x}\nu_{x} + \mu_{y}\nu_{y} + \mu_{z}\nu_{z}) \\ &+ (4B_{2} + C_{1} - A_{1} + 3A_{1}') \cdot \lambda_{x}^{2} + B_{1}'(\lambda_{y}^{2} + \lambda_{z}^{2}) \\ &+ C_{1}' \cdot \lambda_{y}\lambda_{z} + (C_{1} + 2B_{1}') \cdot \lambda_{x}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) \\ &+ 2A_{12} \cdot \lambda_{x}\varepsilon_{x} + 2B_{12} \cdot \lambda_{x}(\varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}) + C_{12} \cdot (\lambda_{y}\varepsilon_{z} + \lambda_{z}\varepsilon_{y}) \\ &+ D_{12} \cdot [\lambda_{y}\varepsilon_{y} + \lambda_{z}\varepsilon_{z} + (\lambda_{y} + \lambda_{z})\varepsilon_{x}] \\ &+ A_{21} \cdot \varepsilon_{x}^{2} + B_{21} \cdot (\varepsilon_{y}^{2} + \varepsilon_{z}^{2}) + C_{21} \cdot \varepsilon_{y}\varepsilon_{z} + D_{21} \cdot \varepsilon_{x}(\varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}) \\ D.\,Y_{z} &= 2B_{2} \cdot \varepsilon_{x} + 2B_{2} \cdot (\mu_{x}\lambda_{y} + \nu_{x}\lambda_{z} + \nu_{y}\mu_{z}) \\ &+ A_{12} \cdot \lambda_{x}^{2} + B_{12} \cdot (\lambda_{y}^{2} + \lambda_{z}^{2}) + C_{12} \cdot \lambda_{y}\lambda_{z} + D_{12} \cdot \lambda_{x}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) \\ &+ 2A_{21} \cdot \lambda_{x}\varepsilon_{x} + 2B_{21} \cdot (\lambda_{y} + \lambda_{z})\varepsilon_{x} + C_{21}(\lambda_{y}\varepsilon_{z} + \lambda_{z}\varepsilon_{y}) \\ &+ D_{2i} \cdot [\lambda_{y}\varepsilon_{y} + \lambda_{z}\varepsilon_{z} + \lambda_{x}(\varepsilon_{y} + \varepsilon_{z})] \\ &+ A_{23} \cdot \varepsilon_{x}^{2} + B_{23} [\varepsilon_{y}^{2} + \varepsilon_{z}^{2} + 2\varepsilon_{x}(\varepsilon_{y} + \varepsilon_{z})] + C_{23} \cdot \varepsilon_{y}\varepsilon_{z} \end{split}$$

Die anderen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation von xyz und von XYZ.

Wie aus diesen Gleichungen zu ersehen ist, sind die Longitudinalspannungen  $X_xY_yZ_z$  von dem Werthe der Coëfficienten  $A_{23}$ ,  $B_{23}$  und  $C_{23}$ , dagegen die Schubspannungen  $Y_zZ_xX_y$  von den Coëfficienten  $A_1C_1A_1'B_1'C_1'$  vollkommen unabhängig.

Nun lässt sich bekanntlich in allen Fällen die durch die Gleichungen (6) bestimmte räumliche Änderung (Deformation) des betrachteten Körperelementes dv, wenn man von der translatorischen Verschiebung  $(\xi\eta\zeta)$  absieht, als zusammengesetzt ansehen aus einer reinen (rotationslosen) Deformation, bei welcher drei zu einander senkrechte Axen — die Deformationshauptaxen — ihre Lage im Raume nicht ändern, und aus einer Rotation dieses Körperelementes um den Punkt M.

Sind nun  $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ ,  $(\beta_x \beta_y \beta_z)$ ,  $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$  die Richtungscosinus der Deformationshauptaxen abc vor dieser Rotation, dagegen  $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$ ,  $(\beta'_x \beta'_y \beta'_z)$ ,  $(\gamma'_x \gamma'_y \gamma'_z)$  die schliesslichen Richtungscosinus derselben Axen nach erfolgter Rotation, durch welche sie die Lagen a'b'c' erlangen, sind ferner durch  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  die linearen Dilatationen (Elongationen) in der Richtung dieser drei Axen, d. i. die Hauptdilatationen (Hauptelongationen) bezeichnet, so dass die Halbaxen jenes Ellipsoids — des Deformationsellipsoids —, in welches eine Kugel vom Radius dl infolge der Deformation des Elementes dv übergeht, die Längen

$$a = \mu_{1} \cdot dl = (1 + \lambda_{1}) \cdot dl b = \mu_{2} \cdot dl = (1 + \lambda_{2}) \cdot dl c = \mu_{3} \cdot dl = (1 + \lambda_{3}) \cdot dl$$
(28)

erhalten, so bestehen bekanntlich stets folgende, aus (6) leicht deducirbare Beziehungen:

$$1 + \lambda_{x} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{x} \alpha'_{x} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{x} \beta'_{x} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{x} \gamma'_{x} 
\nu_{z} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{y} \alpha'_{x} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{y} \beta'_{x} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{y} \gamma'_{x} 
\mu_{y} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{z} \alpha'_{x} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{z} \beta'_{x} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{z} \gamma'_{x} 
\mu_{z} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{x} \alpha'_{y} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{x} \beta'_{y} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{x} \gamma'_{y} 
1 + \lambda_{y} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{y} \alpha'_{y} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{y} \beta'_{y} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{y} \gamma'_{y} 
\nu_{x} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{z} \alpha'_{y} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{z} \beta'_{y} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{z} \gamma'_{y} 
\nu_{y} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{x} \alpha'_{z} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{x} \beta'_{z} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{x} \gamma'_{z} 
\mu_{x} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{y} \alpha'_{z} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{y} \beta'_{z} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{y} \gamma'_{z} 
1 + \lambda_{z} = (1 + \lambda_{1}) \cdot \alpha_{z} \alpha'_{z} + (1 + \lambda_{2}) \cdot \beta_{z} \beta'_{z} + (1 + \lambda_{3}) \cdot \gamma_{z} \gamma'_{z}$$
(29)

Wenn durch  $\varphi \chi \psi$  die auf die ursprünglichen Lagen abc der Deformationshauptaxen bezogenen Richtungscosinus jenei Rotationsaxe A bezeichnet sind, um welche das Körperelement dv rotiren muss, damit abc in die Lage a'b'c' nach der Drehung um den Winkel  $\vartheta$  gelangt, und wenn  $(\alpha\beta\gamma)$ ,  $(\alpha'\beta'\gamma')$ ,  $(\alpha''\beta''\gamma'')$  die auf dieselben Axen abc bezogenen Richtungscosinus der Axen a'b'c' bedeuten, so ist  $^1$ 

$$\alpha = \varphi^{2} (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta$$

$$\beta = \varphi \chi (1 - \cos \vartheta) + \psi \sin \vartheta$$

$$\gamma = \varphi \psi (1 - \cos \vartheta) - \chi \sin \vartheta$$

$$\alpha' = \chi \varphi (1 - \cos \vartheta) - \psi \sin \vartheta$$

$$\beta' = \chi^{2} (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta$$

$$\gamma' = \chi \psi (1 - \cos \vartheta) + \varphi \sin \vartheta$$

$$\alpha'' = \psi \varphi (1 - \cos \vartheta) + \chi \sin \vartheta$$

$$\beta'' = \psi \chi (1 - \cos \vartheta) - \varphi \sin \vartheta$$

$$\gamma'' = \psi^{2} (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta$$

Sind sonach  $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$  die auf die ursprünglichen Coordinatenaxen xyz bezogenen Richtungscosinus der Rotationsaxe A, so ist

$$\varphi = \varphi_x \alpha_x + \varphi_y \alpha_y + \varphi_z \alpha_z = \varphi_x \alpha_x' + \varphi_y \alpha_y' + \varphi_z \alpha_z'$$

$$\chi = \varphi_x \beta_x + \varphi_y \beta_y + \varphi_z \beta_z = \varphi_x \beta_x' + \varphi_y \beta_y' + \varphi_z \beta_z'$$

$$\psi = \varphi_x \gamma_x + \varphi_y \gamma_y + \varphi_z \gamma_z = \varphi_x \gamma_x' + \varphi_y \gamma_y' + \varphi_z \gamma_z'$$

und

$$\alpha_{x} = \alpha \alpha'_{x} + \alpha' \beta'_{x} + \alpha'' \gamma'_{x} = (\varphi_{x} \alpha'_{x} + \varphi_{y} \alpha'_{y} + \varphi_{z} \alpha'_{z}) \cdot \varphi_{x} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \alpha'_{x} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{z} \alpha'_{y} - \varphi_{y} \alpha'_{z}) \cdot \sin \vartheta \\
\alpha_{y} = \alpha \alpha'_{y} + \alpha' \beta'_{y} + \alpha'' \gamma'_{y} = (\varphi_{x} \alpha'_{x} + \varphi_{y} \alpha'_{y} + \varphi_{z} \alpha'_{z}) \cdot \varphi_{y} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \alpha'_{y} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{x} \alpha'_{z} - \varphi_{z} \alpha'_{x}) \cdot \sin \vartheta \\
\alpha_{z} = \alpha \alpha'_{z} + \alpha' \beta'_{z} + \alpha'' \gamma'_{z} = (\varphi_{x} \alpha'_{x} + \varphi_{y} \alpha'_{y} + \varphi_{z} \alpha'_{z}) \cdot \varphi_{z} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \alpha'_{z} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{y} \alpha'_{x} - \varphi_{x} \alpha'_{y}) \cdot \sin \vartheta \\
\beta_{x} = \beta \alpha'_{x} + \beta' \beta'_{x} + \beta'' \gamma'_{x} = (\varphi_{x} \beta'_{x} + \varphi_{y} \beta'_{y} + \varphi_{z} \beta'_{z}) \cdot \varphi_{x} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \beta'_{x} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{z} \beta'_{y} - \varphi_{y} \beta'_{z}) \cdot \sin \vartheta \\
\beta_{y} = \beta \alpha'_{y} + \beta' \beta'_{y} + \beta'' \gamma'_{y} = (\varphi_{x} \beta'_{x} + \varphi_{y} \beta'_{y} + \varphi_{z} \beta'_{z}) \cdot \varphi_{y} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \beta'_{y} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{x} \beta'_{z} - \varphi_{z} \beta'_{x}) \cdot \sin \vartheta \\
\beta_{z} = \beta \alpha'_{z} + \beta' \beta'_{z} + \beta'' \gamma'_{z} = (\varphi_{x} \beta'_{x} + \varphi_{y} \beta'_{y} + \varphi_{z} \beta'_{z}) \cdot \varphi_{z} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \\
+ \beta'_{z} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{y} \beta'_{x} - \varphi_{x} \beta'_{y}) \cdot \sin \vartheta$$

<sup>1</sup> Siehe Jacobi, Euleri formulae de transformatione coordinatorum (Crelle's Journal, II. Bd., II. Heft, S. 188).

$$\gamma_{x} = \gamma \alpha'_{x} + \gamma' \beta'_{x} + \gamma'' \gamma'_{x} = (\varphi_{x} \gamma'_{x} + \varphi_{y} \gamma'_{y} + \varphi_{z} \gamma'_{z}) \cdot \varphi_{x} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \gamma'_{x} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{z} \gamma'_{y} - \varphi_{y} \gamma'_{z}) \cdot \sin \vartheta + \gamma'_{y} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \gamma'_{y} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \gamma'_{y} \cdot (1 - \cos \vartheta) + \gamma'_{y} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{x} \gamma'_{z} - \varphi_{z} \gamma'_{x}) \cdot \sin \vartheta + \gamma'_{y} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{x} \gamma'_{z} - \varphi_{z} \gamma'_{x}) \cdot \sin \vartheta + \gamma'_{z} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{y} \gamma'_{z} - \varphi_{z} \gamma'_{x}) \cdot \sin \vartheta + \gamma'_{z} \cdot \cos \vartheta + (\varphi_{y} \gamma'_{x} - \varphi_{x} \gamma'_{y}) \cdot \sin \vartheta$$
(30)

Durch Substitution dieser Werthe in (29) ergeben sich, wenn kürzehalber durch  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_x \tau_y \tau_z$  die mit den Dilatationen gleichartigen Grössen

$$\sigma_{x} = \lambda_{1} \alpha_{x}^{\prime 2} + \lambda_{2} \beta_{x}^{\prime 2} + \lambda_{3} \gamma_{x}^{\prime 2}$$

$$\sigma_{y} = \lambda_{1} \alpha_{y}^{\prime 2} + \lambda_{2} \beta_{y}^{\prime 2} + \lambda_{3} \gamma_{y}^{\prime 2}$$

$$\sigma_{z} = \lambda_{1} \alpha_{z}^{\prime 2} + \lambda_{2} \beta_{z}^{\prime 2} + \lambda_{3} \gamma_{z}^{\prime 2}$$

$$\tau_{x} = \lambda_{1} \alpha_{y}^{\prime} \alpha_{z}^{\prime} + \lambda_{2} \beta_{y}^{\prime} \beta_{z}^{\prime} + \lambda_{3} \gamma_{z}^{\prime} \gamma_{z}^{\prime}$$

$$\tau_{y} = \lambda_{1} \alpha_{z}^{\prime} \alpha_{x}^{\prime} + \lambda_{2} \beta_{z}^{\prime} \beta_{x}^{\prime} + \lambda_{3} \gamma_{z}^{\prime} \gamma_{x}^{\prime}$$

$$\tau_{z} = \lambda_{1} \alpha_{x}^{\prime} \alpha_{y}^{\prime} + \lambda_{2} \beta_{x}^{\prime} \beta_{y}^{\prime} + \lambda_{3} \gamma_{z}^{\prime} \gamma_{x}^{\prime}$$

$$\tau_{z} = \lambda_{1} \alpha_{x}^{\prime} \alpha_{y}^{\prime} + \lambda_{2} \beta_{x}^{\prime} \beta_{y}^{\prime} + \lambda_{3} \gamma_{z}^{\prime} \gamma_{x}^{\prime}$$

bezeichnet werden, folgende Gleichungen für die Derivationen der Verschiebungen  $\xi \eta \zeta$ 

$$\lambda_{x} = \sigma_{x} + \sin \vartheta \cdot [\tau_{z}\varphi_{z} - \tau_{y}\varphi_{y}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} \cdot [1 - \varphi_{x}^{2} + \sigma_{x} - \varphi_{x}(\sigma_{x}\varphi_{x} + \tau_{z}\varphi_{y} + \tau_{y}\varphi_{z})]$$

$$\nu_{z} = \tau_{z} - \sin \vartheta [\varphi_{z} + \sigma_{x}\varphi_{z} - \tau_{y}\varphi_{x}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{x}\varphi_{y} + \tau_{z} - \varphi_{y}(\sigma_{x}\varphi_{x} + \tau_{z}\varphi_{y} + \tau_{y}\varphi_{z})]$$

$$\mu_{y} = \tau_{y} + \sin \vartheta (\varphi_{y} + \sigma_{x}\varphi_{y} - \tau_{z}\varphi_{x}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{x}\varphi_{z} + \tau_{y} - \varphi_{z}(\sigma_{x}\varphi_{x} + \tau_{z}\varphi_{y} + \tau_{y}\varphi_{z})]$$

$$\mu_{z} = \tau_{z} + \sin \vartheta [\varphi_{z} + \sigma_{y}\varphi_{z} - \tau_{x}\varphi_{y}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{y}\varphi_{x} + \tau_{z} - \varphi_{x}(\tau_{z}\varphi_{x} + \sigma_{y}\varphi_{y} + \tau_{x}\varphi_{z})]$$

$$\lambda_{y} = \sigma_{y} + \sin \vartheta [\tau_{x}\varphi_{x} - \tau_{z}\varphi_{z}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} [1 - \varphi_{y}^{2} + \sigma_{y} - \varphi_{y}(\tau_{z}\varphi_{x} + \sigma_{y}\varphi_{y} + \tau_{x}\varphi_{z})]$$

$$\nu_{x} = \tau_{x} - \sin \vartheta [\varphi_{x} + \sigma_{y}\varphi_{x} - \tau_{z}\varphi_{y}]$$

$$-2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{y}\varphi_{z} + \tau_{x} - \varphi_{z}(\tau_{z}\varphi_{x} + \sigma_{y}\varphi_{y} + \tau_{x}\varphi_{z})]$$

$$\nu_{z} = \tau_{y} - \sin \vartheta [\varphi_{y} + \sigma_{z}\varphi_{y} - \tau_{x}\varphi_{z}] 
-2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{z}\varphi_{x} + \tau_{y} - \varphi_{x}(\tau_{y}\varphi_{x} + \tau_{x}\varphi_{y} + \sigma_{z}\varphi_{z})] 
\mu_{x} = \tau_{x} + \sin \vartheta [\varphi_{x} + \sigma_{z}\varphi_{x} - \tau_{y}\varphi_{z}] 
-2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} [-\varphi_{z}\varphi_{y} + \tau_{x} - \varphi_{y}(\tau_{y}\varphi_{x} + \tau_{x}\varphi_{y} + \sigma_{z}\varphi_{z})] 
\lambda_{z} = \sigma_{z} + \sin \vartheta [\tau_{y}\varphi_{y} - \tau_{x}\varphi_{x}] 
-2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} [1 - \varphi_{z}^{2} + \sigma_{z} - \varphi_{z}(\tau_{y}\varphi_{x} + \tau_{x}\varphi_{y} + \sigma_{z}\varphi_{z})]$$
(32)

Für die Verschiebungsderivationen in den schliesslichen Richtungen a'b'c' der Deformationshauptaxen ist in den Gleichungen (31) und (32) zu setzen  $\alpha'_x = \beta'_y = \gamma'_z = 1$  und  $\alpha_y = \alpha'_z = \beta'_x = \beta'_z = \gamma'_x = \gamma'_y = 0$ , und es ist sonach für dieselben  $\sigma_x = \lambda_1$ ,  $\sigma_y = \lambda_2$ ,  $\sigma_z = \lambda_3$ ,  $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$  und

$$\lambda_{x} = \lambda_{1} - 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{1}) (1 - \varphi_{x}^{2})$$

$$\nu_{z} = -\sin \vartheta (1 + \lambda_{1}) \varphi_{z} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{1}) \varphi_{x} \varphi_{y}$$

$$\mu_{y} = \sin \vartheta (1 + \lambda_{1}) \varphi_{y} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{1}) \varphi_{x} \varphi_{z}$$

$$\mu_{z} = \sin \vartheta (1 + \lambda_{2}) \varphi_{z} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{2}) \varphi_{y} \varphi_{x}$$

$$\lambda_{y} = \lambda_{2} - 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{2}) (1 - \varphi_{y}^{2})$$

$$\nu_{x} = -\sin \vartheta (1 + \lambda_{2}) \varphi_{x} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{2}) \varphi_{y} \varphi_{z}$$

$$\nu_{y} = -\sin \vartheta (1 + \lambda_{3}) \varphi_{x} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{3}) \varphi_{z} \varphi_{x}$$

$$\mu_{x} = \sin \vartheta (1 + \lambda_{3}) \varphi_{x} + 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{3}) \varphi_{z} \varphi_{y}$$

$$\lambda_{z} = \lambda_{3} - 2 \sin^{2} \frac{\vartheta}{2} (1 + \lambda_{3}) (1 - \varphi_{z}^{2})$$

$$(33)$$

Setzt man in diesen Gleichungen, da bei der Berechnung der Componenten der Spannungen Potenzen von  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  und  $\vartheta$ , welche höher sind, als die zweite, zu vernachlässigen sind,

 $\sin\vartheta = \vartheta$  und  $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$  und substituirt die Werthe aus (33) und (26) in (27), so findet man folgende bis auf Glieder zweiter Ordnung genaue Relationen für die zu den Axen a'b'c' parallelen Componenten  $(S_1 T_3 T_2), (T_3 S_2 T_1), (T_2 T_1 S_3)$  der Spannungen in den zu den Dilatationshauptaxen a'b'c' in ihrer schliesslichen Lage senkrechten Flächenelementen, wenn kürzehalber

$$D_1' = 4B_2 + C_1 - A_1 + 3A_1' \tag{34}$$

gesetzt wird:

$$D.S_{1} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{1} + C_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + D'_{1}\lambda_{1}^{2} + B'_{1}(\lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2}) + C'_{1}\lambda_{2}\lambda_{3} + (C_{1} + 2B'_{1})\lambda_{1}(\lambda_{2} + \lambda_{3})$$

$$D.T_{1} = A_{12}\lambda_{1}^{2} + B_{12}(\lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2}) + C_{12}\lambda_{2}\lambda_{3} + D_{12}\lambda_{1}(\lambda_{2} + \lambda_{3})$$

$$D.S_{2} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{2} + C_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + D'_{1}\lambda_{2}^{2} + B'_{1}(\lambda_{3}^{2} + \lambda_{1}^{2}) + C'_{1}\lambda_{3}\lambda_{1} + (C_{1} + 2B'_{1})\lambda_{2}(\lambda_{3} + \lambda_{1})$$

$$D.T_{2} = A_{12}\lambda_{2}^{2} + B_{12}(\lambda_{3}^{2} + \lambda_{1}^{2}) + C_{12}\lambda_{3}\lambda_{1} + D_{12}\lambda_{2}(\lambda_{3} + \lambda_{1})$$

$$D.S_{3} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{3} + C_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + D'_{1}\lambda_{3}^{2} + B'_{1}(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2}) + C'_{1}\lambda_{1}\lambda_{2} + (C_{1} + 2B'_{1})\lambda_{3}(\lambda_{1} + \lambda_{2})$$

$$D.T_{3} = A_{12}\lambda_{3}^{2} + B_{12}(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2}) + C_{12}\lambda_{1}\lambda_{2} + D_{12}\lambda_{3}(\lambda_{1} + \lambda_{2})$$

Da nun die Determinante D, wie dies die Substitution von (29) in (8) sofort lehrt, auch in der Form

$$D = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_x \beta_x \gamma_x \\ \alpha_y \beta_y \gamma_y \\ \alpha_z \beta_z \gamma_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha'_x \beta'_x \gamma'_x \\ \alpha'_y \beta'_y \gamma'_y \\ \alpha'_z \beta'_z \gamma'_z \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \quad (36)$$

ausdrückbar ist, so ist aus (35) zu entnehmen, dass die Spannungen  $S_1S_2S_3T_1T_2T_3$  bei einem gegebenen ursprünglich elastisch isotropen Körper von dem Rotationswinkel  $\vartheta$  und den Richtungscosinus  $\varphi_x\varphi_y\varphi_z$  der Rotationsaxe nicht abhängen, sondern lediglich Functionen der drei Hauptdilatationen  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  sind.

Da sich aus diesen sechs Spannungen und aus den auf die Dilatationshauptaxen a'b'c' bezogenen Richtungscosinus  $\alpha'_x\beta'_x\gamma'_x$  der beliebig gewählten Richtung x in bekannter Weise die Spannungscomponenten  $X_xY_xZ_x$  berechnen lassen, so besteht

diese Unabhängigkeit von  $\vartheta \varphi_x \varphi_z \varphi_z$  auch für die letzteren Kräfte. Übrigens zeigt dies auch die Substitution von (32) in (27), welche, wenn man abermals Glieder von höherer Ordnung als der zweiten vernachlässigt, bei Beachtung von (34) und (26) zu folgendem Werthe von  $D \cdot X_x$  führt:

$$D. X_{x} = A_{1} + 4B_{2} \cdot \sigma_{x} + C_{1}(\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}) + 2B_{2} \cdot (\tau_{y}^{2} + \tau_{z}^{2}) - C_{1}(\tau_{x}^{2} + \tau_{y}^{2} + \tau_{z}^{2}) + C'_{1} \cdot \sigma_{y} \sigma_{z} + C'_{1} \cdot \sigma_{y} \sigma_{z} + (C_{1} + 2B'_{1}) \cdot \sigma_{x}(\sigma_{y} + \sigma_{z}) + 4A_{12} \cdot \sigma_{x} \tau_{x} + 4B_{12} \cdot \sigma_{x}(\tau_{y} + \tau_{z}) + 2C_{12}(\sigma_{y} \tau_{z} + \sigma_{z} \tau_{y}) + 2D_{12}[\sigma_{y} \tau_{y} + \sigma_{z} \tau_{z} + (\sigma_{y} + \sigma_{z}) \tau_{x} + 4A_{21} \cdot \tau_{x}^{2} + 4B_{21} \cdot (\tau_{y}^{2} + \tau_{z}^{2}) + 4C_{21} \cdot \tau_{y} \tau_{z} + 4D_{21} \cdot \tau_{x}(\tau_{y} + \tau_{z})$$

$$(37)$$

worin für  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_x \tau_y \tau_z$  die Werthe aus (31) einzusetzen sind.

Anderseits ist bekanntlich die normale Spannung für die Richtung x, da  $\alpha'_x \beta'_x \gamma'_x$  die Richtungscosinus derselben in Bezug auf die Axen a'b'c' sind, aus der allgemein giltigen Gleichung bestimmbar:

$$X_x = S_1 \alpha_x'^2 + S_2 \beta_x'^2 + S_3 \gamma_x'^2 + 2T_1 \beta_x' \gamma_x' + 2T_2 \gamma_x' \alpha_x' + 2T_3 \alpha_x' \beta_x'.$$

Sonach ist den Gleichungen (35) zufolge auch

$$D.X_{x} = A_{1} + 4B_{2}(\lambda_{1}\alpha_{x}^{\prime2} + \lambda_{2}\beta_{x}^{\prime2} + \lambda_{3}\gamma_{x}^{\prime2}) + C_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + D_{1}'(\lambda_{1}^{2}\alpha_{x}^{\prime2} + \lambda_{2}^{2}\beta_{x}^{\prime2} + \lambda_{3}^{2}\gamma_{x}^{\prime2}) + + B_{1}'[(\lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2})\alpha_{x}^{\prime2} + (\lambda_{3}^{2} + \lambda_{1}^{2})\beta_{x}^{\prime2} + (\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2})\gamma_{x}^{\prime2}] + C_{1}'(\lambda_{2}\lambda_{3}\alpha_{x}^{\prime2} + \lambda_{3}\lambda_{1}\beta_{x}^{\prime2} + \lambda_{1}\lambda_{2}\gamma_{x}^{\prime2}) + + (C_{1} + 2B_{1}')[\lambda_{1}(\lambda_{2} + \lambda_{3})\alpha_{x}^{\prime2} + \lambda_{2}(\lambda_{3} + \lambda_{1})\beta_{x}^{\prime2} + + \lambda_{3}(\lambda_{1} + \lambda_{2})\gamma_{x}^{\prime2}] + 2A_{12}(\lambda_{1}^{2}\beta_{x}^{\prime}\gamma_{x}^{\prime} + \lambda_{2}^{2}\gamma_{x}^{\prime}\alpha_{x}^{\prime} + \lambda_{3}^{2}\alpha_{x}^{\prime}\beta_{x}^{\prime}) + + 2B_{12}[(\lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2})\beta_{x}^{\prime}\gamma_{x}^{\prime} + (\lambda_{3}^{2} + \lambda_{1}^{2})\gamma_{x}^{\prime}\alpha_{x}^{\prime} + + (\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2})\alpha_{x}^{\prime}\beta_{x}^{\prime}] + 2C_{12}(\lambda_{2}\lambda_{3}\beta_{x}^{\prime}\gamma_{x}^{\prime} + \lambda_{3}\lambda_{1}\gamma_{x}^{\prime}\alpha_{x}^{\prime} + \lambda_{1}\lambda_{2}\alpha_{x}^{\prime}\beta_{x}^{\prime}) + + 2D_{12}[\lambda_{1}(\lambda_{2} + \lambda_{3})\beta_{x}^{\prime}\gamma_{x}^{\prime} + \lambda_{2}(\lambda_{3} + \lambda_{1})\gamma_{x}^{\prime}\alpha_{x}^{\prime} + + \lambda_{3}(\lambda_{1} + \lambda_{2})\alpha_{3}^{\prime}\beta_{x}^{\prime}]$$

$$(38)$$

Da die Gleichheit der Ausdrücke (37) und (38) für jede Lage der Dilatationshauptaxen a'b'c' und für alle Werthe der Hauptdilatationen  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  besteht, so muss sicher auch der Coëfficient von  $\lambda_1^2$  in (37) jenem in (38) gleich sein, also ihre Differenz verschwinden, so dass sich nach Einsetzung der Werthe (31) in (37) und entsprechender Reduction folgende für alle möglichen Werthe der Richtungscosinus  $\alpha_x'\alpha_y'\alpha_z'\beta_x'...$  giltige Gleichung ergibt:

$$[2B_{2}-D'_{1}+B'_{1}+4B_{21}] \alpha'_{x}{}^{2}(\alpha'_{y}{}^{2}+\alpha'_{z}{}^{2}) +[-C_{1}-2B'_{1}+C'_{1}+4A_{21}] \alpha'_{y}{}^{2}\alpha'_{z}{}^{2}+2A_{12} \cdot (2\alpha'_{x}{}^{2}\alpha'_{y}\alpha'_{z}-\beta'_{x}\gamma'_{x}) +2B_{12} \cdot \alpha'_{x}[2\alpha'_{x}{}^{2}(\alpha'_{y}+\alpha'_{z})-\beta'_{x}-\gamma'_{x}]+2C_{12} \cdot \alpha'_{x}(\alpha'_{y}{}^{3}+\alpha'_{z}{}^{3}) +2D_{12} \cdot \alpha'_{y}\alpha'_{z}[\alpha'_{y}{}^{2}+\alpha'_{z}{}^{2}+\alpha'_{x}(\alpha'_{y}+\alpha'_{z})]+4C_{21} \cdot \alpha'_{x}{}^{2}\alpha'_{y}\alpha'_{z}+ +4D_{21} \cdot \alpha'_{x}\alpha'_{y}\alpha'_{z}(\alpha'_{y}+\alpha'_{z})=0$$

$$(39)$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Richtungen der drei zu einander senkrechten Dilatationshauptaxen a'b'c' erfüllt werden muss und da die Coëfficienten dieser Gleichung von diesen Axenrichtungen unabhängig sind, so müssen alle diese Coëfficienten verschwinden, wie dies etwa aus folgender Schlussfolgerung hervorgeht: Nimmt man etwa a' parallel zur z-Axe und b', beziehungsweise c' parallel zu jener Lage an, in welche die Axe x, beziehungsweise y durch eine Drehung in ihrer Ebene um den beliebigen Winkel  $\varphi$  gelangt, so ist  $\alpha'_z = 1$ ,  $\alpha'_x = \alpha'_y = \beta'_z = \gamma'_z = 0$ ,  $\beta'_x = \gamma'_y = \cos \varphi$ ,  $\beta'_y = -\gamma'_x = \sin \varphi$  zu setzen, wodurch die Gleichung (39) sich auf  $A_{12}$ . sin  $2\varphi = 0$ reducirt, so dass  $A_{12} = 0$  ist. Setzt man diesen Werth in (39) ein und nimmt nunmehr etwa  $\alpha'_x = 0$ , also  $\alpha'_y + \alpha'_z = 1$  an, so erhält man eine bezüglich a', a'z quadratische Gleichung, deren Coëfficienten verschwinden müssen, da  $\alpha'_v \alpha'_z$  jeden zwischen  $-\frac{1}{2}$  und  $+\frac{1}{2}$  gelegenen Werth annehmen kann, und es ist sonach  $D_{12} \equiv 0$  und ebenso der Coëfficient von  $\alpha_y'^2 \alpha_z'^2$  in (39). Dividirt man die derart reducirte Gleichung (39) durch  $\alpha'_x$  und setzt wie früher  $\alpha'_z = 1$ ,  $\beta'_x = \cos \varphi$  u. s. w., so wird  $2B_{12}$ . .  $(\sin \varphi - \cos \varphi) + 2C_{12} = 0$ , also, da  $\varphi$  beliebig ist,  $B_{12} = C_{12} = 0$ . Nimmt man nun abermals  $\alpha'_x = 0$  an, so findet man  $D_{21} = 0$ und wenn man die übrig bleibende Gleichung durch  $\alpha'_x$  dividirt

und hierauf  $\alpha'_x = 0$ ,  $\alpha'_y = \cos \varphi$ ,  $\alpha'_z = \sin \varphi$  setzt, so ersieht man, dass auch die übrig gebliebenen Coëfficienten verschwinden müssen. Zu genau denselben Folgerungen würde man durch Gleichsetzung etwa der Coëfficienten von  $\lambda_2 \lambda_3$  in (37) und (38) gelangen.

Da sonach alle Coëfficienten der Gleichung (39) sich auf Null reduciren müssen, so ist nach Einführung des Werthes von  $D_1^{\prime}$  aus (34)

$$B'_{1} = -A_{1} + C_{1} + 2B_{2} + 3A'_{1} - 4B_{21}$$

$$C'_{1} = C_{1} + 2B'_{1} - 4A_{21} = -2A_{1} + 3C_{1} + 4B_{2} + 6A'_{1} - 8B_{21} - 4A_{21}$$

$$A_{12} = B_{12} = C_{12} = D_{12} = C_{21} = D_{21} = 0$$

$$(40)$$

Aus dem Verschwinden der letztgenannten Coëfficienten muss zunächst zufolge (35) gefolgert werden, dass  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  ist, d. h. dass keine Schubspannungen in den zu den Dilatationshauptaxen a'b'c' senkrechten Flächenelementen vorhanden sind, oder mit anderen Worten, dass die Dilatationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage zugleich auch die Hauptdruckaxen (Reactionshauptaxen) und  $S_1S_2S_3$  die Hauptdruckspannungen sind. Es besteht demnach für die Schubspannung  $Y_z$ , indem  $(z'_y\beta'_y\gamma'_y)$  die auf die Hauptdruckaxen a'b'c' bezogenen Richtungscosinus der Axe y und  $(z'_z\beta'_z\gamma'_z)$  jene der Axe z sind, die bekannte allgemein giltige Beziehung

$$Y_z = S_1 \cdot \alpha_y' \alpha_z' + S_2 \cdot \beta_y' \beta_z' + S_3 \cdot \gamma_y' \gamma_z'. \tag{41}$$

Setzt man nun in den in (27) ausgedrückten Werth von  $Y_z$  die Werthe aus (26), (32) und (40) ein, so findet man bei Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$D.Y_{z} = 4B_{2} \cdot \tau_{x} + 2B_{2} \cdot [\tau_{y}\tau_{z} + (\tau_{y} + \tau_{z})\tau_{x}] + 4A_{21} \cdot (\sigma_{x}\tau_{x} + 4B_{21} \cdot (\sigma_{y} + \sigma_{z})\tau_{x} + 4A_{23} \cdot \tau_{x}^{2} + 4B_{23} \cdot [\tau_{y}^{2} + \tau_{z}^{2} + 2\tau_{x}(\tau_{y} + \tau_{z})] + 4C_{23} \cdot \tau_{y}\tau_{z})$$

$$(42)$$

Anderseits ergibt die Substitution der Werthe (40) und des aus (40) und (34) resultirenden Werthes  $D_1'=2\,B_2+B_1'+4\,B_{21}$  in die Gleichungen (35)

In die Augen springend ist der Zusammenhang der Glieder dieses Ausdruckes mit den vier Determinanten 2 || λx, μz, γ  $\lambda_x$ ,  $\frac{\mu_z + \nu_z}{2}$ ,  $\frac{\mu_y + \nu_y}{2}$ 

$$\mathbf{z} = \begin{vmatrix} \lambda_{x}, \mu_{x}, \nu_{y} \\ \nu_{z}, \lambda_{y}, \mu_{x} \\ \mu_{y}, \nu_{x}, \lambda_{z} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \mu_{z} + \nu_{z} \\ \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2}, & \lambda_{y}, & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \\ \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}, & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}, & \lambda_{z} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}, \quad \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}, \quad \lambda_{z} \begin{vmatrix} \mu_{y} + \nu_{y} \\ \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}, & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}, & \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} \\ \frac{\mu_{y}}{2}, & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}, & -(\lambda_{z} + \lambda_{x}), & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mu_{y}}{2}, \quad \lambda_{x}, \quad \lambda_{x} \begin{vmatrix} \mu_{y} + \nu_{y} \\ \frac{\mu_{y}}{2}, & \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}, & \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}, & -(\lambda_{x} + \lambda_{y}) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mu_{y}}{2}, \quad \lambda_{y}, \quad \mu_{x} + \nu_{x}, \quad \lambda_{x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mu_{y}}{2}, \quad \lambda_{y}, \quad \mu_{x} + \nu_{x}, \quad \mu_{x}$$

der Determinante  $\beta$  und durch  $\lambda$  die Summe aus  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ , also determinanten der Determinante a, beziehungsweise \( \beta \), durch \( \beta'' \) die Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder Bezeichnet man nämlich durch  $\alpha'$ , beziehungsweise  $\beta'$  die Summe der zu  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$  adjungirten Unter- $\lambda = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$  $\alpha' = (\lambda_y \lambda_z - \mu_x \nu_x) + (\lambda_z \lambda_x - \mu_y \nu_y) + (\lambda_x \lambda_y - \mu_z \nu_z)$ 

so ist den Gleichungen (47) und (26) gemäss

$$f = A_0 + A_1 \lambda + \frac{C_1 - A_1}{2} \lambda^2 + A_1 \alpha' + 2B_2 \beta'' + A_1' \lambda^3 + (A_1 - 2B_2)\gamma + C_1 \lambda \alpha' - 4A_{21}\beta + 4B_{21}\delta$$
(50)

we auch  $\gamma = -\lambda \alpha' + \alpha$  und  $\delta = -\lambda \beta' + \beta$  gesetzt werden kann.

Der Ausdruck (47), beziehungsweise (50) für die Potentialfunction f ist bis auf Glieder dritter Ordnung genau.

Die Werthe der Spannungscomponenten ergeben sich entweder aus (47) mit Zuhilfenahme der Gleichungen (20) oder durch Einsetzung der Werthe aus (46) und (40) in die Gleichungen (27). Man erhält so nach entsprechender Reduction und nach Einführung der Werthe (26) und bei Beachtung des Werthes von  $B_1'$  in (40) folgende Gleichungen, die bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sind:

$$D. X_{x} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{x} + C_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) + B'_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + 2B_{2}(\lambda_{x}^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}) + C_{1}(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) - 4A_{21} \left[ \lambda_{y}\lambda_{z} - \left(\frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}\right)^{2} \right] + + 4B_{21} \left[ \lambda_{x}^{2} + \left(\frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}\right)^{2} \right]$$

$$D. Y_{z} = 2B_{2}(\mu_{x} + \nu_{x}) + 2B_{2} \left[ \mu_{z}\nu_{y} + \lambda_{y}\mu_{x} + \nu_{x}\lambda_{z} \right] - 4A_{21} \left[ \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} \cdot \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} - \lambda_{x} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \right]$$

$$+ 4B_{21} \left[ \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} \cdot \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} + \lambda_{y} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} + \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \lambda_{z} \right]$$

Der innige Zusammenhang der Factoren von  $2B_2$  und  $C_1$  mit den entsprechenden Gliedern der Determinante  $\alpha$  in (48) und der Factoren von  $4A_{21}$  und  $4B_{21}$  mit den entsprechenden Gliedern der Determinante  $\beta$  ist derart ersichtlich, dass er einer näheren Auseinandersetzung nicht bedarf.

Da nach (8) die cubische Dilatation

$$D-1 = \lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z} + \lambda_{y} \lambda_{z} + \lambda_{z} \lambda_{x} + \lambda_{x} \lambda_{y} - \mu_{x} \nu_{x} - \mu_{y} \nu_{y} - \mu_{z} \nu_{z}$$

$$+ \lambda_{x} \lambda_{y} \lambda_{z} + \mu_{x} \mu_{y} \mu_{z} + \nu_{x} \nu_{y} \nu_{z}$$

$$- \lambda_{x} \mu_{x} \nu_{x} - \lambda_{y} \mu_{y} \nu_{y} - \lambda_{z} \mu_{z} \nu_{z} = \lambda + \alpha' + \alpha$$

$$(52)$$

 $v_x$  ,  $-(\lambda_x+\lambda_y)$ 

 $\frac{\mu_y + \nu_y}{2}$ ,  $\frac{\mu_x + \nu_x}{2}$ ,  $-(\lambda_x + \lambda_y)$ 

In die Augen springend ist der Zusammenhang der Glieder dieses Ausdruckes mit den vier Determinanten  $\lambda_x$ ,  $\mu_z$ ,  $\nu_y$ დ ||

(8+)

der Determinante  $\beta$  und durch  $\lambda$  die Summe aus  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ , also determinanten der Determinante a, beziehungsweise \beta, durch \beta'' die Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder Bezeichnet man nämlich durch  $\alpha'$ , beziehungsweise  $\beta'$  die Summe der zu  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$  adjungirten Unter-

$$\lambda = \lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}$$

$$z' = (\lambda_{y}\lambda_{z} - (\mu_{x}\nu_{x}) + (\lambda_{z}\lambda_{x} - (\mu_{y}\nu_{y}) + (\lambda_{x}\lambda_{y} - (\mu_{z}\nu_{z}))$$

$$\beta' = \lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \frac{1}{4} \left[ ((\mu_{x} + \nu_{x})^{2} + (\mu_{y} + \nu_{y})^{2} + (\mu_{z} + \nu_{z})^{2} \right]$$

$$\beta'' = \lambda_{x}^{2} + \lambda_{y}^{2} + \lambda_{z}^{2} + \frac{1}{2} \left[ ((\mu_{x} + \nu_{x})^{2} + (\mu_{y} + \nu_{y})^{2} + (\mu_{z} + \nu_{z})^{2} \right] = \lambda^{2} - 2\beta'$$

(49)

so ist den Gleichungen (47) und (26) gemäss

$$f = A_0 + A_1 \lambda + \frac{C_1 - A_1}{2} \lambda^2 + A_1 \alpha' + 2 B_2 \beta'' + A_1' \lambda^3 + (A_1 - 2 B_2) \gamma + C_1 \lambda \alpha' - 4 A_{21} \beta + 4 B_{21} \delta$$
(50)

we auch  $\gamma = -\lambda \alpha' + \alpha$  und  $\delta = -\lambda \beta' + \beta$  gesetzt werden kann.

Der Ausdruck (47), beziehungsweise (50) für die Potentialfunction f ist bis auf Glieder dritter Ordnung genau.

Die Werthe der Spannungscomponenten ergeben sich entweder aus (47) mit Zuhilfenahme der Gleichungen (20) oder durch Einsetzung der Werthe aus (46) und (40) in die Gleichungen (27). Man erhält so nach entsprechender Reduction und nach Einführung der Werthe (26) und bei Beachtung des Werthes von  $B_1'$  in (40) folgende Gleichungen, die bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sind:

$$D. X_{x} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{x} + C_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) + B'_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + 2B_{2}(\lambda_{x}^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}) + C_{1}(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) - 4A_{21} \left[ \lambda_{y}\lambda_{z} - \left(\frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}\right)^{2} \right] + 4B_{21} \left[ \lambda_{x}^{2} + \left(\frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}\right)^{2} \right]$$

$$D. Y_{z} = 2B_{2}(\mu_{x} + \nu_{x}) + 2B_{2}[\mu_{z}\nu_{y} + \lambda_{y}\mu_{x} + \nu_{x}\lambda_{z}] - 4A_{21} \left[ \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} \cdot \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} - \lambda_{x} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \right] + 4B_{21} \left[ \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} \cdot \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} + \lambda_{y} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} + \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \lambda_{z} \right]$$

Der innige Zusammenhang der Factoren von  $2B_2$  und  $C_1$  mit den entsprechenden Gliedern der Determinante  $\alpha$  in (48) und der Factoren von  $4A_{21}$  und  $4B_{21}$  mit den entsprechenden Gliedern der Determinante  $\beta$  ist derart ersichtlich, dass er einer näheren Auseinandersetzung nicht bedarf.

Da nach (8) die cubische Dilatation

$$D-1 = \lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z} + \lambda_{y} \lambda_{z} + \lambda_{z} \lambda_{x} + \lambda_{x} \lambda_{y} - \mu_{x} \nu_{x} - \mu_{y} \nu_{y} - \mu_{z} \nu_{z}$$

$$+ \lambda_{x} \lambda_{y} \lambda_{z} + \mu_{x} \mu_{y} \mu_{z} + \nu_{x} \nu_{y} \nu_{z}$$

$$- \lambda_{x} \mu_{x} \nu_{x} - \lambda_{y} \mu_{y} \nu_{y} - \lambda_{z} \mu_{z} \nu_{z} = \lambda + \alpha' + \alpha'$$

$$(52)$$

so ist, wenn man Glieder dritter Ordnung vernachlässigt

$$\frac{1}{D} = 1 - (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) + (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 - (\lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z) = 1 - \lambda_z + \lambda^2 - \alpha'$$
(53)

sonach zufolge (51) und (40) bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$X_{x} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{x} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) + (3A'_{1} - 4B_{21})(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + 2B_{2}[(\lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}] + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) - 4A_{21}\left[\lambda_{y}\lambda_{z} - \left(\frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}\right)^{2}\right] + \left(\frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2}\right)^{2}\right]$$

$$Y_{z} = 2B_{2}(\mu_{x} + \nu_{x}) + 2B_{2}\left[\mu_{z}\nu_{y} - (\lambda_{z} + \lambda_{x})\mu_{x} - \nu_{x}(\lambda_{x} + \lambda_{y})\right] - 4A_{21}\left[\frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} \cdot \frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} - \lambda_{x} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2}\right] + 4B_{21}\left[\frac{\mu_{z} + \nu_{z}}{2} \cdot \frac{\mu_{y} + \nu_{y}}{2} + \lambda_{y} \cdot \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} + \frac{\mu_{x} + \nu_{x}}{2} \cdot \lambda_{z}\right]$$

Die Factoren von  $2B_2$  entsprechen in diesen beiden für unsere Zwecke wichtigsten Schlussgleichungen nicht mehr wie in (51) den Gliedern der Determinante  $\alpha$ , sondern den analogen Gliedern der Determinante  $\gamma$  in (48). Der Factor von  $C_1 - A_1$  in (54), nämlich  $\lambda + \alpha'$ , ist zufolge (52) der cubischen Dilatation (D-1) gleich, während in derselben Gleichung der Factor von  $3A'_1 - 4B_{21}$ , nämlich  $(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2$ , dem Quadrate dieser cubischen Dilatation gleichgesetzt werden kann.

Durch cyclische Permutation von XYZ, beziehungsweise xyz ergeben sich aus (54) die Werthe aller übrigen Spannungscomponenten.

Wie aus den gefundenen Hauptgleichungen (47) und (54) zu ersehen ist, hat man, wenn bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte Glieder dritter, sonach bei der Bestimmung der Spannungen (54) Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden sollen, ausser der Integrationsconstanten  $A_0$  der Potentialfunction und der ursprünglichen, von der herrschenden Temperatur abhängigen Spannung  $A_1$  fünf Elasticitätsconstanten

- die jedoch keineswegs nothwendigerweise von einander unabhängig sein müssen und deren eventuelle Beziehungen zu einander festzustellen eine (im folgenden zweiten Theile zu behandelnde) Aufgabe der Moleculartheorie und experimenteller Untersuchungen ist — in Betrachtung zu ziehen, und zwar sind dies, wenn die zu Grunde gelegten Gleichungen die Form (47) und (54) haben sollen, die Constanten  $B_2C_1A_1'A_{21}$  und  $B_{21}$ , sonach ausser den bisher in der Elasticitätstheorie stets zur Betrachtung kommenden Constanten  $B_{\bullet}$  und  $C_{\bullet}$  noch die drei Constanten  $A'_1$ ,  $A_{21}$  und  $B_{21}$ . Würde man etwa in ähnlicher Weise, wie dies in dieser Untersuchung geschehen ist, auch Glieder der nächst höheren Ordnung in die Rechnung einführen, so müsste man vier weitere Elasticitätsconstanten in die Rechnung einbeziehen. Begnügt man sich, wie dies allgemein geschieht, bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte mit Gliedern zweiter Ordnung, so dass die Spannungen als lineare Functionen der Verschiebungsderivationen angesehen werden dürfen und setzt überdies in den Gleichungen (47) und (54)  $A_0 = 0$  und  $A_1 = 0$  und etwa  $2B_2 = -K$  und  $C_1 = -2K\Theta$ , we dann Kden sogenannten Modulus der Starrheit (Schubspannungsmodul) und  $E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}$  den sogenannten Elasticitätsmodulus, beziehungsweise  $W = \frac{2}{3}K(1+3\theta)$  den sogenannten

Compressionswiderstand bedeutet, so nehmen die Gleichungen (47) und (54) die bekannte gebräuchliche Form (nach Kirchhoff) an:

$$f = -K[\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \Theta(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2]$$

$$X_x = -2K[\lambda_x + \Theta(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)]$$

$$Y_z = -K(\mu_x + \nu_x)$$

Setzt man in (47) die Werthe (32) und (31) ein, so erhält man

$$f = A_{0} + A_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + \frac{C_{1} - A_{1}}{2} (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} + A_{1}(\lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}) + 2B_{2}(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2}) + A_{1}'(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{3} - (A_{1} - 2B_{2})(\lambda_{2} + \lambda_{3})(\lambda_{3} + \lambda_{1})(\lambda_{1} + \lambda_{2}) + C_{1}(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})(\lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}) - 4A_{21}\lambda_{1}\lambda_{2}\lambda_{3} - 4B_{21}(\lambda_{2} + \lambda_{3})(\lambda_{3} + \lambda_{1})(\lambda_{1} + \lambda_{2})$$
Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a. 13

und für die Hauptspannungen ergeben sich aus (35) oder (54) die Werthe

$$S_{1} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{1} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + (3A'_{1} - 4B_{21})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} + 2B_{2}(\lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}) - 4A_{21}\lambda_{2}\lambda_{3} + 4B_{21}\lambda_{1}^{2}$$

$$S_{2} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{2} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + (3A'_{1} - 4B_{21})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} + 2B_{2}(\lambda_{3} + \lambda_{1})^{2} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}) - (4A_{21}\lambda_{3}\lambda_{1} + 4B_{21}\lambda_{2}^{2})$$

$$S_{3} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{3} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) + (3A'_{1} - 4B_{21})(\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} + 2B_{2}(\lambda_{1} + \lambda_{2})^{2} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}) - (4A_{21}\lambda_{1}\lambda_{2} + 4B_{21}\lambda_{3}^{2})$$

Die Gleichungen (47) und (54) lassen sich in mannigfacher Weise umformen. Nicht ohne Interesse ist folgende in einfacher Weise deducirbare Form dieser Gleichungen: Bezeichnet man durch  $\nu$  die cubische Dilatation  $\nu = D - 1 = \lambda + \alpha' + \alpha$ , durch  $\sigma$  die um 3 verminderte Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder der ursprünglichen Determinante (8), so dass

$$\tau = (1 + \lambda_x)^2 + (1 + \lambda_y)^2 + (1 + \lambda_z)^2 + \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 + \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 - 3$$

von derselben Dimension ist wie die Dilatationen, so ist, wenn  $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z C_{23} \beta \beta''$  und  $\lambda$  die in (26), (46), (48) und (49) angeführten Werthe bedeuten und wenn kürzehalber

$$f_{1} = A_{0} + (A_{1} - 2B_{2})\nu + \left(\frac{C_{1} - A_{1}}{2} + B_{2}\right)\nu^{2} + (A'_{1} - 2B_{21})\nu^{3}$$

$$f_{2} = 4(B_{21} - A_{21})\beta + 2B_{21}\lambda\beta'' = 4C_{23}\beta + 2B_{21}\nu\beta''$$

$$(57)$$

gesetzt wird,

$$f = f_{1} + f_{2} + B_{2} \circ X_{x} = \frac{\partial f_{1}}{\partial v_{1}} + \frac{\partial f_{2}}{\partial \lambda_{x}} + 2B_{2} \cdot \frac{(1 + \lambda_{x})^{2} + v_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}}{D}$$

$$Y_{z} = \frac{\partial f_{2}}{\partial s_{x}} + 2B_{2} \cdot \frac{\mu_{z} v_{y} + (1 + \lambda_{y}) \mu_{x} + v_{x} (1 + \lambda_{z})}{D}$$
(58)

wodurch ein verhältnissmässig einfacher Zusammenhang mit der ursprünglichen Determinante D und der Determinante  $\beta$  ausgedrückt ist.

Die geometrische Bedeutung der Zähler der beiden letzten Brüche in den Ausdrücken (58) für  $X_x$  und  $Y_z$  lässt sich aus folgender Betrachtung entnehmen:

Jene Punkte m', die anfangs in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m, deren Radius dl und deren Gleichung  $dx^2+dy^2+dz^2=dl^2$  ist, liegen zur Zeit t bekanntlich, wie sofort aus (6) zu entnehmen ist, wenn man aus diesen Gleichungen dx, dy, dz bestimmt und diese Werthe in die Gleichung der Kugelfläche einsetzt, in jenem Ellipsoid — dem Deformationsellipsoid (Dilatationsellipsoid, Verschiebungsellipsoid) —, dessen Halbaxen  $(1+\lambda_1)dl$ ,  $(1+\lambda_2)dl$ ,  $(1+\lambda_3)dl$  die Richtungen a'b'c' der Dilatationshauptaxen haben, und dessen Gleichung, wenn man wieder, wie früher, durch  $l_x m_z n_y$ ... die Subdeterminanten der Determinante (8) bezeichnet, lautet:

$$(l_x.dX + m_z.dY + n_ydZ)^2 + (n_z.dX + l_y.dY + m_x.dZ)^2 + (m_y.dX + n_x.dY + l_z.dZ)^2 = D^2.dl^2.$$

Die Kanten  $MM_1$ ,  $MM_2$ ,  $MM_3$  des früher betrachteten Tetraëders (7) sind conjugirte Radien dieses Ellipsoids, wofern die zu einander senkrechten, dem ursprünglichen Tetraëder dv angehörigen Kanten  $mm_1 = mm_2 = mm_3 = dl$  gewählt werden.

Jenes dem Deformationsellipsoid adjungirte Ellipsoid, dessen Halbaxen mit den Halbaxen des ersteren gleichgerichtet und diesen invers proportional sind, also etwa die Längen

$$\frac{dl}{1+\lambda_1}$$
,  $\frac{dl}{1+\lambda_2}$ ,  $\frac{dl}{1+\lambda_3}$  haben, hat die Gleichung<sup>1</sup>

$$[(1+\lambda_x) \cdot x + \mu_z \cdot y + \nu_y z]^2 + [\nu_z x + (1+\lambda_y) y + \mu_x z]^2 + + [\mu_y x + \nu_x y + (1+\lambda_z) z]^2 = dl^2.$$

Die zu den Seitenflächen  $f_1 = \overline{M_2 M M_3}$ ,  $f_2 = \overline{M_3 M M_1}$  und  $f_3 = \overline{M_1 M M_2}$  des Tetraëders dV senkrechten Radien dieses

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, Ȇber die gegenseitigen Beziehungen gewisser, in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung, nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Abth. II. a, S. 1108 und 1112.

Ellipsoids sind conjugirte Radien desselben und deren Längen sind den mit diesen gleichgerichteten Höhen des Tetraëders dV invers, also den Dreiecksflächen  $f_1 f_2 f_3$  direct proportional.

Bringt man die letzte Gleichung auf die Form  $a_x x^2 + a_y$ .  $y^2 + a_z$ .  $z^2 + 2b_x$ .  $yz + 2b_y$ .  $zx + 2b_z$ .  $xy = dl^2$ , so ersieht man sofort, dass  $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$  die gesuchten Zähler in den durch (58) ausgedrückten Werthen von  $X_x Y_y Z_z Y_z Z_x X_y$  sind.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dass sich nicht nur der erste und letzte Summand von f in der Gleichung (58), sondern auch der mittlere Summand  $f_2$  als Function von v und  $\sigma$  ausdrücken lässt, wofern nur noch ausser der cubischen Dilatation v = D - 1 und der Summe ( $\sigma + 3$ ) der Quadrate sämmtlicher Glieder der Determinante D auch die Summe der Quadrate sämmtlicher Subdeterminanten  $l_x m_z n_y \dots$  von D in die Rechnung einbezogen wird. Ist nämlich s die um s verminderte letztere Summe, also  $s = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 + m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 3$ , so ist, wie aus (48) und (49) leicht zu deduciren ist,

$$\beta = \frac{1}{4}\nu + \frac{1}{8}(\sigma - s + \nu^2)$$

$$\lambda \beta'' = (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)\beta'' = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{4} - \nu^2 + \nu^3 \right],$$

so dass, wenn man diese Werthe in (57) und (58) einsetzt, sich auch die Potentialfunction f als Function der drei Variabeln v,  $\sigma$  und s darstellen lässt.

Um Missdeutungen zu verhüten, sei schliesslich bemerkt, dass zwar, wenn man von Gliedern höheren Grades als des ersten absieht, die sogenannten Deformationsgrössen durch  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ ,  $\varepsilon_x = \mu_x + \nu_x$ ,  $\varepsilon_y = \mu_y + \nu_y$ ,  $\varepsilon_z = \mu_z + \nu_z$  bestimmt sind, und zwar bekanntlich durch  $\lambda_x\lambda_y\lambda_z$  die linearen Dilatationen parallel zu den Coordinatenaxen und durch  $\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$  die Grössen der Schiebungen in den zu den drei Coordinatenebenen parallelen Ebenen, dass dies jedoch bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung nicht der Fall ist. Es lässt sich nämlich leicht einsehen, dass bei Vernachlässigung von Gliedern

<sup>1</sup> L. c.

höherer Ordnung als der zweiten die linearen Dilatationen  $\Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z$  parallel zu den Coordinatenaxen den Gleichungen

$$\Lambda_x = \lambda_x + \frac{1}{2} (\mu_z^2 + \nu_y^2)$$

$$\Lambda_y = \lambda_y + \frac{1}{2} (\mu_x^2 + \nu_z^2)$$

$$\Lambda_z = \lambda_z + \frac{1}{2} (\mu_y^2 + \nu_z^2)$$

entsprechen müssen, dass ferner unter derselben Voraussetzung, wenn durch  $\mathbf{E}_x\mathbf{E}_y\mathbf{E}_z$  die Änderungen der Kantenwinkel des ursprünglichen Tetraëders dv bezeichnet sind, also der

Winkel 
$$(M_2 M M_3) = \frac{\pi}{2} + E_x$$
,  $(M_3 M M_1) = \frac{\pi}{2} + E_y$ ,  $(M_1 M M_2) = \frac{\pi}{2} + E_z$  ist,

$$-E_x = \varepsilon_x + \mu_y v_z - \lambda_y \mu_x - \lambda_z v_x$$

$$-E_y = \varepsilon_y + \mu_z v_x - \lambda_z \mu_y - \lambda_x v_y$$

$$-E_z = \varepsilon_z + \mu_x v_y - \lambda_x \mu_z - \lambda_y v_z$$

während, wenn  $H_xH_yH_z$  die Änderungen der Seitenwinkel der Ecke M des Tetraëders bedeuten, so dass, wenn  $N_1N_2N_3$  die von  $M_1M_2M_3$  auf die Gegenflächen  $M_2MM_3$ ,  $M_3MM_1$ ,  $M_1MM_2$  gefällten Höhen bedeuten, die Winkel  $(N_2N_3)=\frac{\pi}{2}+H_x$ ,  $(N_3N_1)=\frac{\pi}{2}+H_y$ ,  $(N_1N_2)=\frac{\pi}{2}+H_z$  sind,

$$H_x = \varepsilon_x - \mu_z \nu_y - \lambda_y \mu_x - \lambda_z \nu_x - \mu_y \mu_z - \nu_y \nu_z$$

$$H_y = \varepsilon_y - \mu_x \nu_z - \lambda_z \mu_y - \lambda_x \nu_y - \mu_z \mu_x - \nu_z \nu_x$$

$$H_z = \varepsilon_z - \mu_y \nu_x - \lambda_x \mu_z - \lambda_y \nu_z - \mu_x \mu_y - \nu_x \nu_y$$

also z. B. 
$$-\mathbf{E}_x - \mathbf{H}_x = (\mu_y + \nu_y)(\mu_z + \nu_z) = \varepsilon_y \varepsilon_z$$
 u. s. w. ist.

Nach Abschluss dieser Abhandlung ist mir eine in der Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 8. Juli 1893 vorgelegte Abhandlung von Prof. W. Voigt, welche zufälligerweise denselben Gegenstand behandelt, in die Hand gekommen. Nichtsdestoweniger habe ich mich bestimmt gefunden, meine Untersuchungen zu publiciren, da Prof. Voigt, der gleichfalls durch die Beobachtungsresultate O. Thompson's zu dieser Arbeit veranlasst wurde, durch seine theoretischen Untersuchungen zu Ergebnissen gelangt ist, die von den meinen verschieden sind. Setzt man nämlich, um den Zusammenhang zwischen meiner Bezeichnungsweise und jener Voigt's herzustellen, f = -F, ferner  $\lambda_x = x_x$ ,  $\lambda_y = y_y$ ,  $\lambda_z = z_z$ ,  $\varepsilon_x = \mu_x + \nu_x = y_z$ ,  $\varepsilon_y = z_x$  und  $\varepsilon_z = x_y^*$  und bezeichnet kürzehalber durch  $\delta$  und  $\delta$  die Ausdrücke  $\delta = x_x + y_y + z_z$ .  $\delta = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$ , so lauten die von Prof. Voigt gefundenen Formeln:

$$2F = c_1 \delta^2 + c_2 \vartheta + \frac{2c_1'}{3} \delta^3 + c_2' \cdot \delta \vartheta$$
$$-X_x = c_1 \delta + c_2 x_x + c_1' \delta^2 + c_2' \cdot \delta \vartheta$$
$$-Y_z = \frac{c_2}{2} y_z + \frac{c_2'}{2} y_z \delta,$$

welche anders lauten als die von mir gefundenen Formeln (47) und (54). Prof. Voigt wendet dann diese blos zwei neue Elasticitätsconstanten  $c_1'$  und  $c_2'$  enthaltenden Formeln auf verschiedene besondere Fälle, nämlich die Dehnung, Torsion und Biegung eines cylindrischen isotropen Körpers an. Leider kann ich jedoch nicht die Bemerkung unterdrücken, dass nach meiner Überzeugung die zwei Voraussetzungen, von welchen Prof. Voigt bei der Ableitung seiner Formeln ausgeht, nicht stich-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> W. Voigt, Ȇber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität. ← Göttinger Nachrichten Nr. 13 (vom 2. August 1893), S. 534—552.

<sup>\*</sup> Trotzdem ich diese von Kirchhoff gewählte Bezeichnungsweise als sehr zweckentsprechend ansehe und ich daher auch ursprünglich beabsichtigte, die Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \mu_x \mu_y \mu_z \nu_x \nu_y \nu_z$  entsprechend ihren Werthen (3) durch  $x_x y_y z_z z_y x_x y_x y_z z_x x_y$  zu bezeichnen, so bin ich doch von dieser Absicht abgekommen, um Missverständnissen vorzubeugen, die durch den Umstand leicht hätten herbeigeführt werden können, dass man fast allgemein z. B. durch

 $v_z$  nicht  $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ , sondern die Summe  $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}$  zu bezeichnen pflegt.

hältig sind. Zunächst sind die nach meinem Dafürhalten viel zu willkürlichen Annahmen nicht begründet, dass die Spannungen blos Functionen der Grössen  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$  sind (in dem besonderen Falle, dass die Deformation eine reine, von keiner Rotation begleitete, also etwa eine Potentialdeformation, sonach

$$\mu_x = \nu_x = \frac{1}{2} \varepsilon_x$$
,  $\mu_y = \nu_y = \frac{1}{2} \varepsilon_y$  und  $\mu_z = \nu_z = \frac{1}{2} \varepsilon_z$  ist, ist diese

Annahme wohl streng richtig) ebensowenig wie die Annahme, dass die Potentialfunction f blos eine Function von  $\delta$  und  $\vartheta$  ist.

Dass diese Annahmen nothwendige \*Folgerungen der Grundannahme seien, derzufolge die elastischen Drucke an einer Stelle nur von dem Zustande in der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängen« ist nicht einzusehen, da ja die Deformation in dem unmittelbar angrenzenden Körperelement, wofern auch Glieder zweiter Ordnung in Rechnung gezogen werden, nicht nur, wie früher gezeigt wurde, von  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ , sondern auch von  $\mu_x \nu_x \mu_y \dots$  abhängig sind. Die Potentialfunction F, die Prof. Voigt als eine Function der zwei Grössen  $\delta$  und  $\vartheta$  annimmt, lässt sich in dem betrachteten Falle nach meiner Überzeugung nicht als eine Function von zwei Variabeln, wohl aber, wie ich gezeigt habe, als Function von drei Variabeln darstellen. Und ebenso ist die weitere Voraussetzung, dass auch bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung \*die Formeln bestehen bleiben, welche die Druckcomponenten mit

dem elastischen Potential F verbinden, nämlich  $X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}$ ,  $X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}$  u. s. w.«, nicht gerechtfertigt, wie dies die streng-

giltigen Gleichungen (20) lehren. So dürfte auch der »Widerspruch zu erklären sein, »in welchem , wie Prof. Voigt selbst gesteht, »scheinbar die von O. Thompson bei Längsdehnung gefundenen Resultate mit den von mir (Prof. Voigt) bei Biegung und Torsion erhaltenen stehen . Dass die Berücksichtigung der in der bisherigen Elasticitätstheorie nicht berücksichtigten Glieder höherer Ordnung auch nach der Meinung des Prof. Voigt (der sich durch seine Arbeiten um die Ausgestaltung der Theorie der Elasticität, besonders jener der krystallinischen Substanzen, unbestrittene Verdienste erworben hat) in manchen

Fällen von Wichtigkeit ist, ist aus folgender Bemerkung des Prof. Voigt in der citirten Abhandlung zu entnehmen: \*Die von mir (Voigt) gefundenen Resultate zeigen, dass der Einfluss, den die nicht genaue Giltigkeit des gewöhnlichen elastischen Potentials auf die verschiedenen beobachteten Deformationen hat, eine ganz verschiedene Grössenordnung besitzt, z. B. bei Längsdehnung in einem Gliede erster, bei Biegung und Drillung in einem Gliede zweiter Ordnung auftritt, im ersten Falle also unter Umständen sehr merklich sein kann, wo er in den letzteren kaum nachweisbar ist\*.

Finger	J., Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen
	zwischen den Deformationen und den Spannungen in
	elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von
	Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von
	dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. [Preis:
	40 kr. = 80 Pfg.]

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 60 kr. = 3 Mk. 20 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Wollzeile 15) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

## SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. BIS V. HEFT.

JAHRGANG 1894. - MÄRZ BIS MAI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TEXTFIGUREN.)



X WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREL

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## INHALT

des 3.	bis 5.	Heftes	März	bis	Mai	1894	des CIII.	Bandes,	Abtheilung	II. a
	der	Sitzu	ngsbe	rich	ite (	der r	nathem.	naturw.	Classe.	

	Selte
VII. Sitzung vom 1. März 1894: Übersicht	203
Klemenčić I., Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldrahr durch schnelle elektrische Schwingungen. [Preis: 20 kr. =	
40 Pfg.]	
III. Sitzung vom 8. März 1894: Übersicht	
IX. Sitzung vom 5. April 1894: Übersicht	
Finger J., Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. (II. Theil.)	
[Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	
Jäger G., Über die innere Reibung der Lösungen. (Mit 1 Textfigur.)	201
[Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	251
theilung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pf.]	266
X. Sitzung vom 12. April 1894: Übersicht	277
XI. Sitzung vom 15. April 1894: Übersicht	278
XII. Sitzung vom 4. Mai 1894: Übersicht	
III. Sitzung vom 10. Mai 1894: Übersicht	283
Gegenbauer L., Einige Bemerkungen zum quadratischen Recipro-	
citätsgesetze. [Preis: 15 kr. = 30 Pf.]	285
erster Ordnung. [Preis 25 kr. = 50 Pfg.]	
Jaumann G., Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission, (Mit	
3 Textfiguren.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	
Elemente. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	
IV. Sitzung vom 25. Mai 1894: Übersicht	337

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 20 kr. = 2 Mk. 40 Pfg.

### SITZUNGSBERICHTE

DER

## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



#### VII. SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I (Jänner 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie, ferner das Register zum 14. Bande (Jahrgang 1893) dieser Monatshefte vor.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. I. Klemenčič: »Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen«.

- Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss in Prag übersendet eine Arbeit von Dr. A. Nestler, Assistenten am pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität daselbst, unter dem Titel: »Über Ringfasciation«.
- Das c. M. Herr Director Th. Fuchs übersendet eine Abhandlung: »Über von der österreichischen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes "Pola" in bedeutenden Tiefen gedredschte Cylindrites-ähnliche Körper und deren Verwandtschaft mit Gyrolithes«.
- Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Assistenten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: Das Skelet der Lacerta Simonyi Steind. und der Lacertidenfamilie überhaupt«.

Das w. M. Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Herrn Hans Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über einige Derivate der Picolinsäure und die Überführung derselben in α-Amidopyridin«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel über die Krystallformen einiger neuen organischen Verbindungen, und zwar von Picolinsäureamid; Jodäthylpicolinsäureäthylester; Äthylpyridinchloridchloroplatinat; Amidopyridinchloroplatinat; Mesoweinsäurenitril; Bromlacton, Dibromid, Amid und Baryumsalz der Oxypropilidenbuttersäure.

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Statistischer Bericht über die volkswirthschaftlichen Zustände des Erzherzogthums Österreich unter der Enns im Jahre 1890, erstattet an das k. k. Handelsministerium von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. I. Bd. Gewerbestatistik. Wien, 1893.

### Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen

von

#### Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

In neuerer Zeit ist von verschiedenen Beobachtern festgestellt worden, dass elektrische Schwingungen in Eisendrähten viel stärker gedämpft werden, als in anderen nicht magnetisirbaren Metallen. Die stärkere Dämpfung erklärt sich aus der circularen oder transversalen Magnetisirung, infolge welcher die elektrischen Schwingungen noch viel mehr wie bei anderen Drähten in die Oberflächenschichten zusammengedrängt werden. Der Widerstand eines magnetisirbaren Leiters ist daher für Oscillationen viel grösser als der eines anderen Drahtes von gleicher Leitungsfähigkeit. Die Wärmeentwicklung in einem Leiter ist proportional dem Widerstand; man kann daher aus der Wärmeentwicklung beim Durchleiten elektrischer Schwingungen einen Schluss auf die Grösse des Widerstandes ziehen und hieraus mit Hilfe der von Lord Rayleigh! und Stefan2 entwickelten Formeln den Werth der Permeabilität für diesen Fall berechnen. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die Wärmeentwicklung in den Eisen- und Nickeldrähten so wie bei früheren Messungen durch ein in der Nähe des Versuchsdrahtes aufgestelltes Thermoelement bestimmt und mit der

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Phil. Mag. Vol. 21, Jahrg. 1886.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, Jahrg. 1890.

Wärmeentwicklung in einem ebenso dicken Messingdrahte verglichen, welcher in dieselbe Leitung eingeschaltet war. Die Versuche ergaben folgende Werthe für die Permeabilität µ: Weiches Eisen 118, Stahl (Klaviersaitendraht) weich 106, hart 115, Bessemerstahl weich 77, hart 74, Nickel 27.

Diese Werthe stimmen ganz gut mit jenen, welche Baur <sup>1</sup> und Lord Rayleigh <sup>2</sup> für sehr schwache magnetisirende Kräfte gefunden haben. Wie die Versuche der beiden genannten Forscher lehren, ist die Permeabilität bis zu gewissen Werthen der magnetisirenden Kraft eine constante Grösse, während sie dann rasch ansteigt.

Die vorliegenden Beobachtungen zeigen, dass wir uns bei diesen Versuchen in einem Gebiete constanter µ bewegen. Diese Thatsache kann nun so gedeutet werden, dass die hier verwendeten magnetisirenden Kräfte sehr schwach sind und der Grössenordnung nach in den Bereich jener Feldstärken fallen, bei welchen µ wirklich constant ist, oder auch so, dass wir es hier zwar mit viel grösseren magnetisirenden Kräften zu thun haben, dass aber die Magnetisirung dem raschen Wechsel derselben nicht so schnell folgen kann, um hiebei je den Theil der Magnetisirungscurve zu erreichen, welcher den variablen und viel grösseren Werthen von µ entspricht. Man hat ja sogar ursprünglich bezweifelt, ob sehr rasche elektrische Schwingungen überhaupt magnetisirend wirken könnten. Eine beiläufige Schätzung der hier in Betracht kommenden Feldstärken aus den bei den Schwingungen auftretenden Maximalstromstärken ergibt nun wenigstens für die Oberfläche der Drähte und für den Beginn der Oscillationen Werthe der magnetisirenden Kräfte, welche jene Grenze, innerhalb welcher u. constant ist, mehr als hundertmal überschreiten. Darnach würde hier thatsächlich ein Fall des Zurückbleibens der Magnetisirung<sup>3</sup> vorliegen. Hiebei muss freilich vorausgesetzt werden, dass die Resultate der Beobachtungen Baur's und Lord Rayleigh's,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wied. Ann., 11, 1880.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Phil. Mag. Vol. 23, 1887.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Dieses Zurückbleiben darf mit der Hysteresis nicht verwechselt werden.

welche sich auf die longitudinale Magnetisirung beziehen, auch auf die circulare anwendbar sind.

In den Grenzen, innerhalb welcher  $\mu$  constant ist, gibt es keinen remanenten Magnetismus; die Magnetisirung in diesem Gebiete ist den Deformationen eines Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze ähnlich, während die weiteren Stadien der Magnetisirung mit dauernden Deformationen zu vergleichen sind, ein Analogon, auf welches schon Maxwell hingewiesen hat.

Der technisch verwendbare Theil der Magnetisirung liegt in dem Gebiete, welches den dauernden Deformationen entspricht; es ist nun sehr wahrscheinlich, und diese Annahme wird auch durch die Erfahrung gestützt, dass die Magnetisirung bei schnellen Feldwechseln dieses Gebiet nicht mehr erreicht, während die Moleküle innerhalb der Grenzen der constanten µ noch viel rascheren Schwingungen folgen können, wie die hier verwendeten. Weitere Versuche, welche vielleicht am besten mit Condensatorentladungen bei directer Beobachtung der Schwingungsdauer und der Dämpfung anzustellen wären, müssen darüber entscheiden.

#### Die Versuchsanordnung.

Bezüglich der Versuchsanordnung verweise ich auf eine frühere Abhandlung.¹ Der Primär- und Secundärinductor hatten dieselbe Grösse wie bei früheren Messungen und die Wärmeentwicklung wurde ebenfalls mit Hilfe eines in der Nähe des Versuchsdrahtes angebrachten feinen Thermoelements (Eisen-Constanten) gemessen; nur waren die beiden Drähte, in denen die Wärmeentwicklung verglichen werden sollte, nicht in einem Gehäuse befestigt, sondern es war jeder Versuchsdraht separat montirt. Die Länge der untersuchten Drähte betrug in allen Fällen 6cm, ihre Dicke wechselte zwischen 0·45 und 0·18mm, doch hatten die beiden Vergleichsdrähte immer gleiche Dicke. Der Secundärinductor war auf diese Weise aus mehreren Stücken zusammengesetzt; die aneinanderstossenden Stellen waren behufs besseren Contacts gut amalgamirt.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. CII, 1893, und Wied. Ann., Bd. 50.

#### Die Resultate.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

- a den Ausschlag des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welchen die Wärmeentwicklung im Versuchsdraht gemessen wird;
- $\beta$  den Ausschlag des Galvanometers, welches mit dem Standardinductor verbunden war;
  - $\bar{\alpha}$  den auf  $\beta = 100$  reducirten Werth von  $\alpha$ ;
- ψ die Ablenkung des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welche die Wärmeentwicklung im Versuchsdrahte beim Durchgange eines constanten Stromes gemessen wird. Die Stärke des Stromes war immer für beide Drähte gleich und ist bei jeder Tabelle angegeben.
- C Die in dieser Rubrik angeführten Zahlen geben die Empfindlichkeit des Thomson-Carpentier-Galvanometers an. Bei dem hier verwendeten Instrument ändert sich die Empfindlichkeit im Verlaufe des Tages, vermuthlich infolge von Temperaturschwankungen, ziemlich beträchtlich. Zur Controle konnte in den Galvanometerkreis eine schwache elektromotorische Kraft von  $0.052/50000\times1.438$  Volt eingeschaltet werden. Die hierauf beobachtete Doppelablenkung ist unter C eingetragen. Der Widerstand im Galvanometerkreise betrug 6.8 Ohm.
- D bedeutet die Entfernung des Primär- vom Secundär- inductor in cm und
- ${\it V}$  das Verhältniss der Wärmeentwicklung in den Vergleichsdrähten durch die elektrischen Schwingungen.

Jeder Werth von  $\alpha$  ist das Mittel aus vier Beobachtungen, wovon zwei bei einer und zwei bei entgegengesetzter Richtung des Primärstromes im Inductorium erhalten wurden. Auch hier konnte man die Beobachtung machen, dass die Primärfunken manchmal bei einer Richtung viel activer waren, als bei der entgegengesetzten.

Die Erwärmung mit constantem Strom geschah durch Einschaltung der Versuchsdrähte in einen Stromkreis, in welchem sich ein Accumulator und ein passender Widerstand befand. In manchen Fällen war die Erwärmung des Eisens durch die

elektrischen Schwingungen sehr stark und es musste bei der Beobachtung derselben in den Kreis des Thomson-Carpentier-Galvanometers ein Widerstand eingeschaltet werden, welcher bei der Beobachtung an dem Vergleichsdraht wieder entfernt wurde. Die entsprechenden, für Eisen erhaltenen Zahlen müssen daher mit einem constanten Factor F multiplicirt werden; F ist bei jeder Tabelle angegeben; die Werthe von  $\bar{\alpha}$  sind schon mit F multiplicirt.

Zum Vergleiche wurde immer ein Messingdraht verwendet.

#### Eisen—Messing.

Diese Combination wurde bei zwei verschiedenen Dicken untersucht. Das Eisen war ausgeglüht.

1.

Eisen- und Messingdraht 0.452 mm dick.

Widerstand pro Längeneinheit { Eisen = 0.0082 S. E. Messing = 0.0053

Verhältniss der spec. Wid. = 1.55.

Constanter Strom = 0.135 Amp.; F = 3.15 für D = 20 und 40.

Messing Eisen ľ D  $\boldsymbol{c}$ ψ β ψ β ã ā α 78.4 57.2 40.0 373 82 1447 97 77 126 11.5 20 70.3 53.6 297 1269 35.0 108 11.9 74 72 85 220 815 86 62 13.2 86 53 40 245 108 758 53 57 57 13.4 386 67 577 23 53 44 13.0 60 13.9 450 89 508 34 92 36

Tabelle I.

Mittel . . . . 12.9

Das Verhältniss von  $\phi = 1.48$ .

2.

Eisen- und Messingdraht 0.175 mm dick.

Widerstand pro Längeneinheit Eisen = 0.055 S. E. Messing = 0.036 \*

Verhältniss der spec. Wid. = 1.51.

Constanter Strom = 0.066 Amp.; F = 5.2 für die oberen Werthe von a und 8·1 für die unteren, und zwar diesmal für alle drei Distanzen.

Tabelle II.

D C		Eisen					Messing			
υ 		ψ	α	β	ā	ψ	α	β	δ	<i>v</i>
20	73 · 8	239	674	48	7332	160	499	54	914	8.0
20	70.7	235	344	39	7250	159	234	29	805	9.0
			413	57	3791		354	88	400	9.5
40			260	51	4148		168	43	387	10.5
			445	78	2960		194	67	291	10.2
60			203	52	3142		165	55	297	10.5

Mittel . . . . 9 · 6

Das Verhältniss von  $\psi = 1.49$ .

#### Stahl (Klaviersaitendraht)—Messing.

1.

Der Draht wurde von 0.5 mm auf 0.45 mm ausgezogen und dann untersucht.

Stahl- und Messingdraht 0.452 mm dick.

Widerstand pro Längeneinheit  $\begin{cases} Stahl = 0.0083 \\ Messing = 0.0053 \end{cases}$ 

Verhältniss der spec. Widerstände = 1.57.

Constanter Strom = 0.135 Amp.; F = 3.2 für D = 20und 40.

Tabelle III.

D	c	;	Stahl (	weich)		Messing				V
		ψ	α	β	ā	ψ	α	β	ā	
20	74.0	59.5	265	68	1253	38.6	60	58	103	12 · 1
20	<b>73</b> 0	55.0	182	52	1107	35.3	45	46	97	11.4
			125	54	749		31	61	51	14.6
40			92	42	694		35	67	53	13.2
			248	45	546		20	48	41	13.2
60			331	62	534		27	63	42	12.6

Mittel . . . . 12.8

Das Verhältniss von  $\psi = 1.54$ .

2.

Der Draht wurde bis zur Rothgluth erhitzt und hierauf in Wasser abgelöscht. Er war hart, doch nicht glashart.

Die Dicke wie vorher.

Widerstand pro Längeneinheit  $\begin{cases} Stahl = 0.0098 \text{ S. E.} \\ Messing = 0.0053 \end{cases}$ 

Verhältniss der spec. Widerstände = 1.85; F = 3.2 für D = 20 und 40. Constanter Strom = 0.135 Amp.

Tabelle IV.

$\bigcup_{D}$	С		Stahl	(hart)			Mes	sing		v
		ψ	α	β	ā	ψ	α	β	ā	
00	76	71	300	66	1480	39	78	71	111	13·4
20	72	66	307	67	1486	36	69	<b>6</b> 8	101	14.7
40			183	71	842		44	79	56	15 0
40			161	<b>6</b> 8	771		35	<b>6</b> 5	53	14.5
60			454	77	590		31	77	40	14.6
30			436	74	593		28	73	38	15.5
1		ı			1		1	l	ı	

Mittel . . . 14.6

Das Verhältniss von  $\psi = 1.83$ .

60

#### Bessemerstahl-Messing.

1.

Weicher Draht in dem Zustande, wie er den Zug verlässt. Stahl- und Messingdraht 0.396 mm dick.

Widerstand pro Längeneinheit  $\begin{cases} Stahl = 0.0152 \text{ S. E.} \\ Messing = 0.0064 \end{cases}$ 

Verhältniss der spec. Widerstände = 2·37; F = 3·15 für alle D.

Constanter Strom = 0.135 Amp.

Bessemerstahl (weich) Messing D ľ  $\boldsymbol{c}$ ψ 3 Œ ψ В ā α α 68.8 251 32 27 168 14.8 146 2495 54 55 20 76.5 2709 196 13.8 154 568 66 57 124 63 150 34 1399 29 33 87 16.1 40 180 36 1588 50 52 97 16.0

1087

1175

23

27

37

37

Tabelle V.

Mittel . . . . 15.4

66

75

34

36

16.3

15.7

Das Verhältniss von  $\psi = 2.70$ .

128

137

2.

Bessemerstahldraht, glashart.

Dicke wie vorhergehend.

Widerstand pro Längeneinheit  $\begin{cases} Stahl = 0.0252 \text{ S. E.} \\ Messing = 0.0064 \end{cases}$ 

Verhältniss der spec. Widerstände = 3.94; F = 3.15 für D = 20 und 40.

Constanter Strom = 0.135 Amp.

Bessemerstahl (hart) Messing D С Vβ ψ ā β 15.7 15.1 16.9 15.7 18.9 15.8

Tabelle VI.

Mittel . . . 16.3

Das Verhältniss von  $\phi = 3.75$ .

#### Nickel-Messing.

Der Nickeldraht wurde von 0.5 mm auf 0.452 mm ausgezogen und dann untersucht. Der Vergleichsdraht aus Messing hatte ebenfalls diesen Durchmesser.

Widerstand pro Längeneinheit  $\begin{cases} \text{Nickel} = 0.0109 \text{ S. E.} \\ \text{Messing} = 0.0052 \end{cases}$ 

Verhältniss der spec. Widerstände = 2:10.

Constanter Strom = 0.135 Amp.

Tabelle VII.

D C			Nic	kel	1		v			
	C	ψ	α	β	ā	ψ	α	β	ā	, v
00	74	81	603	50	1201	37	64	43	148	8 · 1
20 7	73	81	484	42	1160	37	63	43	144	8 · 1
40			388	59	<b>6</b> 53		50	62	81	8 · 1
			284	45	635		43	54	79	8.0
40			149	32	462		28	46	61	7.6
42€			124	28	442	l	25	42	60	7 · 4

Mittel . . . 7 · 9

Das Verhältniss von  $\psi = 2 \cdot 20$ .

Von diesen Beobachtungen sind nicht alle bei gleicher Empfindlichkeit des Standardinductors gemacht worden. Bei einer Gelegenheit wurde dieser durch einen Stoss stark erschüttert und dadurch seine Empfindlichkeit geändert, da die Drähte des Thermoelements nach einem früher angewandten Verfahren nur gekreuzt und nicht verlöthet waren. Tabelle VI zeigt den Einfluss dieses Unfalls, indem die oberen Werthe von ā durchwegs viel grösser sind, als die unteren, ein Unterschied, der nur durch eine Änderung im Standardinductor erklärt werden kann. Nebst den unteren Zahlen der Tabelle VI gehören hieher auch die Werthe der Tabelle V und VII.

#### Berechnung von µ.

Lord Rayleigh und Stefan (l. c.) haben für den Widerstand w' eines Drahtes gegen schnelle elektrische Schwingungen folgende Formel berechnet

$$n' = n\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}.$$

Darin bedeutet w den Widerstand für constante Ströme, a den Radius,  $\sigma$  den specifischen Widerstand,  $\mu$  die Permeabilität des Drahtes und n die Zahl der Schwingungen pro Secunde. Über den Werth von  $\mu$  bei verschiedenen Eisensorten sind bekanntlich schon viele ausführliche Untersuchungen gemacht worden;  $\mu$  ist keine constante Grösse, sondern eine Function der magnetisirenden Kraft und kann für weiches Eisen Werthe annehmen, die zwischen 100 und 3000 liegen. Nur bei den allerschwächsten Feldstärken ist  $\mu$  constant, wie das die Untersuchungen von Lord Rayleigh und Baur (1 c.) lehren. Alle bisherigen Messungen von  $\mu$  beziehen sich auf eine longitudinale Magnetisirung.

Der Verlauf von  $\mu$  bei circularer oder transversaler Magnetisirung ist mit Ausnahme einer Untersuchung von Herwig über die circulare Magnetisirung von Eisenröhren bisher nicht studirt worden.

Als Grundlage der hier gezogenen Schlüsse wird nun angenommen, dass der Verlauf der Magnetisirung in circulärer Richtung nahezu der nämliche ist, wie in der longitudinalen.

Die Wärmeentwicklung in einem von elektrischen Schwingungen durchflossenen Drahte ist proportional dem entsprechenden Widerstande und hängt also bei magnetisirbaren Drähten von  $\mu$  ab. Wenn wir nun die Resultate unserer Beobachtungen ansehen, so finden wir, dass der Werth von V für dieselbe Drahtsorte bei allen Werthen von D nahezu gleich ist; die Stärke der inducirten Schwingung und hiemit die Grösse der magnetisirenden Kraft nimmt jedoch mit zunehmendem D sicher ab, was ja die auf Messing bezüglichen Zahlenangaben bestätigen. Zwar ist in einigen Tabellen der Werth von V für D=20 etwas kleiner wie die beiden anderen, doch geht dieser Unterschied kaum über die Beobachtungsfehler hinaus.

Aber auch bei demselben D war die Stärke der inducirten Schwingung manchmal sehr verschieden je nach der Activität der Primärfunken, und doch ergab die Beobachtung beinahe immer gleiche Werthe von V.

Allerdings sind bei diesen Versuchen die Grenzen, innerhalb welcher die magnetisirende Kraft schwankt, nicht gross, doch müssten wir auch bei diesen Schwankungen viel grössere Differenzen in den Werthen von V bekommen, wenn sich die Magnetisirung in unserem Falle auf einem Theile der Magnetisirungscurve bewegen würde, welcher steil ansteigt und den rasch veränderlichen Werthen von un entspricht. Dass wir uns bei unseren Versuchen in einem Gebiete constanter µ bewegen, wird auch durch die absoluten Werthe von µ bekräftigt, welche wir mit Hilfe der Formel 1 aus den vorliegenden Beobachtungen berechnen können. Obige Formel habe ich schon in einer früheren Arbeit nach einer Richtung geprüft und mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung gefunden; aber auch die Versuche von Bjerknes, wovon später die Rede sein wird, sprechen sehr dafür, dass die den Formeln zu Grunde gelegten Annahmen vollkommen zutreffend sind.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Es sei bemerkt, dass die Werthe von  $\bar{a}$  für Messing dem Werthe von D nahezu verkehrt proportional sind, doch drückt sich in den Zahlen auch der Einfluss der Umgebung aus; es waren nämlich in der Nähe der Inductoren mehrere ausgedehnte Metallmassen vorhanden.

Werden zwei gleich dicke Drähte von denselben elektrischen Schwingungen durchflossen, so ist das Verhältniss der Wärmeentwicklung

$$V = \frac{w}{w_1} \sqrt{\frac{\mu \sigma_1}{\mu_1 \sigma}} .$$

Setze ich  $\mu_1 = 1$  und führe auch für w und  $w_1$  die spec. Widerstände ein, so ist

$$V = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\sigma_1}}$$
.

Daraus könnte man sogleich  $\mu$  berechnen, wenn die beiden Thermoelemente, welche uns ein Maass der Wärmeentwicklung angeben sollen, gleich wirksam, respective empfindlich wären. Um diesen Umstand zu controliren, wurden die Drähte auch durch einen constanten Strom erwärmt, bei welchem es ja bekannt ist, dass die Wärmeentwicklung proportional dem spec. Widerstande geschehen muss. In den meisten Fällen stimmt das Verhältniss von  $\psi$  mit jenem der spec. Widerstände nahe überein; in anderen Fällen ist an V eine kleine Correction anzubringen; wir schreiben also

$$qV = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\sigma_1}}$$
,

wo 
$$q = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{\psi_1}{\psi}$$
 ist.  
Wir haben also

$$\mu = q^2 V^2 \frac{\sigma_1}{\sigma}.$$

Bei dieser Berechnung wollen wir die Resultate der Tabelle II ausschliessen, weil die dort verwendeten Drähte nur 0·175 mm dick waren und die Formel 1 vielleicht für diese feinen Drähte nicht anwendbar ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind die beobachteten (V) und die corrigirten Werthe (qV) des Verhältnisses der Wärmeentwicklung, sowie die absoluten Werthe von  $\mu$  eingetragen.

Drahtsorte		V	qV	μ
Eisen weic	h	12.9	13.2	118
Stahl .	weich	12.8	13 · 1	106
(Klaviersaite)	hart	14.6	14.7	115
Bessemerstahl	weich	15.4	13.2	77
Dessemerstam	hart	16·3	17.1	74
Nickel	:	7.9	7.5	27

Tabelle VIII.

#### Bemerkungen über die Stärke der magnetisirenden Kräfte.

Um eine Schätzung der im Eisendrahte beim Durchgange elektrischer Schwingungen erregten magnetisirenden Kräfte zu erhalten, muss man vor Allem einen Überblick über die während der Oscillationen herrschenden Stromstärkeverhältnisse erlangen. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Wärmeentwicklung durch den constanten Strom und durch die Schwingungen. Bedeuten J und i die entsprechenden Stromstärken in einem bestimmten Zeitmoment, so ist die im Zeitelement dt entwickelte Wärmemenge gegeben durch  $MwJ^2dt$  und  $Mn'i^2dt$ , und während des Verlaufes einer ganzen Entladung ist sie  $=Mn'\int_0^\infty i^2dt$ . Man kann annehmen, dass die

Schwingungen einer Entladung vollkommen ablaufen, bevor die nächste beginnt. Die Wärmeentwicklung pro Secunde ist N-mal so gross, wenn N Entladungen in der Zeiteinheit auftreten und wenn man annimmt, dass sich die Wärmewirkungen einfach superponiren.

Wir wollen als concretes Beispiel die Daten über den Messingdraht aus Tabelle I nehmen. Da ist  $\psi = 37.5$  und  $\alpha = 94.5$  für D = 20; also die Wärmeentwicklung durch die Schwingungen ungefähr 2.5 mal so gross, als durch den constanten Strom; doch nehmen wir an, da es sich nur um eine Schätzung handelt, sie wäre gleich, so ist zu setzen

$$wJ^2 = Nn' \int_0^\infty i^2 dt.$$
 2)

Bei der Schätzung der magnetisirenden Kräfte kommen die Maximalstromstärken der Oscillation in Betracht. Wir wollen nun den Verlauf einer Oscillation in der Form einer gedämpften Pendelschwingung annehmen, was ja angenähert richtig sein dürfte. Der erste maximale Ausschlag des Pendels, welches mit einer gewissen Geschwindigkeit die Ruhelage verlässt, repräsentirt uns hier die erste maximale Stromstärke  $i_m$ . Wir schreiben daher

$$i = Ai_m e^{-\frac{\lambda t}{T}} \sin \frac{\pi t}{T}, \qquad 3)$$

wo

$$A = e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\pi^2} .$$

 $\lambda$  bedeutet auch hier das logarithmische Decrement und 7 die Schwingungsdauer. Setzen wir diesen Werth in 2 ein, so ist

$$wJ^2 = Nw'A^2 i_m^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda t}{T}} \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt$$

und daher

$$wJ^2 = Nn'A^2i_m^2\frac{T}{4}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda^2 + \pi^2}\right).$$

Wir können  $\lambda^2$  gegen  $\pi^2$  und ebenso  $\frac{1}{\pi}$  gegen  $\frac{1}{\lambda}$  vernachlässigen und haben also

$$wJ^2 = Nw'A^2i_m^2 \frac{T}{4\lambda}.$$

Setzen wir für w' den Werth aus 1) ein, so ist

$$\frac{i_m^2}{J^2} = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{n\sigma}{\mu}} \frac{4\lambda}{NA^2}.$$
 4)

Je grösser die Dämpfung, desto stärker muss die Oscillation einsetzen, damit dieselbe Wärmewirkung erzeugt wird wie beim constanten Strom. Für Werthe von  $\lambda$ , welche sich der Null nähern, verliert die Gleichung ihre Richtigkeit; sie entspricht aber dann auch nicht mehr den Bedingungen, unter welchen wir sie aufgestellt haben. Wir machen den Vergleich an dem Messingdrahte; es ist a=0.0226 cm,  $\sigma=8000$ , N=23,  $n=9\times10^7$  (nach einer früheren Bestimmung),  $\mu=1$ .

Für die Beurtheilung der Dämpfung der Schwingungen im Secundärinductor muss der Umstand massgebend sein, dass hier ein Eisendraht eingeschaltet ist; eine theoretische Schätzung von  $\lambda$  aus Selbstinduction und Widerstand des Secundärinductors führt nahe auf den Werth  $\lambda=0.03$ , welchen wir in unsere Berechnung einführen wollen.

Unter Zugrundelegung obiger Daten ergibt sich

$$\frac{i_m^2}{I^2} = 58000.$$

Wird ein Draht von einem constanten Strome durchflossen, so ist die circular wirkende magnetisirende Kraft H im Drahte und in einem Abstande a von der Axe desselben nach Kirchhoff <sup>1</sup>

$$H=2\pi ua$$
,

wo u die Stromdichtigkeit bedeutet.

Die gleiche Formel wurde später auch von H. Streintz<sup>2</sup> und Lorenz<sup>3</sup> aufgestellt. In jedem Punkte tragen zur magnetisirenden Kraft nur jene Stromfäden bei, welche innerhalb des Kreises liegen, auf dessen Peripherie sich der Punkt befindet, und zwar ist die Wirkung so, als wenn alle Stromfäden in der

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., Ergänzungsbd. V.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 76, 1877.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Wied. Ann., Bd. VII.

Axe vereinigt wären. Man kann also obige Formel auch so schreiben

$$H=\frac{2i}{a}$$
,

wo i ganz einfach die Stromstärke innerhalb des Kreises vom Radius a bedeutet. Ist r der Radius des Drahtes, so kann man für einen Punkt der Oberfläche

$$H=\frac{2i}{r}$$

setzen. In unserem Falle ist zwar der Strom nicht gleichmässig über den ganzen Querschnitt, wohl aber symmetrisch um die Axe vertheilt, also die Formel noch anwendbar. Dabei ist noch ein Umstand zu berücksichtigen. Die Strömung, welche ohnehin nur in einer dünnen Schichte nahe an der Oberfläche auftritt, besitzt gegen die Tiefe zu eine Phasenverschiebung. Die magnetisirende Kraft der oberen Schichten erfährt also eine Gegenkraft durch die unteren Schichten. Diese Gegenwirkung ist allerdings sehr klein.

Nach den Berechnungen von Stefan (l. c.) ist in einem Eisendrahte unter der Annahme von  $\mu=150$  bei  $50\times10^6$  Schwingungen in der Secunde die Amplitude in einer Tiefe von  $0.0058\,\text{mm}$  in der Phase um eine halbe Schwingungsdauer gegen die Amplitude an der Oberfläche verzögert. Die Amplitude ist in dieser Tiefe 23mal kleiner als an der Oberfläche. Es ist bemerkenswerth, dass die Versuche von Bjerknes¹ mit den Berechnungen Stefan's sehr gut übereinstimmen. Nach Bjerknes verleiht eine auf Kupferdraht aufgetragene Eisenschichte von  $0.006\,\text{mm}$  dem Draht ganz den Charakter eines Eisendrahtes.

Mit Rücksicht auf diese Umstände ist also die Darstellung der Stromschwankungen durch Gleichung 3) auch nicht

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wied. Ann., Bd. 48. In der betreffenden Tabelle ist für die Dicke der Eisenschichte von 0·0124 mm ein Werth für den Elektrometerausschlag eingetragen, der sich von dem für die Schichtdicke von 0·0057 mm nur sehr wenig unterscheidet. Die Beobachtungen von Bjerknes beziehen sich auf Drähte von 0·5 mm Durchmesser.

ganz correct und es ist zur Bestimmung von  $i_m$  nicht ohne Weiteres die Quadratwurzel aus 4 zu ziehen; mit Rücksicht auf die sehr starke Dämpfung der nach der Tiefe verlaufenden Strömung können wir uns jedoch erlauben

$$i_m = J\sqrt{58000} = 240J$$

zu nehmen. Nun ist J=0.135 Amp., also  $i_m=32$  Amp. Mit dieser Stärke muss die Strömung ihr erstes Maximum erreichen; für diesen Moment und für die Oberfläche ergibt sich also

$$H = 290 \text{ abs. E.}$$

Diese Zahl gibt allerdings nur den grössten möglichen Werth an; es nimmt H sowohl nach der Tiefe als auch im Verlaufe der Schwingung ab. Wenn man jedoch berücksichtigt dass µ auch mit abnehmender magnetisirender Kraft einen endlichen Werth beibehält, dann muss man wohl zugeben, dass sich diese extremen Werthe der magnetisirenden Kräfte bemerkbar machen müssten, wenn die Moleküle oder Molekülgruppen im Stande wären, ihrem raschem Wechsel zu folgen. Es liegt nahe anzunehmen, dass die Magnetisirung eines Körpers bei sehr rasch wechselndem Felde überhaupt nicht über jene Grenzen hinausgeht, innerhalb welcher µ constant ist und welche ihr Analogon in den elastischen Deformationen eines Körpers hat. Eine stärkere Magnetisirung über dieses Gebiet hinaus nimmt wahrscheinlich mit zunehmender Wechselzahl rasch ab, wenigstens scheint die Erfahrung dafür zu sprechen.

Beobachtungen in dieser Richtung wären gewiss von Interesse.

Vielleicht würde sich eine solche Untersuchung direct mit Condensatorentladungen führen lassen. Legt man Eisendrähte in eine Rolle und schickt durch diese eine Condensatorentladung, welche oscillatorisch verläuft, so werden die Oscillationen in doppelter Weise durch die Eisendrähte beeinflusst.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man muss dabei bedenken, dass diese hohe Stromstärke nur eine ausserordentlich kurze Zeit anhält.

Erstens wird die Dauer der Oscillation verlängert, da die Eisendrähte den Selbstinductionscoëfficienten des Entladungskreises erhöhen, und zweitens wird auch die Dämpfung der Schwingungen vermehrt, insoferne als in den Eisendrähten infolge der Hysteresis ein Theil der Schwingungsenergie absorbirt wird. Mit Hilfe des von Hiecke<sup>2</sup> construirten Apparates kann die Schwingungsdauer einer Entladung ziemlich genau bestimmt werden und man kann dabei auch die Dämpfung messen. Auf diese Weise könnte man einigen Aufschluss über das Verhalten des Eisens bei Schwingungen erhalten, deren Zahl zwischen 500 und 10000 liegt.

<sup>1</sup> Die Foucault'schen Ströme müssten eliminirt werden.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 96, 1887.

#### VIII. SITZUNG VOM 8. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX und X (November und December 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Skraup in Graz übersendet zwei im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen:

- Über propionylirte Schleimsäureester«, von P. Fortner und Zd. H. Skraup.
- 2. Ȇber die Umwandlung der Citraconsäure in Mesaconsäure«, von Dr. R. Franz.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine von Dr. J. Weidenfeld im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung, die den Titel trägt: »Versuche über die respiratorische Function der Intercostalmuskeln. II. Abhandlung. Sind die Intercostalmuskeln bei der Athmung thätig?«

Herr Dr. Gustav Jäger, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über die innere Reibung der Lösungen«.



### SITZUNGSBERICHTE

DER

## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



#### IX. SITZUNG VOM 5. APRIL 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 17. März l. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Gustav Adolph Weiss in Prag.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893), Abtheilung I, und das Heft IX—X (November und December 1893), Abtheilung II. a., des 102. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft II (Februar 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Der Magistrat der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien spricht der kaiserl. Akademie den Dank aus für das demselben übermittelte Gutachten über den neuesten Stand der Blitzableiterfrage.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zu einer zweiten geologischen Forschungsreise nach Thessalien und Macedonien bewilligte Subvention; desgleichen dankt Herr Custos Dr. Günther Ritter Beck v. Mannagetta für die ihm bewilligte Reisesubvention zur Durchführung seiner botanischen Forschungen im nordwestlichen Theile der Balkanhalbinsel.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine Arbeit aus dem phyto-paläontologi-

schen Institute der k. k. Universität in Graz: »Über atavistische Blattformen des Tulpenbaumes«, von Adolf Noé v. Archenegg.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

- Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind« (II. Theil), von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
- 2. Ȇber die Unterkühlung von Flüssigkeiten« (II. Mittheilung), von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz.
- Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
- 4. Ȇber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von A. J. Stodolkiewitz, Gymnasialprofessor in Plotzk (Polen).

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

- Von Herrn Franz Müller in Siegenfeld, mit der Aufschrift:
   Neuerung an Verkehrsmitteln«;
- von Prof. Dr. A. Wassmuth in Graz mit der Aufschrift:
   \*Uber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium im IV. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung: »Eine neue Phytoptiden-Gattung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Prof. Dr. R. Přibram übersandte Arbeit aus dem

chemischen Laboratorium der Universität zu Czernowitz: »Zur Kenntniss des Resacetophenons«, von A. Wechsler.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben zwei von Herrn Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

- Über einige Derivate der Veratrumsäure und des Veratrols«, von Dr. Wilhelm Heinisch.
- Über die trockene Destillation des Kalksalzes der Diäthylprotocatechusäure«, von Dr. Wilhelm Heinisch.

Endlich überreicht Herr Hofrath Lieben eine von dem Director der Versuchsanstalt für Photographie, Herrn J. M. Eder, eingesandte Arbeit des Herrn Eduard Valenta: »Über die Löslichkeit des Chlor-, Brom- und Jodsilbers in verschiedenen anorganischen und organischen Lösungsmitteln«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel: ""Uber die Krystallform des Tetramethylbrasilin  $[C_{16}H_{10}O_5(CH_3)_4]$ .

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt legt eine Abhandlung vor, betitelt: Die Formbildung des menschlichen Blinddarmes und die Valvula coli«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn F. Hasenöhrl: »Über das quadratische Reciprocitätsgesetz«

Herr Dr. Eduard Freiherr v. Haerdtl, Professor an der k. k. Universität zu Innsbruck, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: \*Entdeckung der Ursache der Nicht-übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen des Mondes«

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

- Adamkiewicz, A., Tafeln zur Orientirung an der Gehirnoberfläche des lebenden Menschen bei chirurgischen Operationen und klinischen Vorlesungen. (Mit deutschem, französischem und englischem Text.) Zweite unveränderte Auflage. Wien, 1894; Folio.
- Staggemeier, A., First Part of the General-Maps for the Illustration of Physical Geography. (Contain five tables marked: I-V.) Copenhagen, 1893; Folio.

Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(II. Theil)

von

#### Dr. Jos. Finger.

In dem ersten Theile dieser Abhandlung¹ wurden die Beziehungen zwischen den Componenten der Spannung und den Deformationen, sowie auch der Ausdruck für das Potential der elastischen Kräfte lediglich aus zwei Grundannahmen deducirt. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass erstens das in Betracht gezogene Körperelement vor der betrachteten Deformation is otrop ist, und zweitens, dass für die inneren Kräfte, die innerhalb dieses Körperelements wirksam sind, ein Potential existirt, ohne dass jedoch über die Art der zwischen den einzelnen materiellen Punkten dieses Elements wirkenden Kräfte irgend eine Annahme gemacht worden wäre.

Es ergab sich hiedurch, wofern man bei der Bestimmung des Potentials, beziehungsweise der Spannungen von Gliedern absieht, die in Bezug auf die 9 Verschiebungsderivationen von höherer als der dritten, beziehungsweise zweiten Ordnung sind, die Nothwendigkeit, bei jeder isotropen Substanz ausser der Integrationsconstanten  $A_0$  der Potentialfunction noch 6 constante, bloss von dem anfänglichen Zustande des betrachteten

Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII., Abth. II a., Jänner 1894.

Körperelements abhängige Coëfficienten, also 6 Elasticitätsconstanten in Rechnung zu ziehen. In aller Kürze wurde jedoch bemerkt, dass diese 6 Constanten nicht von einander unabhängig sein müssen, sondern dass zwischen denselben noch gewisse Beziehungen stattfinden können, deren Ermittelung eine Aufgabe der Moleculartheorie ist.

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass in der That bei der Beschränkung auf die oberwähnten Glieder sich diese 6 Coëfficienten durch bloss drei Elasticitätsconstanten ausdrücken lassen, wofern man von der üblichen besonderen Annahme ausgeht, dass die zwischen je zwei materiellen Punkten m und  $\mu$  wirksamen inneren Kräfte entweder attractiv oder repulsiv wirken und lediglich Functionen der variablen Entfernung R dieser Punkte, also auch bestimmte Functionen des Quadrats  $R^2$  dieser Entfernung sind, so dass jedenfalls für diese gegenseitige Einwirkung der beiden materiellen Punkte m und  $\mu$  ein Potential u existirt, welches sich zudem in der Form

$$u = m\mu F(R^2) \tag{1}$$

ausdrücken lässt, wo F irgend eine, wenn auch unbekannte continuirliche Function und m und  $\mu$  die Massen der beiden materiellen Punkte bedeuten.

Um dies nachzuweisen, sei vorläufig ein Körper vorausgesetzt, der in seinem anfänglichen Zustande, in welchem Isotropie in jedem Körperelemente stattfinde, in seiner ganzen Ausdehnung homogen ist und dessen Punkte durch irgend welche Ursachen eine endliche homogene Lagenänderung (eine homogene Deformation) erfahren haben. Dieser Annahme zufolge ist, wenn x'y'z' die zur beliebigen Zeit t stattfindenden Coordinaten des Punktes  $\mu$ , und  $\xi \eta \zeta$  die gleichzeitigen Coordinaten des Punktes m in Bezug auf ein an der Bewegung der einzelnen Punkte des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem, und wenn ferner xyz die anfänglichen Werthe der relativen Coordinaten  $x'-\xi,y'-\eta,z'-\zeta$  des Punktes  $\mu$  bezeichnen,

$$x' = \xi + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z y' = \eta + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z z' = \zeta + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$$
 (2)

wo  $a_{11}a_{21}...a_{33}$  gewisse vorläufig unbestimmt gelassene Grössen bedeuten, die von xyz unabhängig sind.

Durch D sei die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}$$
 (3)

und durch  $A_{11}A_{21}A_{31}...$  die zu  $a_{11}a_{21}a_{31}...$  adjungirten Unterdeterminanten bezeichnet.

Jenes Tetraëder, dessen eine Spitze stets der seine Lage stetig ändernde Punkt m bildet und dessen zu den Axen xyz parallelen, von m ausgehenden Kanten in der anfänglichen Lage die Länge 1 haben, erlangt durch die homogene Deformation (2) zur Zeit t die Lage und Gestalt jenes Tetraëders, dessen Eckpunkte m,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  in Bezug auf das zu xyz parallele bewegliche Axensystem, dessen Anfangspunkt m ist, die Coordinaten (000),  $(a_{11}a_{12}a_{13})$ ,  $(a_{21}a_{22}a_{23})$ ,  $(a_{31}a_{32}a_{33})$  haben, und dessen sechsfaches Volum der Determinante (3) gleicht, und zwar sind die Kanten  $\overline{m\mu_1} = R_1$ ,  $\overline{m\mu_2} = R_2$ ,  $\overline{m\mu_3} = R_3$  und ihre gegenseitige Lage durch die Gleichungen

$$R_{1}^{2} = a_{11}^{2} + a_{12}^{2} + a_{13}^{2} = a_{x}$$

$$R_{2}^{2} = a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = a_{y}$$

$$R_{3}^{2} = a_{31}^{2} + a_{22}^{2} + a_{33}^{2} = a_{z}$$

$$R_{2}R_{3}\cos(R_{2}R_{3}) = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = b_{x}$$

$$R_{3}R_{1}\cos(R_{3}R_{1}) = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = b_{y}$$

$$R_{1}R_{2}\cos(R_{1}R_{2}) = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = b_{z}$$

$$(4)$$

bestimmt.

Jene Punkte µ, welche zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt der bewegliche Punkt m und deren Radius 1 ist, bilden in der primitiven Lage zufolge (2) ein Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf ein zu den früheren Coordinatenaxen paralleles Axensystem mit dem Anfangspunkte m

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^{2} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^{2} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^{2} =$$

$$= a_{x}x^{2} + a_{y}y^{2} + a_{z}z^{2} + 2b_{x}yz + 2b_{y}zx + 2b_{z}xy = 1$$
 (5)

ist. Dieses Ellipsoid ist den Gleichungen (4) zufolge bloss von der Gestalt, nicht auch von der Lage des Tetraëders  $m\mu_1\mu_2\mu_3$  abhängig. Sind ferner abc die reciproken Werthe der Halbaxen dieses Ellipsoids und  $F_1F_2F_3$  die drei in m zusammenstossenden Grenzflächen jenes Parallelopipeds, dessen Kanten  $m\mu_1$ ,  $m\mu_2$ ,  $m\mu_3$  sind und dessen Volum D ist, so ist, wenn  $\sigma$  und s die Summen  $a^2 + b^2 + c^2 - 3$  und  $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 3$  bedeuten,

$$\sigma = a^{2} + b^{2} + c^{2} - 3 = R_{1}^{2} + R_{2}^{2} + R_{3}^{2} - 3 = a_{x} + a_{y} + a_{z} - 3 =$$

$$= a_{11}^{2} + a_{21}^{2} + a_{31}^{2} + a_{12}^{2} + a_{22}^{2} + a_{32}^{2} + a_{13}^{2} + a_{23}^{2} + a_{33}^{2} - 3$$

$$s = b^{2}c^{2} + c^{2}a^{2} + a^{2}b^{2} - 3 = F_{1}^{2} + F_{2}^{2} + F_{3}^{2} - 3 =$$

$$= (a_{y}a_{z} - b_{x}^{2}) + (a_{z}a_{x} - b_{y}^{2}) + (a_{x}a_{y} - b_{z}^{2}) - 3 =$$

$$= A_{11}^{2} + A_{21}^{2} + A_{31}^{2} + A_{12}^{2} + A_{22}^{2} + A_{32}^{2} + A_{13}^{2} + A_{23}^{2} + A_{33}^{2} - 3$$

$$D = 1 + v = abc$$

$$(6)^{1}$$

wofern v die cubische Dilatation bezeichnet.

Das der Fläche (5) congruente und derselben conjungirte<sup>1</sup> Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf dasselbe Axensystem

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^{2} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^{2} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^{2} = 1$$
 (7)

und dessen Mittelpunkt gleichfalls der Punkt m ist, hängt wesentlich von der Lage des Triëders  $m\mu_1\mu_2\mu_3$  ab. Es sind nämlich die mit den drei Höhen  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  dieses Triëders parallelen Kanten  $\frac{1}{N_1}$ ,  $\frac{1}{N_2}$ ,  $\frac{1}{N_3}$  des demselben adjungirten  $\frac{1}{N_1}$  Triëders conjugirte Radien des Ellipsoids (7).

Das mit der letzten Fläche (7) coaxiale, derselben adjungirte <sup>1</sup> Ellipsoid, dessen Gleichung bezüglich desselben Axensystems

$$(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^{2} + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^{2} + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^{2} \equiv D^{2}$$
(8)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger: Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik. Diese Sitzungsber., Bd. CI, S. 1105—1142 (1892).

lautet, ist zugleich zufolge (2) jenes Deformationsellipsoid, in welches zur Zeit t jene Kugelfläche übergeht, deren Mittelpunkt in der primitiven Lage der Punkt m und deren Radius 1 ist. Die Halbaxen dieser Fläche (8) sind abc und die Kanten  $R_1R_2R_3$  des Triëders  $M\mu_1\mu_2\mu_3$  sind conjugirte Radien derselben.

Die durch (2) charakterisirte homogene Deformation lässt sich bekanntlich — abgesehen von der durch  $\xi \eta \zeta$  bestimmten fortschreitenden Bewegung, die durch die Bewegung des Mittelpunktes m der Flächen (5), (7), (8) bedingt ist — als zusammengesetzt ansehen a) aus einer reinen Deformation, d. i. aus einer Ausdehnung nach den Richtungen der drei Axen der Fläche (5) - den Dilatationshauptaxen - deren Richtungen vorläufig von nun an als die bisher unbestimmt gelassenen Axenrichtungen xyz angenommen seien, und b) aus einer Rotation des Körpers um den Punkt m, durch welche nach einer Drehung & das Ellipsoid (5) in die Lage des conjungirten Ellipsoids (7) gelangt, dessen mit dem Deformationsellipsoid (8) gleichgerichteten Axen durch XYZ bezeichnet seien. Sind demgemäss nunmehr durch xyz die anfänglichen Coordinaten des Punktes µ in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (5) und durch XYZ die Coordinaten der Lage desselben Punktes µ zur Zeit t in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (7) oder (8) bezeichnet und bedeuten  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  die Hauptdilatationen, so ist

$$a = 1 + \lambda_{1}$$

$$b = 1 + \lambda_{2}$$

$$c = 1 + \lambda_{3}$$

$$\sigma = (1 + \lambda_{1})^{2} + (1 + \lambda_{2})^{2} + (1 + \lambda_{3})^{2} - 3$$

$$s = (1 + \lambda_{2})^{2} (1 + \lambda_{3})^{2} + (1 + \lambda_{3})^{2} (1 + \lambda_{1})^{2} + (1 + \lambda_{1})^{2} (1 + \lambda_{2})^{2} - 3$$

$$v = D - 1 = (1 + \lambda_{1}) (1 + \lambda_{2}) (1 + \lambda_{3}) - 1$$

$$(9)$$

und es reduciren sich die Gleichungen (2) auf folgende einfache Relationen:

$$X = ax = (1 + \lambda_1)x$$

$$Y = by = (1 + \lambda_2)y$$

$$Z = cz = (1 + \lambda_3)z$$
(10)

Da nun  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  die anfängliche  $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  die schliessliche Entfernung der beiden Punkte m und  $\mu$  ist, so muss, wenn durch  $\rho$  die Differenz

$$\rho = R^2 - r^2 \tag{11}$$

und durch ABC die Grössen

$$A = a^{2} - 1 = 2\lambda_{1} + \lambda_{1}^{2}$$

$$B = b^{2} - 1 = 2\lambda_{2} + \lambda_{2}^{2}$$

$$C = c^{2} - 1 = 2\lambda_{3} + \lambda_{3}^{2}$$
(12)

welche von derselben Grössenordnung sind, wie die Dilatationen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , bezeichnet werden, der Gleichung (10) zufolge

$$\rho = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \tag{13}$$

sein.

Ferner ersieht man aus den Gleichungen (12) und aus den durch (9) dargestellten Werthen von 5, s und v sofort, dass zwischen diesen drei Grössen und den Grössen ABC folgende Beziehungen stattfinden:

$$A+B+C = \sigma$$

$$A^{2}+B^{2}+C^{2} = \sigma^{2}+4\sigma-2s$$

$$BC+CA+AB = -2\sigma+s$$

$$A^{3}+B^{3}+C^{3} = \sigma^{3}+6\sigma^{2}-3s\sigma+3v^{2}+3\sigma-3s+6v$$

$$A^{2}(B+C)+B^{2}(C+A)+C^{2}(A+B) = -2\sigma^{2}+s\sigma-3v^{2}-3\sigma+3s-6v$$

$$ABC = v^{2}+\sigma-s+2v$$
Das Potential der gesammten zur Zeit  $t$  auf das Massen-

Das Potential der gesammten zur Zeit t auf das Massenelement m einwirkenden inneren Kräfte ist zufolge (1) und (11)

$$\Sigma u = m \cdot \Sigma \mu F(R^2) = m \cdot \Sigma \mu F(r^2 + \rho) \tag{15}$$

wobei sich die Summe Σ auf sämmtliche Massentheilchen μ des Körpers erstreckt, die auf m — sei es eine anziehende oder eine abstossende Wirkung ausüben.

Da den Gleichungen (12) und (13) gemäss e bezüglich der Hauptdilatationen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  von der ersten Ordnung ist, so ist, wenn man bei der Bildung des Potentials der inneren Kräfte von nun an von allen Gliedern absieht, die bezüglich dieser Hauptdilatationen, also auch bezüglich der durch (12) bestimmten Grössen A, B, C von höherer Ordnung sind, als der dritten,

$$F(r^2+\rho) = F(r^2) + F'(r^2) \cdot \rho + \frac{1}{2} F''(r^2) \cdot \rho^2 + \frac{1}{6} F'''(r^2) \cdot \rho^3,$$

und zwar besteht diese Relation, wie gross auch immer die oberwähnte Drehung des Körpers sein möge, durch welche das Ellipsoid (5) in die Lage (7) gelangt.

Setzt man in die letzte Gleichung den Werth (13) ein, so ergibt sich

$$\begin{split} F(r^2 + \rho) &= F(r^2) + F'(r^2) \cdot (Ax^2 + By^2 + Cz^2) \\ &+ \frac{1}{2} F''(r^2) \cdot [A^2x^4 + B^2y^4 + C^2z^4 + 2BCy^2z^2 + 2CAz^2x^2 + 2ABx^2y^2] \\ &+ \frac{1}{6} F'''(r^2) \cdot [A^3x^6 + B^3y^6 + C^3z^6 + 3A^2x^4(By^2 + Cz^2) + \\ &+ 3B^2y^4(Cz^2 + Ax^2) + 3C^2z^4(Ax^2 + By^2) + 6ABCx^2y^2z^2] \,. \end{split}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (15) und berücksichtigt man, dass durch die in der anfänglichen Lage des Körpers vorausgesetzte Isotropie der Substanz die gleiche Massenlagerung bezüglich dreier beliebiger orthogonaler Axen des Körpers, also auch bezüglich der von der Rotation  $\vartheta$  des Körpers unabhängigen Richtungen der drei Axen des Ellipsoids (5) bedungen ist, so erhält man, wofern durch  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  kürzehalber die auf alle wirksamen Massenelemente  $\mu$  sich erstreckenden Summen

$$a_{0} = \Sigma \frac{\mu}{2} F(r^{2})$$

$$a_{1} = \Sigma [\mu F'(r^{2}) \cdot x^{2}] = \Sigma [\mu F'(r^{2}) \cdot y^{2}] = \Sigma [\mu F'(r^{2}) \cdot z^{2}]$$

$$a_{2} = \Sigma [\mu F''(r^{2}) \cdot y^{2}z^{2}] = \Sigma [\mu F''(r^{2}) \cdot z^{2}x^{2}] = \Sigma [\mu F''(r^{2}) \cdot x^{2}y^{2}]$$

$$a_{3} = \Sigma [2 \mu F'''(r^{2}) \cdot x^{2}y^{2}z^{2}]$$
(16)

bezeichnet werden, so dass in Folge der bedungenen Isotropie auch

$$\begin{split} &\Sigma[\mu F''(r^2).x^4] = \Sigma[\mu F''(r^2).y^4] = \Sigma[\mu F''(r^2).z^4] = 3 \, a_2 \\ &\Sigma[\mu F'''(r^2).x^4y^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).x^4z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).y^4x^2] = \\ &= \Sigma[\mu F'''(r^2).y^4z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^4x^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^4y^2] = \frac{3}{2} \, a_3 \\ &\Sigma[\mu F'''(r^2).x^6] = \Sigma[\mu F'''(r^2).y^6] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^6] = \frac{15}{2} \, a_3 \end{split}$$

ist, als das Potential  $\Sigma u$  aller auf den materiellen Punkt m zur Zeit t einwirkenden inneren Kräfte einen Ausdruck von der Form

$$\Sigma u = m \left[ 2 a_0 + a_1 \cdot \alpha_1 + \frac{1}{2} a_2 \alpha_2 + \frac{1}{4} a_3 \alpha_3 \right],$$

wo

$$\alpha_{1} = A + B + C 
\alpha_{2} = 3(A^{2} + B^{2} + C^{2}) + 2(BC + CA + AB) 
\alpha_{3} = 5(A^{3} + B^{3} + C^{3}) + 
+3[A^{2}(B + C) + B^{2}(C + A) + C^{2}(A + B)] + 2ABC$$
(17)

Bildet man, um das Gesammtpotential sämmtlicher innerer Kräfte, die zwischen den Massenpunkten des deformirten Körpers thätig sind, zu ermitteln, auf dieselbe Weise das Potential für jeden einzelnen Punkt m des Punktsystems und summirt die so erhaltenen Werthe, so erhält man, da bei der Bildung dieser Summe die gegenseitige Einwirkung je zweier Punkte zweimal in Rechnung gezogen ist, für dieses Potential U der sämmtlichen inneren Kräfte des Punktsystems den letzten Gleichungen zufolge den Werth

$$U = \frac{1}{2} \sum m \left( 2 a_0 + a_1 \alpha_1 + \frac{1}{2} a_2 \alpha_2 + \frac{1}{4} a_3 \alpha_3 \right).$$

Demgemäss ist, wenn  $\delta_0$  die primitive Dichtigkeit und dv das anfängliche Volum des Massenelementes m bedeuten, so dass  $m = \delta_0 . dv$  ist, und wofern durch  $A_0 A_1 A_2 A_3$  jene von der anfänglichen — als isotrop vorausgesetzten — Massenlagerung abhängigen Werthe bezeichnet werden, die durch

$$\frac{A_0}{a_0} = \frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3} = \delta_0 \tag{18}$$

bestimmt sind,

$$U = \int f \, dv, \tag{19}$$

wo f die Potentialfunction

$$f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \alpha_1 + \frac{1}{4} A_2 \alpha_2 + \frac{1}{8} A_3 \alpha_3 \tag{20}$$

bedeutet.

Die in dieser Gleichung ausser den constanten, vom anfänglichen Zustande des Körpers abhängigen Grössen  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  vorkommenden Variablen  $\alpha_1$   $\alpha_2$   $\alpha_3$  sind den Gleichungen (17) und (12) zufolge bloss Functionen der Hauptdilatationen  $\lambda_1$   $\lambda_2$   $\lambda_3$ , und zwar ist  $\alpha_1$  von der ersten,  $\alpha_2$  von der zweiten und  $\alpha_3$  von der dritten Grössenordnung.

Die Substitution von (17) und (12) führt, wenn kürzehalber durch  $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$  die Summen

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \beta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad \gamma = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2$$

$$\alpha' = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, \quad \beta' = \lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^2 (\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\gamma' = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$(21)$$

bezeichnet werden, zu folgendem Werthe der Potentialfunction:

$$f = A_0 + A_1 \left( \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) + A_2 (3\beta + 2\gamma + 3\alpha' + \beta')$$

$$+ A_3 (5\alpha' + 3\beta' + 2\gamma')$$
(22)

Es lässt sich aber auch die Potentialfunction f leicht als Function der den Gleichungen (6) gemäss durch die Form des ursprünglich betrachteten Tetraëders  $m\mu_1\mu_2\mu_3$  genau bestimmen, jedoch von der Lage desselben vollkommen unabhängigen Grössen s,  $\sigma$  und  $\nu$  ausdrücken, von welchen  $\sigma$  die um 3 verringerte Summe der Quadrate der drei in m zusammenstossenden Seitenkanten  $R_1R_2R_3$ , ferner s die um 3 verringerte vierfache Summe der Quadrate der drei in demselben Punkte zusammenstossenden Seitendreiecke und D das sechsfache Volum dieses Tetraëders bedeuten. Substituirt man nämlich (14) in (17) und diese Werthe in (20), so findet man

$$f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \cdot \sigma + \frac{1}{4} A_2 \cdot (3 \sigma^2 + 8 \sigma - 4s) + \frac{1}{8} A_3 (5 \cdot \sigma^3 + 24 \sigma^2 - 12 \sigma s + 8v^2 + 8\sigma - 8s + 16v)$$
(23)

Die in dieser Gleichung ausser der cubischen Dilatation v = D-1 vorkommenden Grössen  $\sigma$  und s lassen sich auch unmittelbar aus den Gliedern der Determinante (3) berechnen, und zwar ist den Gleichungen (6) und (4) gemäss  $\sigma$  die um 3 verringerte Summe der Quadrate dieser sämmtlichen Glieder, beziehungsweise der Coëfficienten von  $x^2$ ,  $y^2$  und  $z^2$  in der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (8) adjungirten Ellipsoids (5), und s ist den Gleichungen (6) und (4) zufolge die um 3 verringerte Summe der Quadrate sämmtlicher Unterdeterminanten von D, beziehungsweise der Coëfficienten von  $x^2$ ,  $y^2$  und  $z^2$  in der Gleichung des Deformationsellipsoids (8), nämlich

$$\sigma = a_{x} + a_{y} + a_{z} - 3 = a_{11}^{2} + a_{12}^{2} + a_{13}^{2} + a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} + a_{23}^{2} + a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} - 3$$

$$s = a_{y}a_{z} + a_{z}a_{x} + a_{x}a_{y} - b_{x}^{2} - b_{y}^{2} - b_{z}^{2} - 3 = a_{11}^{2} + A_{12}^{2} + A_{13}^{2} + A_{21}^{2} + A_{22}^{2} + A_{23}^{2} + A_{31}^{2} + A_{32}^{2} + A_{33}^{2} - 3$$

$$(24)$$

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Deformation des ganzen, im anfänglichen Zustande als isotrop angenommenen Körpers eine homogene sei. Findet diese Voraussetzung nicht statt, so kann bekanntlich dennoch die Deformation eines unendlich kleinen Elementes, dessen anfängliches Volum dv sei, stets als eine homogene Deformation angesehen werden, und zwar müssen, wenn nunmehr xyz die anfänglichen und  $x+\xi$ ,  $y+\eta$ ,  $z+\zeta$  die schliesslichen Coordinaten irgend eines Punktes m dieses Elements in Bezug auf irgend ein fixes orthogonales Axensystem bedeuten, behufs Erzielung der Übereinstimmung mit den Gleichungen (2), da dieselben nunmehr auf ein paralleles Axensystem zu beziehen sind, dessen Anfangspunkt die anfängliche Lage des Punktes m ist, in (2) statt (x, y, z) die dem benachbarten Punkte u anfänglich zukommenden Werthe (dx, dy, dz) eingesetzt werden, und es ist ferner, wofern die Bezeichnungsweise des ersten Theiles dieser Abhandlung beibehalten wird, gleichzusetzen:

$$a_{11} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \lambda_x, \quad a_{21} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu_z, \quad a_{31} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \mu_y$$

$$a_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu_z, \quad a_{22} = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 + \lambda_y, \quad a_{32} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu_x$$

$$a_{13} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu_y, \quad a_{23} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mu_x, \quad a_{33} = 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 1 + \lambda_z$$

$$(25)$$

Demgemäss sind die Subdeterminanten von (3)

$$A_{11} = 1 + \lambda_{y} + \lambda_{z} + (\lambda_{y}\lambda_{z} - \mu_{x}\nu_{x})$$

$$A_{21} = -\mu_{z} + (\nu_{x}\nu_{y} - \lambda_{z}\mu_{z})$$

$$A_{31} = -\nu_{y} + (\mu_{z}\mu_{x} - \lambda_{y}\nu_{y})$$

$$A_{12} = -\nu_{z} + (\mu_{x}\mu_{y} - \lambda_{z}\nu_{z})$$

$$A_{22} = 1 + \lambda_{z} + \lambda_{x} + (\lambda_{z}\lambda_{x} - \mu_{y}\nu_{y})$$

$$A_{32} = -\mu_{x} + (\nu_{y}\nu_{z} - \lambda_{x}\mu_{x})$$

$$A_{13} = -\mu_{y} + (\nu_{z}\nu_{x} - \lambda_{y}\mu_{y})$$

$$A_{23} = -\nu_{x} + (\mu_{y}\mu_{z} - \lambda_{x}\nu_{x})$$

$$A_{33} = 1 + \lambda_{x} + \lambda_{y} + (\lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{z}\nu_{z})$$

$$(26)$$

Setzt man diese Werthe in die früheren Formeln ein, so lässt sich, wofern nur der anfängliche Zustand des Körperelements dv ein isotroper ist, das Potential dU der innerhalb dieses Körperelements wirkenden inneren Kräfte nach der in Betracht gezogenen Deformation mittelst der Gleichung

$$dU = f. dv (27)$$

berechnen, wo für f der Werth aus (22) oder (20), beziehungsweise (23) einzuführen ist. Das Potential dU ist hiebei bis auf Glieder, die bezüglich der Hauptdilatationen von dritter Ordnung sind, genau bestimmt.

Substituirt man die Werthe aus (25) und (26) in die Gleichungen (24) und (3), bezeichnet man ferner kürzehalber durch  $\lambda$  die Summe  $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$  und durch  $\eta$  die Summe der Quadrate der eingeklammerten Binome in (26), so findet man, wofern man im Übrigen die durch die Formeln (22) des ersten Theiles dieser Abhandlung bestimmte Bezeichnungsweise zur Anwendung bringt,

$$\sigma = 2\lambda + \beta_{1} + (\beta_{2} + \beta_{3})$$

$$s = 4\lambda + 2\beta_{1} + (\beta_{2} + \beta_{3}) + 4\gamma_{1} - 2\delta_{1} + 2\beta'_{1} + 2(\alpha_{21} + \alpha_{31}) - 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) - 2\varepsilon'_{1} + \eta$$

$$\nu = D - 1 = \lambda + \gamma_{1} - \delta_{1} + \gamma'_{1} + \gamma'_{2} + \gamma'_{3} - \gamma'$$

$$wo$$

$$\lambda = \lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}$$

$$\beta_{1} = \lambda_{x}^{2} + \lambda_{y}^{2} + \lambda_{z}^{2}$$

$$\beta_{2} = \mu_{x}^{2} + \mu_{y}^{2} + \mu_{z}^{2}$$

$$\beta_{3} = \nu_{x}^{2} + \nu_{y}^{2} + \nu_{z}^{2}$$

$$\gamma_{1} = \lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y}$$

$$\delta_{1} = \mu_{x}\nu_{x} + \mu_{y}\nu_{y} + \mu_{z}\nu_{z}$$

$$\alpha'_{1} = \lambda_{x}^{3} + \lambda_{y}^{3} + \lambda_{z}^{3}$$

$$\beta'_{1} = \lambda_{x}^{2}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) + \lambda_{y}^{2}(\lambda_{z} + \lambda_{x}) + \lambda_{z}^{2}(\lambda_{x} + \lambda_{y})$$

$$\gamma'_{1} = \lambda_{x}\lambda_{y}\lambda_{z}, \quad \gamma'_{2} = \mu_{x}\mu_{y}\mu_{z}, \quad \gamma'_{3} = \nu_{x}\nu_{y}\nu_{z}$$

$$\gamma' = \lambda_{x}\mu_{x}\nu_{x} + \lambda_{y}\mu_{y}\nu_{y} + \lambda_{z}\mu_{z}\nu_{z}$$

$$\varepsilon'_{1} = \mu_{x}\nu_{x}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{y}\nu_{y}(\lambda_{z} + \lambda_{x}) + \mu_{z}\nu_{z}(\lambda_{x} + \lambda_{y})$$

$$(29)$$

Durch Einsetzung der Werthe (28) in (14) findet man zunächst, wenn man von nun an solche Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \mu_x \dots$  von höherer Ordnung, als der dritten sind, also auch das Glied  $\eta$  vernachlässigt,

$$\begin{split} \beta_{21} &= \mu_x^2 (\lambda_y + \lambda_z) + \mu_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \mu_z^2 (\lambda_x + \lambda_y) \\ \beta_{31} &= \nu_x^2 (\lambda_y + \lambda_y) + \nu_y^2 (\lambda_z + \lambda_x) + \nu_z^2 (\lambda_x + \lambda_y) \end{split}$$

 $\alpha_{21} = \mu_x^2 \lambda_x + \mu_y^2 \lambda_y + \mu_z^2 \lambda_z$  $\alpha_{31} = \nu_x^2 \lambda_x + \nu_y^2 \lambda_y + \nu_z^2 \lambda_z$ 

 $\gamma_{23} = \mu_y \mu_z v_x + \mu_z \mu_x v_y + \mu_x \mu_y v_z$  $\gamma_{32} = v_y v_z \mu_x + v_z v_x \mu_y + v_x v_y \mu_z$ 

$$\begin{split} A+B+C&=2\lambda+\beta_1+\beta_2+\beta_3\\ A^2+B^2+C^2&=4\beta_1+2(\beta_2+\beta_3)+4\delta_1+4\alpha_1'+4(\beta_{21}+\beta_{31})+\\ &+4(\gamma_{23}+\gamma_{32})+4\varepsilon_1'\\ BC+CA+AB&=4\gamma_1-(\beta_2+\beta_3)-2\delta_1+2\beta_1'+\\ &+2(\alpha_{21}+\alpha_{31})-2(\gamma_{23}+\gamma_{32})-2\varepsilon_1' \end{split}$$

$$\begin{split} A^3 + B^3 + C^3 &= 8\,\alpha_1' + 6\,(\beta_{21} + \beta_{31}) + 6\,(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 6\,(\gamma_2' + \gamma_3') + 12\,\epsilon_1' \\ A^2 (B + C) + B^2 (C + A) + C^2 (A + B) &= 8\,\beta_1' + 4\,(\alpha_{21} + \alpha_{31}) - \\ &\qquad \qquad - 2\,(\beta_{21} + \beta_{31}) - 6\,(\gamma_{23} + \gamma_{32}) - 6\,(\gamma_2' + \gamma_3') + 8\,\gamma' - 4\,\epsilon_1' \\ ABC &= 8\,\gamma_1' - 2\,(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2\,(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2\,(\gamma_2' + \gamma_3') - 4\,\gamma' \,. \end{split}$$

Demgemäss ist den Gleichungen (17) zufolge

$$\begin{split} \frac{1}{2} \, \alpha_1 &= \lambda + \frac{1}{2} \, (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ \frac{1}{4} \, \alpha_2 &= 3 \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2 \gamma_1 + 2 \, \delta_1 + 3 \, \alpha_1' + \beta_1' + \\ &\quad + (\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 3 \, (\beta_{21} + \beta_{31}) + 2 \, (\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2 \, \epsilon_1' \\ \frac{1}{8} \, \alpha_3 &= 5 \, \alpha_1' + 3 \, \beta_1' + 2 \, \gamma_1' + (\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 3 \, (\beta_{21} + \beta_{31}) + \\ &\quad + 2 \, (\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2 \, (\gamma_2' + \gamma_3') + 2 \, \gamma' + 6 \, \epsilon_1' \end{split}$$

 $\alpha_1$  enthält bloss Glieder erster und zweiter Ordnung,  $\alpha_2$  solche der zweiten und dritten,  $\alpha_3$  dagegen bloss Glieder dritter Ordnung.

Die Potentialfunction f ist, wie die Substitution in (20) lehrt, durch die aus den Verschiebungsderivationen gebildeten Ausdrücke (29) in folgender Weise bestimmt:

$$f = A_{0} + A_{1} \left[ \lambda + \frac{1}{2} (\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3}) \right] + A_{2} \left[ 3\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3} + 2\gamma_{1} + 2\delta_{1} + 3\alpha'_{1} + \beta'_{1} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) + 2\varepsilon'_{1} \right] + A_{3} \left[ 5\alpha'_{1} + 3\beta'_{1} + 2\gamma'_{1} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 3(\beta_{21} + \beta_{31}) + \alpha_{21} + \alpha_{32} + 2(\gamma'_{2} + \gamma'_{3}) + 2\gamma' + 6\varepsilon'_{1} \right]$$

$$(30)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (47) des ersten Theiles, beziehungsweise mit der dieser unmittelbar vorangehenden Gleichung und beachtet überdies den Werth von  $B_1'$  aus (40), so ergibt sich unmittelbar

$$2B_{2} = A_{1} + 2A_{2}$$

$$C_{1} = 2A_{2}$$

$$A'_{1} = 3A_{2} + 5A_{3}$$

$$B_{21} = 3(A_{2} + A_{3})$$

$$A_{21} = A_{2} + A_{3}$$

$$B'_{1} = A_{2} + 3A_{3}$$

$$(31)$$

Es lassen sich sohin sämmtliche in dem ersten Theile betrachteten Elasticitätsconstanten, wofern man bei der Bestimmung des Potentialwerthes der elastischen Kräfte von allen Gliedern absieht, die bezüglich der Hauptdilatationen von höherer Ordnung sind, als der dritten, und wofern man von der Annahme ausgeht, dass die inneren Kräfte nur anziehende oder abstossende Kräfte sind, welche Functionen der Entfernung der sich anziehenden oder abstossenden Massenpunkte sind, abgesehen von der Potentialconstanten  $A_0$ , auf die drei Elasticitätsconstanten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  zurückführen.

Würde man auch Glieder vierter Ordnung berücksichtigen, so würde, wie sich leicht zeigen lässt, eine weitere Constante hinzutreten, ausser man würde bezüglich der oberwähnten Function der Entfernung eine besondere Annahme machen. Es unterliegt gar keiner Schwierigkeit, die bisherige Untersuchung in gleicher Weise auf solche Glieder vierter Ordnung auszudehnen.

Die Gleichungen (31) ergeben sich auch unmittelbar sofort aus der Vergleichung des Werthes (22) mit der Gleichung (55) des ersten Theiles.

Die Gleichung (30) für die Potentialfunction lässt sich in mannigfacher Weise umformen, wie dies unter Anderem die Substitution der Werthe (31) in die Gleichungen (47), (50), (57), (58) des ersten Theiles lehrt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (30) alle Glieder, welche bezüglich der Verschiebungsderivationen von der dritten Ordnung sind, so erhält man den von C. Neumann deducirten Potentialwerth, der die zwei Elasticitätsconstanten  $A_1$  und  $A_2$  enthält.

Setzt man die in (31) gefundenen Werthe von  $2B_2$ ,  $C_1$ ... in die Gleichungen (51) und (54) des ersten Theiles ein, oder berechnet man aus der Potentialfunction (30) mittelst der allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles unmittelbar die Spannungscomponenten, so gelangt man bei Berücksichtigung des Werthes (52) für die cubische Dilatation  $\nu = D-1$ , und wofern man kürzehalber, wie früher, durch  $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$  die Summen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Carl Neumann, Zur Theorie der Elasticität. (Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1860, Bd. 57, S. 281-318.)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \mu_x + \nu_x \\
\varepsilon_y &= \mu_y + \nu_y \\
\varepsilon_z &= \mu_z + \nu_z
\end{aligned} (32)$$

bezeichnet, zu folgenden wichtigen Gleichungen, welche bis auf Glieder zweiter Ordnung genau sind:

$$D \cdot X_{x} = A_{1} + (2A_{1} + 4A_{2}) \cdot \lambda_{x} + 2A_{2} \cdot \nu + (A_{2} + 3A_{3}) \cdot \nu^{2} + (A_{1} + 2A_{2})(\lambda_{x}^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}) - (A_{2} + A_{3})[\lambda_{y}\lambda_{z} - \varepsilon_{x}^{2} - 3(\lambda_{x}^{2} + \varepsilon_{z}^{2} + \varepsilon_{y}^{2})]$$

$$D \cdot Y_{z} = (A_{1} + 2A_{2}) \cdot \varepsilon_{x} + (A_{1} + 2A_{2})(\mu_{x}\nu_{y} + \lambda_{y}\mu_{x} + \nu_{x}\lambda_{z}) - (A_{2} + A_{3})[\varepsilon_{y}\varepsilon_{z} - \lambda_{x}\varepsilon_{x} - 3(\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} + \lambda_{y}\varepsilon_{x} + \varepsilon_{x}\lambda_{z})]$$

$$X_{x} = A_{1} + 2(2A_{2} + A_{1}) \cdot \lambda_{x} + (2A_{2} - A_{1}) \cdot \nu + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot \nu^{2} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [(\lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\lambda_{y}\lambda_{z} - \varepsilon_{x}^{2} - 3(\lambda_{x}^{2} + \varepsilon_{z}^{2} + \varepsilon_{y}^{2})]$$

$$Y_{y} = A_{1} + 2(2A_{2} + A_{1}) \cdot \lambda_{y} + (2A_{2} - A_{1}) \cdot \nu + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot \nu^{2} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [\mu_{z}^{2} + (\lambda_{z} + \lambda_{x})^{2} + \nu_{z}^{2}] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\lambda_{z}\lambda_{x} - \varepsilon_{y}^{2} - 3(\varepsilon_{z}^{2} + \lambda_{y}^{2} + \varepsilon_{z}^{2})]$$

$$Z_{z} = A_{1} + 2(2A_{2} + A_{1}) \cdot \lambda_{z} + (2A_{2} - A_{1}) \cdot \nu + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot \nu^{2} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [\nu_{y}^{2} + \mu_{x}^{2} + (\lambda_{x} + \lambda_{y})^{2}] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\nu_{y}^{2} + \mu_{x}^{2} + (\lambda_{x} + \lambda_{y})^{2}] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\nu_{y}^{2} + \mu_{x}^{2} + (\lambda_{x} + \lambda_{y})^{2}] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\nu_{y}^{2} + \nu_{x}^{2} + (\lambda_{x} + \lambda_{y}) \cdot \mu_{x} - \nu_{x}(\lambda_{x} + \lambda_{y})] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\nu_{y}^{2} + \nu_{x}^{2} - \lambda_{x} \varepsilon_{x} - 3(\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} + \lambda_{y}\varepsilon_{x} + \varepsilon_{x}\lambda_{z})]$$

$$Z_{x} = Z_{y} = (2A_{2} + A_{1}) \cdot [\mu_{z}\nu_{y} - (\lambda_{z} + \lambda_{x}), \mu_{x} - \nu_{x}(\lambda_{x} + \lambda_{y})] - (4A_{3} + A_{2}) \cdot [\varepsilon_{y}\varepsilon_{z} - \lambda_{x}\varepsilon_{x} - 3(\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} + \lambda_{y}\varepsilon_{x} + \varepsilon_{x}\lambda_{z})]$$

$$Z_{x} = X_{z} = (2A_{2} + A_{1}) \cdot [-\nu_{y}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{x}\nu_{z} - (\lambda_{x} + \lambda_{y}) \cdot \mu_{y}] - (-4(A_{3} + A_{2}) \cdot [\varepsilon_{z}\varepsilon_{x} - \lambda_{y}\varepsilon_{y} - 3(\varepsilon_{y}\lambda_{x} + \varepsilon_{x}\varepsilon_{z} + \lambda_{z}\varepsilon_{y})]$$

$$X_{y} = Y_{z} = (2A_{z} + A_{1}) \cdot [-(\lambda_{y} + \lambda_{z}), \mu_{z} - \nu_{z}(\lambda_{z} + \lambda_{x}) + \mu_{y}\nu_{x}] - (-4(A_{2} + A_{2}), [\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} - \lambda_{z}\varepsilon_{y} - 3(\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{y}\nu_{x}] - (-4(A_{2} + A_{2}), [\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} - \lambda_{z}\varepsilon_{y} - 3(\varepsilon_{z}\varepsilon_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{z}\nu_{z}]$$

Würde man in diesen Gleichungen  $A_1 = 0$  setzen und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so würde man die

bekannten, von Navier und Poisson gefundenen Grundgleichungen erhalten.

Durch Substitution von (31) in die Gleichungen (56) des ersten Theiles findet man folgende Werthe für die bloss von den Hauptdilatationen abhängigen Hauptspannungen  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ :

$$S_{1} = A_{1} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [2\lambda_{1} + (\lambda_{2} + \lambda_{3})^{2}] + \\ + (2A_{2} - A_{1}) \cdot [\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3} + \lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}] + \\ + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} - 4(A_{3} + A_{2}) \cdot (\lambda_{2}\lambda_{3} - 3\lambda_{1}^{2})$$

$$S_{2} = A_{1} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [2\lambda_{2} + (\lambda_{3} + \lambda_{1})^{2}] + \\ + (2A_{2} - A_{1}) \cdot [\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3} + \lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}] + \\ + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} - 4(A_{3} + A_{2}) \cdot (\lambda_{3}\lambda_{1} - 3\lambda_{2}^{2})$$

$$S_{3} = A_{1} + (2A_{2} + A_{1}) \cdot [2\lambda_{3} + (\lambda_{1} + \lambda_{2})^{2}] + \\ + (2A_{2} - A_{1}) \cdot [\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3} + \lambda_{2}\lambda_{3} + \lambda_{3}\lambda_{1} + \lambda_{1}\lambda_{2}] + \\ + 3(A_{3} - A_{2}) \cdot (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{2} - 4(A_{3} + A_{2}) \cdot (\lambda_{1}\lambda_{2} - 3\lambda_{3}^{2})$$

$$(35)$$

Der Grad der Genauigkeit reicht in diesen drei Gleichungen bis zu den Gliedern, die bezüglich der Hauptdilatationen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  von zweiter Ordnung sind.

Aus der früheren Untersuchung ist klar zu ersehen, dass zwar nicht die Gleichung (30), jedoch die Gleichung (22) und (23) den Werth der Potentialfunction f auch für den allgemeineren Fall ausdrückt, in welchem die Drehung, die das betrachtete Körperelement während seiner Deformation erfährt, also auch der Drehungswinkel & in den Gleichungen (30) bis (33) des ersten Theiles, was immer für einen Werth hat, so dass auch einige oder alle Verschiebungsderivationen  $\lambda_x v_z \dots$  beliebig grosse Werthe annehmen können, wenn nur die ursprüngliche Annahme der Kleinheit der Hauptdilatationen λ,λ,λ, erfüllt ist. Es ist dies jener Fall, auf dessen Wichtigkeit für die Anwendung auf specielle Probleme schon Saint-Venant, Kirchhoff und in neuerer Zeit Todhunter aufmerksam machte, die jedoch bei ihrer Untersuchung dieses Falles bloss unendlich kleine Hauptdilatationen voraussetzen, indem stets schon solche Glieder, die bezüglich dieser Dilatationen von zweiter Ordnung sind, Gliedern erster Ordnung gegenüber vernachlässigt werden. St. Venant gelangt für diesen Fall zu folgenden aus (4) und (25) leicht deducirbaren Gleichungen für die Dilatation  $\Lambda_x$  in der Richtung der x-Axe und die zugehörige Schiebung  $M_x$ 

$$\Lambda_x = R_1 - 1 = \sqrt{a_x} - 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (a_x - 1)$$

$$M_x = \cos(R_2 R_3) = b_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left[ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right]$$

und stellt für die lineare Dilatation  $\Lambda$  in jener Richtung, deren ursprüngliche Richtungscosinus l, m, n sind, die aus (2) und (4) resultirende Gleichung auf:

$$\Lambda = \Lambda_x \cdot l^2 + \Lambda_y m^2 + \Lambda_z n^2 + M_x \cdot m n + M_y \cdot nl + M_z \cdot lm.$$

Mit Zuhilfenahme dieses Werthes sucht Kirchhoff<sup>2</sup> unter denselben Voraussetzungen die Componenten der Spannung für ein beliebiges Flächenelement als Functionen der Verschiebungsderivationen zu bestimmen.

Todhunter und Pearson<sup>3</sup> bezweifeln die Richtigkeit der von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, erwähnen jedoch in ihrer kritischen Untersuchung nicht den schwerwiegendsten Irrthum Kirchhoff's, der darin besteht, dass Kirchhoff (wie dies die Vergleichung der Gleichungen auf S. 769<sup>2</sup> mit jener auf S. 766<sup>2</sup> sofort zeigt) die Richtungscosinus der Hauptdilatationsrichtungen in ihrer anfänglichen Lage (die im ersten Theile dieser Abhandlung durch  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$ ... bezeichnet

¹ St. Venant, Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très-petits. Comptes rendus, vol. XXIV (1847), p. 260—263. (Siehe auch Moigno, Statique, p. 670 und Todhunter and Pearson, A History of the Theory of Elasticity (Cambridge, 1886—1893) vol. I, p. 864—867.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Kirchhoff, Über die Bedingungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762-773.

<sup>3</sup> Todhunter and Pearson, I. c., vol. II, part II, p. 50-53.

wurden) mit den Richtungscosinus der Hauptdruckaxen, d. i. der Richtungen der Hauptdilatationen in ihrer schliesslichen Lage (die von mir durch  $\alpha_x'$ ,  $\alpha_y'$ ,  $\alpha_z'$ ... bezeichnet wurden) identificirt, wodurch stillschweigend vorausgesetzt ist, dass das betrachtete Körperelement keine Drehung erfahren hat, oder dass mit anderen Worten die stattgehabte Deformation eine reine (rotationslose) Deformation ist, während die ganze Untersuchung geradezu bezweckt, den gegentheiligen Fall einer endlichen Drehung des Körperelements zu behandeln, indem zwar die Hauptdilatationen als unendlich klein, jedoch mit dieser Einschränkung die Verschiebungsderivationen als beliebige endliche Grössen vorausgesetzt sind.

Um die Componenten  $X_x X_y \dots$  der Spannung für einen beliebigen Werth des Rotationswinkels  $\vartheta$ , und zwar mit einer Genauigkeit, die sich bis auf Glieder erstreckt, die bezüglich der Hauptdilatationen, also auch bezüglich irgend einer Dilatation und irgend einer Schiebung von zweiter Ordnung ist, zu bestimmen, müsste man etwa von der bis auf solche Glieder der dritten Ordnung genauen und für einen jeden Werth des Winkels  $\vartheta$  giltigen Gleichung (23) für die Potentialfunction f ausgehen, deren letztes Glied sich übrigens noch in verschiedener anderer Form darstellen lässt. So ist z. B. die Summe aus den ersten vier Gliedern innerhalb der letzten Klammer

$$5\sigma^3 + 24\sigma^2 - 12s\sigma + 8v^2 = 6\sigma^2 - 16v^2 + 16v^3$$
 (36)

und zwar bis auf Glieder dritter Ordnung genau, wie dies die Einsetzung der Werthe (9) sofort lehrt.

Führt man nun den Werth von f aus (23), welcher ausser der Potentialconstanten  $A_0$ , die bei den auszuführenden Differentiationen aus der Rechnung hinausfällt, nur die drei Elasticitätsconstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  enthält, in die allgemein giltigen Gleichungen (20) des ersten Theiles ein, so erhält man jene Werthe der Spannungscomponenten, die für einen jeden Werth des Rotationswinkels  $\vartheta$ , also auch für endliche Werthe der Verschiebungsderivationen  $\lambda_x$ ,  $\mu_z$ ,  $\nu_y$ ..., jedoch nur für solche Deformationen giltig sind, für welche man bei der Berechnung der Spannungen von Gliedern absehen kann,

die bezüglich der Dilatationen und der Schiebungen von der dritten oder einer höheren Ordnung sind. Da nämlich die in der Potentialfunction f in (23) vorkommenden drei Variabeln  $\sigma$ , s und  $\nu$ , wie dies die Gleichungen (9) lehren, von derselben Grössenordnung sind, wie die Hauptdilatation  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , und da f eine rationale ganze Function dieser Variabeln s,  $\sigma$  und  $\nu$  ist, die bis auf Glieder dritter Ordnung genau ist, so reicht der Grad der Genauigkeit der drei Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$  nur bis auf Glieder zweiten Grades, und zwar ist, wenn man den Werth aus der letztgefundenen Gleichung (36) einsetzt,

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 (3\sigma + 4) + \frac{1}{2} A_3 (3\sigma + 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A_2 - A_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = 2A_3 (3\nu^2 - 2\nu + 1)$$

$$(37)$$

Beachtet man die strengrichtigen Werthe in (25) und (26), so ersieht man aus den gleichfalls strengrichtigen Gleichungen (6) und (3), wie  $\sigma$ , s und v durch die Verschiebungsderivationen  $\lambda_x$   $\nu_z$   $\mu_y$ ... auszudrücken sind. Es lassen sich also auch  $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial \lambda_x}$ ..., sonach auch die in den Gleichungen (20) des ersten Theiles vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda_x},$$

ebenso  $\frac{\partial f}{\partial v_z}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \mu_y}$  u. s. w. leicht bestimmen und die derart bestimmten Grössen nach Einsetzung der bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Werthe (37) in die allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles dieser Abhandlung die Spannungscomponenten berechnen. Man gelangt schliesslich auf diese Weise zu folgenden, für jeden Werth des Drehungswinkels  $\vartheta$ , also auch für endliche Werthe von  $\lambda_x$ ,  $\nu_z$ ...giltigen, jedoch bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Gleichungen:

$$\begin{split} X_z &= [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}{D} \\ &- 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2)}{D} + 2A_3 (3\, \mathtt{V}^2 - 2\, \mathtt{V} + 1) \\ Y_y &= [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2}{D} \\ &- 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2)}{D} + 2A_3 (3\, \mathtt{V}^2 - 2\, \mathtt{V} + 1) \\ Z_z &= [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2}{D} \\ &- 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{s + 3 - (A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2)}{D} + 2A_3 (3\, \mathtt{V}^2 - 2\, \mathtt{V} + 1) \\ Y_z &= Z_y = [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}}{D} \\ Z_x &= X_z = [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{32}a_{31}}{D} \\ Z_y &= Y_x = [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}}{D} \\ X_y &= Y_x = [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}}{D} \\ + 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + a_{31}a_{32}}{D} \\ X_y &= Y_x = [A_1 + A_2 (3\, \mathtt{S} + 4) + A_3 (3\, \mathtt{S} + 2)] \cdot \frac{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}}{D} \\ + 2(A_2 + A_3) \cdot \frac{A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32}}{D} \\ \end{split}$$

In diese Gleichungen sind die durch (25) und (26) bestimmten Werthe von  $a_{11}a_{12}...A_{11}A_{12}...$  und die Werthe von  $\sigma$ , s, v und D aus (6) und (3) einzuführen.

Beachtenswerth ist, dass auch diese Gleichungen (38) nicht mehr Elasticitätsconstanten enthalten, als die in beschränkterem Masse giltigen Gleichungen (34), nämlich nur die drei Elasticitätsconstanten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$ .

## Über die innere Reibung der Lösungen

von

#### Dr. Gustav Jäger.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1894.)

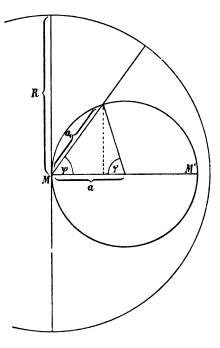
In der Abhandlung » Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten « ¹ habe ich gezeigt, dass der Reibungscoëfficient durch die Formel

$$\mu = \frac{2r^2\rho c}{3\lambda}$$

gegeben ist, wobei r der Radius, c die Geschwindigkeit,  $\lambda$  die mittlere Weglänge einer Molekel und p die Dichte der Flüssigkeit ist. Um λ zu finden, hatten wir die mittlere Weglänge eines Punktes in einer Kugel zu suchen, welche dem zur Bewegung der Molekel freien Raum eingeschrieben ist. Wir gingen dabei so vor, dass wir annahmen, eine unendlich grosse Zahl von Punkten sei auf der Kugeloberfläche gleichmässig vertheilt, und es kommen auf die Flächeneinheit  $N_1$  Punkte. Dann ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Punkte  $4\pi a^2 N_t$ . Die Entfernung zweier beliebiger Punkte ist gegeben durch  $a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$ , wenn a der Radius der Kugel und  $\varphi$  der Winkel der Radien ist, welche zu den beiden Oberflächenpunkten gehören. Wir nahmen dann weiter an, dass die Gesammtzahl der Wege, welche dieselbe Länge haben, durch die Grösse  $2\pi a^2 N_1 \sin \varphi \, d\varphi$  gegeben sei. Das ist aber, wie wir im Folgenden sehen werden, nicht strenge richtig, wesshalb wir den Ausdruck für die mittlere Weglänge von Neuem ableiten wollen.

<sup>1</sup> Wien. Ber. CII, S. 253 ff.

Wir müssen annehmen, dass alle Wege, welche der bewegliche Punkt von einem Punkte der Oberfläche der Kugel aus nehmen kann, nach allen Richtungen des Raumes gegen das Innere der Kugel gleich wahrscheinlich sind. Ist daher M (siehe die Figur) der Punkt, für welchen wir den mittleren Weg, den er in der Kugel vom Radius a zurücklegen wird, berechnen wollen, so haben wir sämmtliche Sehnen  $a_1$ , welche von M ausgehen, bezüglich ihrer Länge zu addiren und durch die Zahl



derselben ZU dividiren. Sehnen Diese müssen gleichmässig im Raume vertheilt sein, mithin die Oberfläche einer Kugel, welche wir um M als Mittelpunkt schlagen, in gleichmässig vertheilten Punkten treffen. Der Radius dieser Kugel sei R, MM' ein Durchmesser der anderen Kugel. Der Winkel ψ, welchen eine beliebige Bewegungsrichtung MM'einschliesst, steht dann mit o in der Beziehung  $2\psi + \varphi = \pi$ . Nennen wir nun wiederum die Zahl der Radien, welche die Flächeneinheit der

Oberfläche der Kugel vom Radius R enthält,  $N_1$ , so ist die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Radien  $2\pi R^2 N_1$ . Die Zahl der Radien, welchen ein bestimmtes  $a_1$  zukommt, ist sodann durch  $2\pi R^2 N_1$  sin  $\psi$   $d\psi$ , die Summe aller Weglängen  $a_1$  mithin durch

$$2\pi R^2 N_1 a_1 \sin \psi d\psi = 4\pi R^2 N_1 a \cos \psi \sin \psi d\psi$$

gegeben, indem ja

$$a_1 \sin \psi = a \sin \varphi$$

also

$$a_1 = a \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = a \frac{\sin 2\psi}{\sin \psi} = 2a \cos \psi$$

ist. Integriren wir die Summe der  $a_1$  von  $\psi=0$  bis  $\psi=\frac{\pi}{2}$ , so erhalten wir die Summe sämmtlicher möglichen Weglängen, welche durch  $2\pi R^2 N_1$  dividirt, den mittleren Weg ergibt. Wir erhalten mithin

$$\lambda = \frac{4\pi R^2 N_1 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi d\psi}{2\pi R^2 N_1} = 2a \left[ \frac{\sin^2 \psi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Berücksichtigen wir nun, dass alle Molekeln in Bewegung sind und führen wir dementsprechend die relative Geschwindigkeit der Molekeln gegen einander, deren Werth  $^4/_3c$  ist, ein, so ergibt sich

$$\lambda = \frac{3}{a}$$

und, wie sich leicht weiter zeigen lässt,

$$\mu = \frac{2r^2\rho c}{3\lambda} = \frac{8r^2\rho c}{9a} = \frac{4r\rho c}{9\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)},$$

wobei v das Volumen der in Betracht kommenden Flüssigkeit und b der in dem Volumen v wirklich mit Materie erfüllte Raum ist. Diese letzte Formel unterscheidet sich von der ursprünglich abgeleiteten nur darin, dass sie den Zahlenfactor  $\sqrt[4]{9}$  anstatt  $\sqrt[4]{3}$  enthält. Diese beiden Factoren sind aber von derselben Grössenordnung, so dass sich die seinerzeit von uns gemachten Folgerungen vollkommen aufrecht halten lassen. Ja die numerische Rechnung zeigt vielmehr, dass die neue Formel noch günstigere Resultate gibt als die frühere. Wir wollen daher auch fortan unsere Gleichung in der neuen Form gebrauchen.

In der Abhandlung »Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen «¹ habe ich folgenden Satz gefunden und bewiesen:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wien. Ber. C, S. 512.

254 G. Jäger,

»Die Gesammt-, sowie jede Theilenergie des Lösungsmittels wächst mit der Concentration der Lösung derart, dass für gleich viel Molekeln des Gelösten der Energiezuwachs eine constante Grösse ist.« Das hat nun für das Verhalten des Lösungsmittels denselben Effect, als würde die Temperatur in entsprechender Weise erhöht. Will man daher z. B. das Lösungsmittel zum Gefrieren bringen, so ist die Lösung so weit unter den Gefrierpunkt des Lösungsmittels abzukühlen, als eben die Energieerhöhung infolge des Zusatzes von gelöster Substanz ausmacht. Es gibt uns daher die Gefrierpunktserniedrigung unmittelbar einen Aufschluss über die Energievermehrung im Lösungsmittel. Alle Eigenschaften des Lösungsmittels nun, welche Functionen der Temperatur sind, müssen sich mit wachsender Concentration der Lösung derart ändern, als würde die Temperatur des Lösungsmittels immer um den Betrag der Gefrierpunktserniedrigung erhöht. Dabei ist nicht zu vergessen, dass sich diese Folgerung nur auf verdünnte Lösungen bezieht. Allerdings ist es nicht leicht, für die verschiedenen Eigenschaften der Flüssigkeiten, die Gefrierpunktserniedrigung ausgenommen, unseren Satz auch experimentell zu bestätigen, da die gelöste Substanz in der Regel noch andere Einflüsse hat als die Energieerhöhung des Lösungsmittels, welche die Wirkung der letzteren oft vollständig verdecken können.

Im Folgenden wollen wir nun untersuchen, inwieweit sich die Energieerhöhung des Lösungsmittels auf die innere Reibung verdünnter Lösungen geltend macht. Nehmen wir vorerst an, wir hätten es nur mit diesem Einfluss zu thun, so können wir folgendermassen schliessen. Da der Reibungscoëfficient  $\mu$  eine Function der Temperatur, also

$$\mu = f(t)$$

ist, so muss der Reibungscoëfficient einer Lösung, deren Gefrierpunktserniedrigung  $\Delta$  ist,

$$\mu_{\Delta} = f(t + \Delta)$$

sein. Entwickeln wir diese Function nach der Taylor'schen Reihe, so

$$f(t+\Delta) = f(t) + \Delta f'(t) + \frac{\Delta^2}{2} f''(t) + \dots, \tag{1}$$

also

$$\mu - \mu_{\Delta} = -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \dots$$
 (2)

Daraus können wir ohneweiters folgern: Sind die sonstigen Einflüsse der gelösten Substanz gegenüber der Energieerhöhung zu vernachlässigen, so ist der Unterschied zwischen der inneren Reibung des Lösungsmittels und der Lösung durch die Gleichung (2) gegeben. Sind z. B. f'(t), f''(t)... nur positive Grössen, was zur Folge hätte, dass u mit der Temperatur wächst, so muss  $\mu_{\Delta} > \mu$ , die innere Reibung der Lösung immer grösser als die des Lösungsmittels sein. Sind hingegen die Differentialquotienten sämmtlich negativ, so würde folgen, dass die innere Reibung der Lösung immer kleiner als die des Lösungsmittels sein muss. Im Allgemeinen werden wir natürlich sowohl positive als negative Differentialquotienten haben. Je nachdem dann das eine oder andere Glied überwiegt, muss die Reibung der Lösung grösser oder kleiner als die des Lösungsmittels sein. Da wir nur verdünnte Lösungen untersuchen, so ist  $\Delta$  nicht gross, wir können daher unsere unendliche Reihe immer auf die ersten Glieder beschränken.

Betrachten wir nun unsere eingangs erwähnte Formel

$$\mu = \frac{4r\rho c}{9\left(1 - \sqrt{\frac{3}{\nu}}\right)},$$

welche für eine reine Flüssigkeit gilt, so können wir dieselbe in erster Annäherung für verdünnte Lösungen etwa in der Form

$$\mu = r \rho \varphi(t)$$

schreiben, in dem ja die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln c, sowie das Verhältniss der Volumina  $\frac{b}{v}$  Functionen der Temperatur t sind, für welche wir den Einfluss der gelösten Substanz, insoferne er noch ein anderer, als der der Energieerhöhung ist, vernachlässigen können. Auch die Änderung des  $\rho$  brauchen wir in zweierlei Beziehung nicht zu berücksichtigen; einmal, weil wir es bloss mit verdünnten Lösungen, deren Dichte

256 G. Jäger,

sich also wenig von jener des Lösungsmittels unterscheidet, zu thun haben, dann aber auch bezüglich der Temperaturerhöhung, da die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten eine kleine und die Energieänderung des Lösungsmittels selbst nur einer Temperaturerhöhung um  $\Delta$  entspricht. Es bleibt uns also nur noch der Einfluss, welchen der Radius r der Molekel der gelösten Substanz auf die innere Reibung ausübt, und der ist allerdings nicht zu vernachlässigen. Bedenken wir nämlich, dass der Vorgang der Lösung seine Ursache in bedeutenden Anziehungskräften hat, welche die Molekeln des Lösungsmittels und der gelösten Substanz auf einander ausüben - es muss ja die Cohäsion des Gelösten vollständig überwunden werden so werden wir annehmen müssen, dass sich die Molekeln des Gelösten nicht frei in der Lösung bewegen können, sondern dass sie immer von einer Schichte der Molekeln des Lösungsmittels umgeben sind, die sich mit der eingehüllten Molekel in derselben Richtung bewegen, so dass es die Wirkung hat, als hätten die Molekeln des Gelösten einen erheblich grösseren Durchmesser als jene des Lösungsmittels. Nun geht aber aus der Formel für die innere Reibung hervor, dass mit wachsendem Durchmesser der Molekeln der Reibungscoëfficient proportional wächst, so dass µ durch diesen Einfluss immer grösser ausfallen muss als nach der Gleichung (1) folgen würde. Wir können daher auch Gleichung (2) nicht aufrecht halten, sondern wir müssen sie in die Ungleichung

$$\mu-\mu_{\Delta} \leq -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \dots$$

umwandeln. Je kleiner die Geschwindigkeit der Molekeln des Lösungsmittels ist, d. h. je träger sie sich bewegen, umso fester werden sie an den Molekeln des Gelösten haften, umsomehr wird  $\mu-\mu_{\Delta}$  von der rechten Seite unserer Ungleichung abweichen. Dies ist demnach der Fall, je tiefer die Temperatur ist. Mit wachsender Temperatur muss sich hingegen unsere Ungleichung immer mehr einer Gleichung nähern, vorausgesetzt natürlich, dass unsere Lösung so verdünnt ist, dass der sodann noch vorhandene Einfluss der Molekeln des Gelösten auf die innere Reibung vernachlässigt werden kann. Inwieweit dieses

theoretische Resultat mit den Beobachtungen übereinstimmt, wollen wir an einer Reihe wässeriger Lösungen im Folgenden nachweisen.

Um den Reibungscoëfficienten des Wassers als Function der Temperatur darzustellen, benützte ich die Angaben von Sprung.¹ Derselbe berechnete jedoch nicht die absoluten Werthe der inneren Reibung, sondern gibt bloss die auf dieselbe Druckdifferenz reducirten Ausslusszeiten gleicher Volumina der Flüssigkeiten an, welche ein enges Rohr passiren. Was wir also im Folgenden mit µ bezeichnen werden, sind lediglich relative Werthe. Aus den beobachteten µ bei 0°, 10°, 30° und 50° wurde die Formel

$$\mu = 649 \cdot 2 - 21 \cdot 17t + 0 \cdot 4079t^2 - 0 \cdot 00326t^3$$

abgeleitet. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, welche Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der inneren Reibung vorkommen.

μ.berechnet	μ beobachtet
$649 \cdot 2$	$649 \cdot 2$
$553 \cdot 2$	551 · 3
475.0	475.0
412.4	414.5
$362 \cdot 9$	365.0
324.0	327.6
$293 \cdot 2$	293 · 1
268 · 1	$264 \cdot 6$
$246 \cdot 4$	240.8
$225 \cdot 4$	220.5
203.0	202.8
	649·2 553·2 475·0 412·4 362·9 324·0 293·2 268·1 246·4 225·4

Vollkommen genau gibt also unsere Formel die Beobachtungen nicht wieder, doch genügt sie für unsere Zwecke vollkommen. Setzen wir  $\mu = f(t)$ , so wird

$$f''(t) = -21 \cdot 17 + 0 \cdot 8158t - 0 \cdot 00978t^{2}$$

$$f'''(t) = 0 \cdot 8158 - 0 \cdot 01956t$$

$$f'''(t) = -0 \cdot 01956$$

$$f^{\text{IV}}(t) = f^{\text{V}}(t) = \dots = f^{(n)}(t) = 0,$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., Bd. 159, S. 8 (1876).

258 G. Jäger,

mithin

$$\mu - \mu_{\Delta} \leq (21 \ 17 - 0.8158t + 0.00978t^{2}) \Delta - (0.4079 - 0.00978t) \Delta^{2} + 0.00326 \Delta^{3}$$

Ist  $\Delta$  sehr klein, d. h. nehmen wir eine verdünnte Lösung, so können wir die rechte Seite unserer Ungleichung auf's erste Glied beschränken, zumal auch der Factor von  $\Delta^2$ , den wir B nehmen wollen, viel kleiner als A, der Factor von  $\Delta$ , ist. A und B nehmen für die verschiedenen Temperaturen folgende Werthe an:

t	ullet A	В
0°	21 · 17	0.409
5	17.97	0.329
10	14.97	0.310
15	12.18	0.261
20	$9 \cdot 59$	0.212
25	7 · 20	0.163
30	5.02	0.115
35	3.04	0.066
40	1 · 27	0.018
45	- 0.30	-0.035
<b>5</b> 0	— 1·67	-0.081

Ziehen wir also, wie vorausgesetzt, nur verdünnte Lösungen in Betracht, so wird die rechte Seite unserer Gleichung bei 0° immer positiv sein, sodann mit steigender Temperatur immer mehr und mehr abnehmen, zwischen 40° und 50° durch den Nullpunkt gehen und negativ werden. Für sehr verdünnte Lösungen liegt der Nullpunkt etwa bei 44°. Das heisst aber: Nur unterhalb dieser Temperatur, für welche unser Ausdruck 0 wird, kann  $\mu_{\Delta} < \mu$  sein, weil nur unterhalb dieser Temperatur  $\mu - \mu_{\Delta}$  einen positiven Werth annehmen kann. Ferner ist der Betrag, um welchen  $\mu_{\Delta}$  höchstens kleiner als  $\mu$  sein kann, durch unsere Ungleichung für jede Temperatur bestimmt. Ich halte es nun für wichtig zu untersuchen, ob thatsächlich unsere theoretischen Folgerungen mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Wir haben demnach unser Augenmerk in erster Linie auf jene Lösungen zu richten, deren innere Reibung kleiner als jene des reinen Wassers ist, da ja von den übrigen ohne weiters unsere Ungleichung erfüllt erscheint. Sprung gibt folgende acht Salze an, für welche er bei niedrigen Temperaturen die Zähigkeit der Lösung geringer als jene des Wassers fand: KCl, KBr, KJ, KNO<sub>3</sub>, NH<sub>4</sub>Cl, NH<sub>4</sub>Br, NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub>, KClO<sub>3</sub>. Von diesen Lösungen habe ich alle mit Ausnahme des chlorsauren Kali auf meine Formel geprüft und die diesbezüglichen Resultate in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Das chlorsaure Kali schenkte ich mir desshalb, weil seine Lösungen selbst bei den niedrigen Temperaturen eine nur wenig unter jener des Wassers liegende Zähigkeit zeigen, während dieselbe bei 30° schon grösser als jene des Wassers ist, so dass es zur Bestätigung unserer Regel einer besonderen Berechnung dieser Lösung nicht bedarf.

Die folgenden Tabellen enthalten in der ersten Zeile den Namen, die Formel und das Moleculargewicht des gelösten Salzes, in der zweiten den Procentgehalt, das specifische Gewicht, die im Liter gelöste Zahl der Gramme, sowie der Grammmolekeln (Mol.) und die Gefrierpunktserniedrigung  $\Delta$ . Dieselbe wurde unter der Voraussetzung berechnet, dass die Salze in der Lösung vollkommen dissociirt sind, und dass nach Raoult eine Grammmolekel im Liter den Gefrierpunkt um  $1.85^{\circ}$  C. herabsetzt. Die Annahme vollständiger Dissociation ist mit grosser Annäherung desshalb gestattet, weil für ein jedes Salz immer bloss die verdünnteste der von Sprung untersuchten Lösungen in Rechnung gezogen wurde. Die mit D bezeichnete letzte Spalte der Tabellen enthält den berechneten grössten Werth, welchen die Differenz  $\mu_{-}\mu_{\Delta}$  annehmen kann.

Chlorammonium NH<sub>4</sub>Cl (53·5).

3

		• •	,	
$\cdot 67^{\circ}/_{\circ}$ , $s =$	: 1.011, 37.	1 g = 1.386 M	fol. $\Delta = 2^{\circ}56$	•
1	$\mu_{\Delta}$	$\mu$ — $\mu_{\Delta}$	D	
O°	613.8	$35 \cdot 4$	51.6	
5	$532 \cdot 0$	19.3	43.7	
10	$463 \cdot 9$	11.1	$36 \cdot 2$	
20	361.8	$3 \cdot 2$	23.2	
30	292.0	1 • 1	17.4	
40	244.0	-3.2	$3 \cdot 2$	
50	207 • 1	$-4 \cdot 3$	-3.6	

G. Jäger,

### Bromammonium NH<sub>4</sub>Br (98).

 $15.97\%, s = 1.0954, 174.8g = 3.56 \text{ Mol. } \Delta = 6.58.$ 

ŧ	$\mu_{\Delta}$	$\mu$ — $\mu_2$	D
0°	540.9	108.3	122 · 4
5	477:5	73.8	103.5
10	423.8	51.2	86.2
15	379.0	35.5	69.6
20	340.6	$24 \cdot 4$	54.6
25	$308 \cdot 5$	19.1	41.2
30	281 · 0	12.1	28.9
40	$237 \cdot 2$	3.6	8.4
50	205.0	_ 2.2	<b>—</b> 6·7

## Ammoniumnitrat NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub> (80).

 $5.975^{\circ}/_{\circ}$ , s = 1.026, 61.29 g = 1.532 Mol.,  $\Delta = 2.84$ .

10°	452 • 4	22.6	40.0
20	354 · 1	10.9	$25 \cdot 6$
30	287 · 9	$5\cdot 2$	13.4
40	239 · 8	1.0	3.5
50	205.6	<b>—</b> 2·8	- 3.9

## Chlorkalium KCl (74.5).

 $10.23^{\circ}/_{\circ}$ , s = 1.068, 109.2 g = 2.93 Mol.  $\Delta = 5.42$ .

5°	519.8	31.5	87.7
10	$454 \cdot 8$	$20 \cdot 2$	75.6
15	$405 \cdot 3$	$9 \cdot 2$	61.8
20	$362 \cdot 8$	$2\cdot 2$	49.3
25	$326 \cdot 4$	1.2	37.8
30	299.0	<b>—</b> 5·9	$27 \cdot 4$
40	$252 \cdot 5$	- 11.7	$9 \cdot 9$
50	215 · 1	<b>— 12·3</b>	3.2

#### Bromkalium KBr (119).

 $14.023^{\circ}/_{\circ}$ , s = 1.109, 155.51 g = 2.61 Mol.,  $\Delta = 4.83$ .

ŧ	$\mu_{\Delta}$	$\mu$ — $\mu_{\Delta}$	D ·
5°	501 · 1	$50 \cdot 2$	78.6
10	439.7	$35 \cdot 3$	65.3
20	$353 \cdot 4$	11.6	41.7
30	291 · 3	1.8	22.0
40	243.8	<b>— 3.0</b>	6.0
50	209 · 1	- 6.3	- 6.0

#### Jodkalium KJ (166).

$$8.419^{\circ}/_{\circ}$$
,  $s = 1.0661$ ,  $89.8 g = 1.082$  Mol.,  $\Delta = 2.000$ .

5°	516 · 1	35.2	34.5
10	450.2	24.8	28.7
15	$399\cdot 2$	15.3	23.4
20	354.8	10.2	18.3
<b>25</b>	316.0	11.6	13.7
<b>3</b> 0	$285 \cdot 8$	$7 \cdot 3$	9.8
40	238.3	$2 \cdot 5$	2.5
50	203.7	- 0.8	- 3.0

### Kaliumnitrat KNO<sub>3</sub> (101).

$$6 \cdot 316^{\circ}/_{\circ}$$
,  $s = 1 \cdot 040$ ,  $65 \cdot 68 g = 1 \cdot 30$  Mol.,  $\Delta = 2 \cdot 41$ .

10°	460.0	15.0	34.2
20	$360 \cdot 5$	4.5	21.8
30	290 · 1	$3 \cdot 0$	11.4
40	242.6	<u> </u>	2.9
50	206.7	<b>—</b> 3·9	-3.5

Ein Blick auf unsere Tabellen zeigt uns sofort, dass besonders bei den niedrigeren Temperaturen  $\mu-\mu_{\lambda}$  immer erheblich kleiner als D ist, dass mit wachsender Temperatur diese beiden Grössen einander näher rücken und schliesslich gleich werden. Kommen irgendwo Abweichungen vor, so sind sie immer so unerheblich, dass sie vollständig innerhalb der Fehler-

grenzen liegen. Ist ja unsere Temperaturformel für die innere Reibung des Wassers nur angenähert richtig. Ferner müssen wir noch überlegen, dass auch unsere Lösungen selbst noch lange nicht das Ideal einer verdünnten Lösung repräsentiren. Enthält ja die KBr-Lösung  $14^{0}/_{0}$  und die NH<sub>4</sub>Br-Lösung sogar  $16^{0}/_{0}$  an gelöster Substanz.

Alle Folgerungen, welche Sprung aus seinen Beobachtungen zieht, finden wir im Einklang mit unserer auf theoretischem Wege ermittelten Ungleichung. Als Typus der oben genannten Salzgruppe führt er das Chlorammonium an und stellt folgende drei Sätze auf:

- \*1. Bei niedrigen Temperaturen vermindert, bei höheren Temperaturen vergrössert das Chlorammonium die Zähigkeit des Wassers, und zwar beides in umso höherem Grade, als die Lösung concentrirter ist.
- 2. Die Temperatur, bei welcher Wasser und Salzlösung gleiche Zähigkeit zeigen, liegt umso höher, je geringer die Concentration der Lösung ist.
- 3. Es fällt das Minimum der Zähigkeit auf eine umso geringere Concentration, je höher die Temperatur ist.«

In der That folgt aus der rechten Seite unserer Ungleichung ohne weiters, dass die Verminderung der Zähigkeit bei niedrigeren Temperaturen, die Vermehrung derselben bei höheren umso grösser sein muss, je grösser  $\Delta$ , d. h. die Concentration ist.

Bezüglich des zweiten Satzes haben wir zu untersuchen, für welche Temperaturen bei abnehmendem  $\Delta$  die Differenz der inneren Reibung des Wassers und der Lösung Null wird. Vernachlässigen wir in unserer Ungleichung das Glied mit  $\Delta^3$ , so finden wir für den vorliegenden Fall

$$(21\cdot 17 - 0\cdot 8158t + 0\cdot 00978t^2) \Delta - (0\cdot 4079 - 0\cdot 00978t) \Delta^2 = 0,$$
 woraus folgt

$$\Delta = \frac{21 \cdot 17 - 0 \cdot 8158t + 0 \cdot 00978t^{2}}{0 \cdot 4079 - 0 \cdot 00978t} = 51 \cdot 9 - 0 \cdot 756t + 0 \cdot 0059t^{2},$$

indem wir die höheren Glieder vernachlässigen können. Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem t bis gegen 64° beständig ab, was dem zweiten Satze von Sprung entspricht.

Suchen wir jene Beziehung zwischen t und  $\Delta$ , für welche  $\mu_{\Delta}$  ein Minimum wird, so haben wir die Gleichung (1) nach  $\Delta$  zu differenziren und den Differentialquotienten gleich Null zu setzen. Also

$$\frac{d\mu_{\Delta}}{d\Lambda} = f'(t) + \Delta f''(t) = 0,$$

indem wir die höheren Glieder wieder vernachlässigen können. Führen wir die Zahlenwerthe ein, so ergibt dies

$$\frac{d\mu_{\Delta}}{d\Delta} = -21 \cdot 17 + 0 \cdot 8158t - 0 \cdot 00978t^{2} + + (0 \cdot 8158 - 0 \cdot 01956t)\Delta = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta = 25.95 - 0.3778t + 0.00293t^2$$

Auch aus dieser Gleichung ergibt sich eine Abnahme des  $\Delta$  mit wachsendem t bis gegen 64°, so dass auch der dritte Sprung'sche Satz in unserer Theorie enthalten ist.

Es bestätigt sich also unsere Ansicht von Neuem, dass der Zusatz des Gelösten die Energie des Lösungsmittels in der Weise erhöht, dass es die Wirkung hat, als würde die Temperatur des Lösungsmittels in entsprechender Weise gesteigert.

Von einem ganz anderen Standpunkt aus beurtheilt Arrhenius die innere Reibung der Lösungen. In seiner Abhandlung »Über die innere Reibung verdünnter, wässeriger Lösungen«¹ sagt er: »Bei der Discussion der Verhältnisse, die bei der Elektricitätsleitung in Elektrolyten stattfinden, bin ich zu der Ansicht geführt worden, dass die Moleküle eines Elektrolyten von zwei verschiedenen Arten sind, active und inactive. (Die Moleküle eines Nichtelektrolyten sind dagegen alle inactiv.) Die activen Moleküle sind so constituirt, dass ihre Ionen dem von der Clausius-Williamson'schen Hypothese geforderten freien Bewegungszustand genügen, oder mit anderen Worten, die activen Moleküle sind factisch als dissociirt anzusehen. Da die Reibung nach aller Wahrscheinlichkeit mit der Zusammengesetztheit der reibenden Theile wächst, so dürfte es nicht mehr

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zeitschrift für physik. Chemie, I, S. 285 ff.

befremdend erscheinen, dass active (d. h. in Ionen gespaltete) Moleküle unter Umständen eine kleinere Reibung erleiden, als inactive (nicht gespaltete). Wenn man näher nachsieht, so sind es auch nur diejenigen Salze, die am allerbesten leiten (d. h. die die relativ grösste Anzahl von activen Molekülen enthalten), welche die innere Reibung des Wassers verkleinern. In den Lösungen von diesen Salzen würde also eine so grosse Menge von activen Molekülen vorkommen, dass ihre verringernde Einwirkung auf die innere Reibung die vergrössernde Einwirkung der gleichzeitig vorkommenden inactiven Moleküle überwindet. Eine Stütze für diese Anschauung findet sich darin, dass auch Lösungen von diesen Salzen bei grösseren Concentrationen grössere innere Reibung als das Wasser selbst haben. Bei zunehmender Concentration wächst nämlich die Anzahl der inactiven Moleküle auf Kosten der activen.

Da alle Salze in äusserster Verdünnung in lauter active Moleküle zerfallen, so ist es nicht undenkbar, dass alle Salze (wenigstens diejenigen, deren Ionen ziemlich einfach sind) in äusserst kleinen Zusätzen die innere Reibung des Wassers verkleinern.«

Ich kann mich dieser Anschauung nicht anschliessen. Einmal, weil ich nicht einsehe, wesshalb der Einfluss des Gelösten verschiedener Natur sein soll, wenn die Molekeln als Ionen oder nicht dissociirt auftreten. Die Spaltung der Molekeln in Ionen hat lediglich den Erfolg, dass die Zahl der gelösten Molekeln vergrössert erscheint und daher ein dementsprechender Einfluss auf die verschiedenen Eigenschaften des Lösungsmittels (Gefrierpunktserniedrigung, Dampfspannungserniedrigung, osmotischer Druck etc.) ausgeübt wird. Wie mangelhaft die Unterscheidung von activen und inactiven Molekeln für den Fall der inneren Reibung ist, zeigt eine Anmerkung, welche Arrhenius in seiner Abhandlung S. 298 anbringt. Er sagt daselbst: »Ich habe gefunden, dass Lösungen in Äthylalkohol von kleinen Mengen von Methylalkohol, Aceton oder Äthyläther eine geringere innere Reibung als der Äthylalkohol selbst haben.« Nach unserer Betrachtungsweise kann uns ein derartiges Resultat nicht überraschen, da unsere Theorie mit der Dissociation gar nichts zu thun hat.

In zweiter Linie ist für mich das Verhalten der inneren Reibung der Lösungen bei höheren Temperaturen massgebend, Arrhenius Theorie nicht anzunehmen. Wären thatsächlich die sogenannten activen Molekeln die Ursache der Verminderung der inneren Reibung, so müsste das umso mehr der Fall sein, je höher die Temperatur der Lösung ist, da ja der Grad der Dissociation mit wachsender Temperatur zunimmt. Nun zeigt sich aber im Gegentheil, dass schon bei 50° die innere Reibung einer jeden Lösung grösser ist als jene des reinen Wassers bei derselben Temperatur.

Damit erscheint mir der Vorzug meiner Anschauungsweise zur Genüge klar gelegt.

# Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten

(II. Mittheilung)

von

Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz.

(Mit 1 Textfigur.)

Es wurde schon in meiner ersten Mittheilung<sup>1</sup> hervorgehoben, dass, wenn eine unterkühlte Flüssigkeit durch einen festen Krystall zum Erstarren gebracht wird, die Gleichgewichtsstörung zu ihrer Ausbreitung Zeit braucht. Ich habe nun diese zeitliche Ausbreitung, besonders in ihrer Abhängigkeit von dem Grade der Unterkühlung, d. i. von der Differenz zwischen der Temperatur der unterkühlten Flüssigkeit und ihrem Schmelzpunkt, näher ins Auge gefasst, um auf diesem Wege die Natur der Unterkühlung näher kennen zu lernen.

Was die Wahl der Substanzen anbelangt, so sollen zunächst solche Substanzen untersucht werden, welche kein Krystallwasser enthalten, weil bei den krystallwasserhältigen Substanzen das Krystallwasser die Erscheinung in einer uns noch unbekannten Weise complicirt. Da das Wasser die nächstliegende Substanz ist, so habe ich zuerst die Erstarrungsgeschwindigkeit des unterkühlten Wassers gemessen.

Der Apparat bestand im Wesentlichen aus einer dünnwandigen Glasröhre, welche 595 mm lang, 18 mm weit und an dem einen Ende zugeschmolzen war. Der Stopfen hatte zwei Bohrungen; in der einen sass ein langes, in Zehntelgrade getheiltes und wohlgeprüftes Thermometer, dessen Gefäss sich in der Mitte der Wassersäule befand. Um die Hundertstel noch

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. C, Abth II. a, December 1891, S. 1219.

sicher schätzen zu können, wurde vor dem Thermometer eine Linse von 235 mm Brennweite so aufgestellt, dass das Thermometer sich gerade in der Brennebene befand, und hinter die Linse ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr gebracht. Die zweite Bohrung des Stopfens diente dazu, um in das unterkühlte Wasser, ohne mit dem Stopfen zu rühren, das die Unterkühlung auslösende Eisstückchen fallen zu lassen. Bedeckt war das Wasser mit einer ungefähr 4 mm dicken Schichte Terpentinöl.

Die beschriebene Glasröhre sass in dem Stopfen einer dickwandigen Glasröhre, welche um einige Centimeter länger und 44 mm weit war. Diese weitere Glasröhre war unten verschlossen und ganz mit Terpentinöl gefüllt. Der Zweck dieser Vorrichtung war der, sowohl die Temperatur der Wassersäule viel gleichmässiger zu machen, als auch die Wassersäule während des Versuches vor einer Erwärmung durch den Athem zu schützen. Die weitere Röhre war in einem eisernen Träger festgeklemmt.

An der Glasröhre, welche das Wasser enthielt, befanden sich zwei feine, kreisförmige Marken, deren Ebenen zu der Röhrenachse senkrecht waren. Die erste Marke befand sich 4 cm unter dem Wasserspiegel und die zweite am Ende der Röhre, so dass der Abstand = 501.0 mm war. Fällt nämlich auf die Oberfläche des unterkühlten Wassers ein sehr kleines Eisstückchen, so tritt dort die Erstarrung ein. Es ist nun sehr schwer, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem gerade die Erstarrung, so ist es sehr leicht, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem die Erstarrung durch eine solche Marke hindurchtritt.

Zur Messung der Zeit benützte ich in Ermangelung eines Secundenpendels ein gut gehendes Metronom, welches so eingestellt wurde, dass die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen (wie eine lange Beobachtungsreihe ergab) = 0.9869 Sekunden war.

Die Unterkühlung wurde ausgeführt in einem kleinen exponirt liegenden Zimmer meines Laboratoriums, welches den ganzen Winter hindurch nicht geheizt wurde. Die Zimmertemperatur nahm, als das Frostwetter eintrat, stetig, aber ausser-

ordentlich langsam ab, so dass sie, namentlich am Vormittag, durch einige Stunden hindurch constant war.

Ich hätte gern die Untersuchung bis —10° C. ausgedehnt, aber leider erstarrte das Wasser zweimal bei etwas weniger als —6° C. von selbst. Dieser Umstand ist mir ganz räthselhaft, da ich früher wiederholt Wasser in Glaskolben bis ungefähr —10° C. unterkühlen konnte, worauf dann allerdings die Erstarrung von selbst eintrat. Möglicherweise ist daran die Beschaffenheit des Glases schuld.

In der folgenden Tabelle bedeuten t die Temperatur in Celsiusgraden, Z die Zeit in Sekunden, während welcher die Erstarrung von der ersten Marke bis zur zweiten fortschritt, und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ausgedrückt in Millimeter und Sekunden.

t	Z	v	t	Z	v
-0.74	1372	0.37	-2.71	86.8	5 · 77
-1:12	347.5	1 • 44	-2.90	71	7.06
-1:40	228	2.20	-3.20	67.1	7.47
-1.54	181.6	2 · 76	-3.49	49	10.23
-1.62	171.7	2.92	-3.64	44 · 4	11.28
-2.00	151	3.32	-4.14	29.6	16 93
-2.40	111.5	4 · 49	<b>-4·20</b>	27 · 6	18 · 15
-2.54	95.7	5 · 24	-4.60	22 · 7	22.07
-2.67	89 · 8	5.58			
			1		

Eine einfache empirische Formel, welche sich den Versuchswerthen in genügender Weise anschliesst, ist

$$V = (a+bt+ct^2).t^2,$$

wo

$$a = 1.3561$$
,  $b = 0.3766$ ,  $c = 0.06726$ 

ist und für t die negativen Werthe einzusetzen sind.

Die Versuche führen uns also zu dem Resultate: Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung in dem

unterkühlten Wasser fortschreitet, nimmt mit dem Grade der Unterkühlung stetig und sehr rasch zu.

Es muss erwähnt werden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung auch bei einer und derselben Temperatur etwas schwanken kann, und zwar hängt dies von der Art und Weise ab, wie sich die Krystalle aneinanderreihen. In vielen Fällen schritt die Erstarrung in einer Schraubenfläche fort und dann war die Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwas kleiner. Bei dem ersten der angeführten Versuche ( $t=-0.74\,^{\circ}$  C.) bildeten die Krystalle eine Art Kette, welche anfangs schraubenförmig gewunden war, dann gerade verlief und sich schliesslich wieder krümmte. Dementsprechend variirte auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit während des ganzen Versuches.

Dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung mit der Unterkühlung rasch zunimmt, steht mit der in meiner ersten Mittheilung durchgeführten Theorie in gutem Einklang. Nach dieser Theorie besteht eine unterkühlte Flüssigkeit aus lauter Elementarkrystallen, welche gegeneinander alle möglichen Orientirungen haben und welche die Übergangsstufe von dem flüssigen Zustand zu den festen Krystallen bilden. Wird das Wasser von 0° auf -t° C. unterkühlt und ist  $d\mu$  die Masse eines solchen Elementarkrystalles, so hat derselbe bei der Unterkühlung die Wärmemenge

$$d\mu \int_{-t}^{0} Cdt$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dass hier C sehr nahe = 1 ist, die Wärmemenge

abgegeben. Würde das Wasser auf normalem Wege bei 0° C. zu Eis erstarren, dann würde das Massenelement  $d\mu$  die Wärmemenge  $\Lambda d\mu$  abgeben, wo  $\Lambda$  die Erstarrungswärme bedeutet. Es hat also der Elementarkrystall in dem unterkühlten Wasser um

$$(\Lambda - t)d\mu$$

mehr Wärme, als in dem festen Eis von 0° C. Die Auslösung der Unterkühlung durch ein Eisstückehen erfolgt nun in der

Weise, dass die anliegenden Elementarkrystalle gleichgerichtet werden. Indem die der Arbeit der richtenden Kräfte gleiche lebendige Kraft sich in Wärme verwandelt, werden, wie in der früheren Abhandlung ausführlich auseinandergesetzt wurde, die gerichteten Elementarkrystalle auf die Temperatur des Schmelzpunktes gehoben, wodurch zwischen ihnen und den noch ungerichteten Elementarkrystallen eine Temperaturdifferenz entsteht, welche  $t^{\circ}$  C. beträgt und zur Folge hat, dass die gerichteten Elementarkrystalle so lange Wärme verlieren, bis sie fest sind.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung fortschreitet, wird also von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher aus dem unterkühlten Wasser neue Krystalle entstehen, und diese Geschwindigkeit wird wieder abhängen von der Geschwindigkeit, mit welcher die Elementarkrystalle gerichtet werden und von der Raschheit, mit welcher dieselben dann ihre Wärme abgeben.

Ist dm die Masse einer Schichte, welche zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten der Röhre liegt, so wird darin bei der Auslösung der Unterkühlung die Menge

$$-\frac{C}{\Lambda}tdm$$
, oder einfach:  $-\frac{t}{\Lambda}dm$ 

erstarren. Die Menge der erstarrten Krystalle ist also der Unterkühlung  $-t^{\circ}$  proportional. Da durch diese Krystalle die Unterkühlung in der nächsten Schichte ausgelöst wird, so ist die Zahl der richtenden Kräfte proportional der Unterkühlung. Ferner werden diese Kräfte gewiss desto grösser sein, je tiefer die Unterkühlung ist. Denn da die Elementarkrystalle aus dem vollkommen flüssigen Zustand in den vollkommen festen durch allmälige Abgabe der Wärme  $\Lambda d\mu$  stetig übergehen, so werden sie dem festen Zustand desto näher liegen, je mehr sie Wärme abgegeben haben, also je grösser die Unterkühlung ist. Ferner kommt in Betracht, dass die Wärmeabgabe der gerichteten Elementarkrystalle desto rascher erfolgt, je grösser die Temperaturdifferenz derselben gegen die noch nicht alterirte unterkühlte Flüssigkeit ist, und schliesslich ist auch die Wärme, welche die gerichteten Elementarkrystalle noch abzugeben

haben, um vollkommen fest zu werden, desto kleiner, je mehr sie schon früher abgegeben hatten, d. h. je tiefer die Unterkühlung ist. Alles zusammengefasst, sehen wir, dass vier Umstände, welche alle in demselben Sinne wirken, die Erstarrung desto rascher herbeiführen, je tiefer die Unterkühlung ist.

Im Anschlusse an das Vorhergehende möchte ich hier noch auf das zurückkommen, was ich in meiner früheren Arbeit (§. 10) über den amorphen Zustand gesagt habe, und möchte daran einige Bemerkungen knüpfen.

Ich habe dort gesagt, dass, wenn eine flüssige Substanz den Grenzzustand der Unterkühlung erreicht hat und dann noch weiter abgekühlt wird, wir daraus einen festen amorphen Körper erhalten. Wir wollen jetzt zunächst die thermische Volumsänderung des Schwefels bei dem constanten Druck einer Atmosphäre betrachten. Der natürliche krystallisirte Schwefel dehnt sich nach Kopp (Liebig's Annalen 93, 1855) sehr ungleichmässig aus, indem die Ausdehnung für steigende Temperaturen, insbesonders in der Nähe des Schmelzpunktes, rasch zunimmt. Kopp gab zwischen  $t=0^{\circ}$  und  $t=90^{\circ}$  C. die Formel

$$V_t = 1 + 0.00010458t + 0.0000026588t^2 - 0.000000014673t^3.$$

Ist das Volumen des festen Schwefels bei  $0^{\circ}$  C. = 1, so ist es bei  $115^{\circ}$  C.

$$= 1.0956.$$

Beim Schmelzen erfährt das Volumen eine Vergrösserung, so dass das Volumen des flüssigen Schwefels bei 115° C.

$$= 1.1504$$

ist. Was die Ausdehnung des flüssigen Schwefels anbelangt, so fand Kopp dieselbe innerhalb des Temperaturintervalles 126·0—151·6° C. als gleichförmig, so dass bei t° das Volumen durch

$$V_t' = 1.1504 + 0.000527(t - 115)$$

dargestellt wird. Viel genauer wurde die Ausdehnung des flüssigen Schwefels von Despretz (Compt. rend. VII.) unter-

sucht. Derselbe fand den Ausdehnungscoëfficienten

zwischen 110 und 130° C. = 0.000622

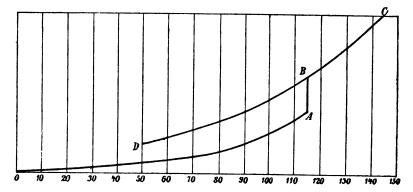
- $\sim$  110  $\sim$  150 = 0.000581
- \* 110 \* 200 = 0.000454
- \* 110 \* 250 = 0.000428

was sich durch die Formel

Ausdehnungscoëfficient = 0.001033-0.0000035t darstellen lässt. Es hat demnach der flüssige Schwefel bei  $t^{\circ}$ C. das Volumen

$$V_t' = 1.04993 + 0.001085 t - 0.00000184 t^2$$

In der beistehenden Figur stellt die Curve zwischen 0° und 115° (bis A) die Ausdehnung des festen und die Curve BC



die Ausdehnung des flüssigen Schwefels dar. Wenn wir nun den flüssigen Schwefel wieder abkühlen und dafür sorgen, dass er den unterkühlten Zustand sehr leicht annehmen kann (indem wir ihn z. B. in die Form kleiner Tröpfchen bringen), so wird das Volumen längs der Curve CBD abnehmen und es entsteht die Frage, ob diese Curve nicht einmal die Ausdehnungscurve des festen Schwefels schneiden wird. In einem solchen Schnittpunkt hätten dann der feste und der unterkühlte Schwefel denselben Druck, dasselbe Volumen und dieselbe Temperatur.

Wir erhalten diesen Punkt aus der Gleichung

$$V_t = V_t'$$

oder

$$0 = 0.04993 + 0.00098042t - 0.0000044988t^{2} + 0.000000014673t^{3}.$$

welche die reelle Wurzel

$$t = -41.81$$

hat.

Diese Temperater liegt sehr tief unter der Grenze der Unterkühlung, welche ich bei 75° C. gefunden habe (a. a. O., S. 1227). Bei der Unterkühlung von 115° bis —41.81° C. gibt die Masseneinheit des Schwefels die Wärme

$$\int_{-41.81}^{115} C.dt$$

ab, wo C die specifische Wärme bedeutet. Nach den Messungen von Person ist die mittlere specifische Wärme des flüssigen Schwefels zwischen 119° und 147° C. gleich 0·2346. Wenden wir hier diese Zahl an, so erhalten wir die abgegebene Wärme gleich

$$0.2346 \times 156.81 = 36.79$$
 cal.

Die latente Schmelzwärme des Schwefels ist nach Person gleich

$$\Lambda = 9.368$$
:

es ist also die abgegebene Wärme 3.927mal so gross als die Schmelzwärme. Nach unserer Anschauung von der Constitution einer unterkühlten Flüssigkeit muss demnach der unterkühlte Schwefel bei der Temperatur —41.81° C. schon längst in seinen kleinsten Theilchen vollkommen fest sein.

Um nun über den Zustand des unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur noch weiter Aufschluss zu erhalten, wollen wir die Frage erledigen, wie gross der Unterschied der Energien des festen und unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur ist. Erwärmen wir den natürlichen krystallisirten Schwefel, immer bei dem constanten Druck einer Atmosphäre, bis zum Schmelzpunkt, bringen wir ihn dann durch allmäliges Schmelzen in den Zustand des flüssigen Schwefels und kühlen wir ihn schliesslich bis —41·81° C. wieder ab, so wird die von Aussen

im Ganzen zugeführte Arbeit wegen des constanten Druckes gleich Null sein. Demnach ist der Energieunterschied lediglich gleich der gesammten von aussen zugeführten Wärme, also pro Masseneinheit gleich

$$A\int_{-41.81}^{115} cdt + A\Lambda - A\int_{-41.81}^{115} Cdt = A\Lambda - A\int_{-41.81}^{115} (C-c)dt,$$

wo A das mechanische Äquivalent der Wärme und c die specifische Wärme des festen Schwefels bedeutet.

Für die specifische Wärme des festen Schwefels fanden Dulong und Petit die Zahl 0.188.

Regnault's frühere Versuche (mit geschmolzenem und erstarrtem Schwefel) lieferten 0.20259. Später erkannte derselbe den Einfluss der verschiedenen Zustände und besonders die Schwierigkeit, den Werth für den zwei- und eingliederigen Schwefel zu bekommen. Er erhielt für

Die Temperaturgrenzen waren 15° und 97° C. Bunsen fand mit dem Eiscalorimeter 0·1712. Person wählte für sein empirisches Gesetz

$$\Lambda = (C-c)(\tau + 160),$$

in welchem  $\tau$  den Schmelzpunkt (115°) bedeutet, für c die Zahl 0.20259 und berechnete daraus

$$\Lambda = 0.03201 \times 275 = 8.803$$

was der experimentell bestimmten Zahl 9.368 ziemlich nahe kommt. Hätte er aber die Regnault'schen Zahlen 0.1776 und 0.1764 oder den Bunsen'schen Werth 0.1712 benützt, so hätte er beziehungsweise die Zahlen 15.68, 16.00, 17.43 erhalten, welche mit dem experimentellen Ergebnisse entschieden nicht stimmen.

In dem Integral

$$\int_{-41.81}^{115} (C-c) dt$$

ist C-c eine Function der Temperatur. Da uns diese Function nicht bekannt ist, so wollen wir C-c vorläufig als constant annehmen und das Integral gleich

$$(C-c)(115+41\cdot81) = (C-c) \times 156\cdot81$$

setzen. Für C = 0.2346 und c = 0.1776, 0.1764, 0.1712 ergeben sich beziehungsweise die Werthe

$$8.938$$
,  $9.126$ ,  $9.942$ .

Vergleichen wir diese Zahlen mit dem experimentell gefundenen Werthe  $\Lambda=9\cdot368$ , so können wir sagen, dass bei der Temperatur —41·81° C. der Unterschied der Energien, nämlich

$$A\Lambda - A \int_{-41.81}^{115} (C-c) dt$$

entweder = 0 oder doch sehr klein ist. Wir erhalten also das folgende Resultat:

Wenn wir natürlichen krystallisirten Schwefel und unterkühlten flüssigen Schwefel bei dem constanten Druck einer Atmosphäre bis —41.81°C. abkühlen, so erhalten beide das gleiche specifische Volumen und entweder gleiche oder doch sehr nahe gleiche Werthe der Energie.

Man könnte in Folge dieses Ergebnisses versucht sein, anzunehmen, dass bei —41·81° C. die Zustände vollständig gleich sind, oder dass der flüssige Schwefel durch Unterkühlung bis —41·81° C. allmälig in den Zustand des natürlichen krystallisirten Schwefels gebracht werden kann. Wäre diese Annahme richtig, dann wäre es möglich, nachdem der flüssige Schwefel bei der Unterkühlung die Temperatur —41·81° C. erreicht hat, durch allmälige Wärmezufuhr die Zustände des festen natürlichen Schwefels bis zum Schmelzpunkt zu erhalten, kurz, es wäre ein vollständiger Kreisprocess möglich und es müsste die bekannte Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

erfüllt sein. Diese Gleichung gibt aber

$$\Lambda = (273 + 115) \int_{-41.81}^{115} \frac{C - c}{273 + t} dt.$$

Da nun die Gleichung

$$\Lambda = \int_{-41.81}^{115} (C - c) \, dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt ist, so müsste die Gleichung

$$\int_{-41\cdot81}^{115} \frac{C-c}{273+115} dt = \int_{-41\cdot81}^{115} \frac{C-c}{273+t} dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt sein, was nicht richtig ist.

Wir können also durch Unterkühlung nie die Zustände des natürlichen krystallisirten Schwefels erreichen, der aus dem flüssigen Schwefel durch die normale Erstarrung entsteht. Wird flüssiger Schwefel auf dem Wege der Unterkühlung fest, dann wird er amorph.

Ebenso wie den Schwefel könnte man auch andere Substanzen, wie Phosphor, Chlorcalcium, phosphorsaures Natron, unterschwefligsaures Natron etc. untersuchen, aber man erhält bei allen diesen Substanzen den Schnittpunkt der zwei erwähnten Curven bei Temperaturen, welche zwischen —100° und —200° C., also viel zu weit von jenen Temperaturintervallen liegen, in welchen die Ausdehnungsverhältnisse bestimmt worden sind. Aus diesem Grunde haben diese Temperaturzahlen gar keine Sicherheit. Auch beim Wasser ist es nicht möglich, aus den bekannten Ausdehnungsverhältnissen auf jene bei sehr tiefen Temperaturen zu schliessen.

### X. SITZUNG VOM 12. APRIL 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893) des 102. Bandes, Abtheilung III der Sitzungsberichte vor, womit nun der Druck dieses Bandes in allen drei Abtheilungen vollendet ist.

Das Präsidium der Mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau spricht den Dank aus für die Begrüssung dieser Gesellschaft zu ihrer 25 jährigen Gründungsfeier.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs in Wien übersendet eine Abhandlung: »Über eine fossile *Halimeda* aus dem eocänen Sandsteine von Greifenstein«.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Das w. M. Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von Herrn A. Kiesel in Wiesbaden vor, betitelt: »Untersuchungen zur Physiologie des facettirten Auges«.

### XI. SITZUNG VOM 19. APRIL 1894.

Herr Prof. Dr. Filippo Zamboni, Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Bezeichnung »Sterne«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine im anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Otto v. Aufschnaiter, betitelt: \*Die Muskelhaut des menschlichen Magens«.

Das w. M. Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: »Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer« (IV. Abhandlung) als ein Ergebniss der IV., während des Sommers 1893 im ägäischen Meer stattgefundenen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes »Pola« (Schlussbericht).

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben drei weitere Arbeiten aus seinem Laboratorium, und zwar:

- Jüber die Oxydation normaler fetter Säuren«, von Robert Margulies.
- 2. Ȇber eine Synthese von Chinolin«, von Dr. Victor Kulisch.
- 3. Ȇber elektrolytische Bestimmung der Halogene«, von Dr. G. Vortmann.

## SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



### XII. SITZUNG VOM 4. MAI 1894

Der Secretär legt das erschienene Heft III (März 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann in Prag: \*Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission\*.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über die thermochemischen Vorgänge im Secundärelemente«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung: »Zur Theorie der Entwicklung der jetzigen Floren der Erde aus der Tertiärflora«.

- Das c. M. Herr emerit. Prof. M. Willkomm übersendet zwei Arbeiten von Dr. Wilhelm Sigmund in Prag, betitelt:
- 1. »Einfluss des Magnetismus auf das Pflanzenwachsthum« (Vorläufige Mittheilung);
- 2. Ȇber die Wirkung gasförmiger, flüssiger und fester Körper auf die Keimung«.
- Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: Folgerungen aus Amagat's . Versuchen«.

Herr Max Jüllig, dipl. Ingenieur und Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes«.

Herr Alfred J. Ritter v. Dutczyński in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: \*Beschreibung und Begründung einer Neuerung an Bremsen\*.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Mittheilung: »Über die Herkunft der die Chordascheide der Haie begrenzenden äusseren Elastica«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei von Herrn Professor Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

- 1. Über das Scoparin. « (II. Abhandlung), von G. Goldschmiedt und F. v. Hemmelmayr.
- Notiz über das Verhalten des Trimethylgallussauren Calciums bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Hugo Arnstein.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Synthese des Isochinolins und seiner Derivate« I., von Dr. C. Pomeranz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Herrn Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien unter dem Titel: »Absorptionsspectren von farblosen und gefärbten Gläsern mit Berücksichtigung des Ultraviolett«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über den Einfluss verdünnter Salzsäure auf Chinabasen.«

### XIII. SITZUNG VOM 10. MAI 1894.

Die Schriftleitung der 66. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zeigt an, dass diese Versammlung vom 24. bis 30. September 1. J. in Wien tagen wird und laden die Mitglieder der kaiserlichen Akademie zur Theilnahme an derselben ein.

Herr Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien übersendet eine von dem verewigten w. M. Herrn Hofrath Prof. Emil Weyr entworfene und ihm vor dessen Ableben zur Ausfertigung übertragene Arbeit: »Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig in Wien übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz:

- JÜber die Einwirkung des Stickoxydes auf einige Metalle«, von Prof. F. Emich.
- Der Stickstoffverbindungen des Mangans«, von O. Prelinger.

Ferner übersendet Herr Hofrath Ludwig eine von den 'Herren Prof. Dr. J. Mauthner und Prof. Dr. W. Suida ausgeführte Arbeit: \*Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins (II. Abhandlung).

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet Anatomisch-physiologische Untersuchungen über das tropische Laubblatt. II. Über wassersecernirende und -absorbirende Organe«.

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Eine neue Pachastrella«.

Der Secretär legt zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Karl Moser in Wien vor, welche folgende Aufschriften führen:

- 1. »Chemische Mittel zur Vertilgung der Reblaus und anderer schädlicher Insecten.«
- 2. Selbstwirkender Sicherheitsbrems-Klotz bei minderem Kraftverbrauch.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze«.

Der k. u. k. Linienschiffslieutenant Herr August Gratzl überreicht im Auftrage des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums (Marine-Section) einen Bericht über die im Sommer 1892 auf dem französischen Transportavisodampfer »Manche« unter dem Commando des Linienschiffscapitäns Amédée Bienaymé unternommene Reise von Edinburgh nach Jan Mayen, Spitzbergen und Tromsö, welche den Besuch der ehemaligen österreichischen arktischen Beobachtungsstation im Wilczekthale auf Jan Mayen und die wissenschaftliche Erforschung eines Theiles von Spitzbergen zum Zwecke hatte.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Haberlandt G., Eine botanische Tropenreise, indo-malayische Vegetationsbilder und Reiseskizzen. (Mit 51 Abbildungen.) Leipzig, 1893; 8°.

 Über die Ernährung der Keimlinge und die Bedeutung des Endosperms bei viviparen Mangrovepflanzen. Leyden, 1893; 8°.

# Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze

von

### Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Da

$$[2\alpha] = 2[\alpha] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ist, je nachdem

$$\alpha-[\alpha]<\frac{1}{2}$$

ist oder nicht, so ist die durch das verallgemeinerte Gaussische Lemma definirte charakteristische Zahl (m, n) einer ganzen Zahl m in Bezug auf eine zu derselben theilerfremde ungerade Zahl n durch die Gleichung

$$(m, n) = \sum_{r=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[ \frac{2xm}{n} \right] - 2 \left[ \frac{xm}{n} \right] \right\}$$
 1.)

gegeben, welche sofort zu der wiederholt benützten Relation

$$x = \frac{n-1}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left[\frac{2xm}{n}\right]$$
II.)

führt. Auf dieser Darstellung des Legendre-Jacobi'schen Symbols beruht u. A. der dritte Gaussische Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes für zwei ungerade Primzahlen, welchen die Herren L. Kronecker¹ und E. Schering² wesentlich vereinfachten, indem sie auf dem Gaussischen Gedankengange fussend, in verschiedener Weise zeigten, dass das Zeichen  $\left(\frac{m}{n}\right)$  durch das interessante Kronecker'sche Vorzeichenproduct darstellbar ist. Die Factoren dieses, sowie mehrerer anderer von mir³ zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes benutzten Producte sind alternirende Functionen der ganzen Zahlen m und n, wesshalb die aus ihnen gebildeten Ausdrücke unmittelbar die Reciprocitätseigenschaft des Symbols erkennen lassen; man kann aber auch durch Benützung von Zeichenproducten, welche die erwähnte Eigenschaft nicht besitzen, auf einem nicht minder einfachen Wege zum Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste gelangen, was meines Wissens bisher noch nicht gezeigt wurde.

Der oben angeführte Ausdruck für das Symbol  $\left(\frac{m}{n}\right)$  führt nun ungemein leicht zu einem derartigen Beweise, welcher zunächst in den folgenden Zeilen mitgetheilt werden soll; hierauf werden aus der im Anfange angegebenen Darstellung der charakteristischen Zahl zwei von Herrn E. Schering in seiner im ersten Bande der Acta mathematica enthaltenen bemerkenswerthen Abhandlung \*Zur Theorie der quadratischen Reste\* aufgestellte Theoreme, welche von Herrn H. Schmidt bei seinem dritten Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes neuerdings abgeleitet wurden, in sehr einfacher Weise erschlossen.

<sup>1</sup> Ȇber den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste«. Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884. — »Bemerkung zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung«. A. e. a. C., 1885.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ȇber den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste«. A. e. a. O., 1885

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> •Über das quadratische Reciprocitätsgesetz •. Diese Sitzungsberichte, 90. Band. — •Über das Symbol  $\left(\frac{m}{n}\right)$  •. A. e. a. O., 92. Band.

<sup>4 »</sup>Drei neue Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste«. Journal für die reine und angewandte Mathematik von L. Fuchs, 112. Band.

Zum Schlusse wird ein von Herrn J. Schröder<sup>1</sup> im vierten Hefte des dritten Bandes der Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg bewiesener arithmetischer Satz durch ein äusserst einfaches Verfahren abgeleitet und vervollständigt.

### 1. Beachtet man, dass

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{2xm}{n} \right] = \sum_{x, y=1}^{x=\frac{n-1}{2}, y=m-1} \varepsilon \left( \frac{2xm}{yn} \right)$$

und demnach gleich der Anzahl der ganzzahligen positiven Werthepaare x, y ist, für welche yn-2xm negativ wird, so kann man die Relation II auch in folgender Gestalt schreiben

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign. } \sqrt{x, y} \left(\frac{y}{m} - \frac{2x}{n}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1\right)$$
III.)

oder auch, falls m, wie in den folgenden Entwicklungen vorausgesetzt wird, ungerade ist

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign.} \left[x, y\right] \left(\frac{2x}{n} - \frac{y}{m}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1\right),$$
IV.)

da in diesem Falle die Anzahl der Factoren des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Productes gerade ist.

Die letzte Gleichung liefert, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, unmittelbar die von Herrn E. Lucas<sup>2</sup> für zwei ungerade Primzahlen und von mir<sup>3</sup> allgemein bewiesene Relation

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> »Einige Sätze über Theileranzahlen, sowie einige Anwendungen der Geometrie auf die Zahlentheorie«.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> »Sur la loi de réciprocité des residus quadratiques«. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série, t. I, 1890.

<sup>8 »</sup>Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol«. Diese Sitzungsberichte, 100. Pand.

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{y = m - 1} \left[\frac{yn}{2m}\right]$$

Schreibt man die Formel IV.) in der Gestalt

so ergibt sich aus derselben nach III.) sofort die Relation

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) \text{ sign. } \overline{\left|x,y\right|} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) \left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right)$$
$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right)$$

durch welche das quadratische Reciprocitätsgesetz ausgesprochen wird.

Berücksichtigt man, dass die eine der zwei Differenzen

$$\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}, \qquad \frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}$$

in das Negative der anderen übergeht, wenn man 2x, 2y-1 durch n-(2x-1), m-2y, beziehungsweise 2x-1, 2y durch n-2x, m-(2y-1) ersetzt, so erkennt man, dass

sign. 
$$\sqrt[k,y]{\left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right)\left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right)} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right)$$

ist, wodurch die Reciprocitätsgleichung in die gewöhnliche Form übergeführt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{xm}{n} + \frac{1}{2} \right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[ \frac{(2x-1)n}{2m} \right] \pmod{2},$$

welche wegen der bekannten Formel

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{xm}{n} + \frac{1}{2} \right] \equiv 0 \pmod{2}$$

zu der von Herrn Busche<sup>1</sup> ohne Beweis mitgetheilten und von den Herren A. Stern<sup>2</sup> und L. Kronecker<sup>3</sup> bewiesenen Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[ \frac{(2x-1)n}{2m} \right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \pmod{2}$$

führt.

Schreibt man in dem auf der rechten Seite des ersten Theiles der Doppelgleichung V.) vorkommenden Ausdrucke  $\frac{2x}{n} - \frac{2y}{m}$  für 2x : n - (2x - 1) und für 2y : m - (2y - 1), so entsteht die Beziehung

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign. } \overline{\left|x,y\right|} \left(\frac{2y-1}{m} - \frac{2x-1}{n}\right) \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right) 
\left(x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right),$$
VI.)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Festschrift, herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig, 1890.

 $<sup>^2</sup>$  »Zur Theorie der Function Ex«. Journal für die reine und angewandte Mathematik von Kronecker, 106. Band.

 $<sup>^3</sup>$  »Bemerkungen über die von Gauss mit [x] bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x«. A. e. a. O.

welche zeigt, dass

sign. 
$$\sqrt{\frac{x}{n}} \left( \frac{x}{n} - \frac{y}{m} \right) \left( \frac{2y-1}{m} - \frac{2x-1}{n} \right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$$

$$\left( x = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; y = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} \right),$$

oder also

$$x = \frac{m-1}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left| \frac{xn}{m} \right| = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{\infty} \left[ \frac{(2x-1)n}{2m} + \frac{1}{2} \right] \pmod{2}$$

ist, welche Relation einen neuerlichen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes enthält.

Wird die Gleichung VI.) in der Gestalt

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sign.}\left[\overline{x}, y\right] \left(\frac{y}{m} - \frac{2x-1}{n}\right) \cdot \operatorname{sign.}\left[\overline{x}, y\right] \left(\frac{2\eta}{m} - \frac{2x-1}{n}\right) \left(\frac{2x}{n} - \frac{2\eta-1}{m}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}; \eta = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}; y = 1, 2, \dots, m-1\right)$$

geschrieben, so ersieht man unmittelbar, dass

ist, welche Relationen auf einem dem oben eingeschlagenen analogen Wege zum Fundamentaltheoreme der Theorie der quadratischen Reste führen würden.

Die letzten Entwicklungen zeigen deutlich den innigen Zusammenhang, welcher zwischen einer Reihe von bekannten Darstellungen des Legendre-Jacobi'schen Symbols besteht.

2. Vereinigt man alle Glieder des auf der rechten Seite der Gleichung I.) stehenden Ausdruckes, in denen der grösste gemeinsame Theiler von x und n gleich  $\delta$  ist, so ist deren Summe offenbar gleich

$$(m, \delta')' = \sum_{\lambda} \left\{ \left[ \frac{2 r_{\lambda} m}{\delta'} \right] - 2 \left[ \frac{r_{\lambda} m}{\delta'} \right] \right\},$$

wo

$$\delta \delta' = n$$

und die Summation nach  $r_{\lambda}$  über alle dem Intervalle  $1 \dots \frac{\delta'}{2}$  angehörigen, zu  $\delta'$  theilerfremden ganzen Zahlen auszudehnen ist. Die Relation I verwandelt sich daher sofort in die folgende von den Herren Schering und Schmidt ermittelte Beziehung

$$(m,n)=\sum_{\lambda}(m,\delta)',$$

in welcher die Summation nach  $\delta$  über alle die Einheit übersteigenden Theiler von n zu erstrecken ist, da x in I.)  $\frac{n}{2}$  nicht überschreiten kann.

Bei ungeradem δ' folgt aus der Gleichung

$$2r_{\lambda}m = \delta'\left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'}\right] + \varepsilon_{\lambda} \qquad (0 \leq \varepsilon_{\lambda} < \delta'),$$

dass für ein gerades  $\left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'}\right]$  die Beziehung

$$\epsilon_{\rm a} = 2r_{\rm u}$$

stattfindet, während bei einem ungeraden  $\left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'}\right]$ 

$$\delta' - \epsilon_{\lambda} = 2 r_{\mu}$$

ist, so dass also allgemein

$$2r_{\lambda}m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'}\right]}2r_{\mu} \pmod{\delta'} \qquad \text{VII.}$$

wird. Da aus der Verbindung dieser mit der Congruenz

$$2r_{\mathfrak{a}}m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_{\mathfrak{a}}m}{\delta'}\right]}2r_{\mathfrak{a}} \qquad (\text{mod. } \delta')$$

sich die absurde Congruenz

$$r_{\lambda} \pm r_{\alpha} \equiv 0 \pmod{\delta'}$$

ergeben würde, so folgt aus VII.) die Beziehung

$$m^{\frac{\varphi(\delta')}{2}} \equiv (-1)^{\frac{\sum_{\lambda} \left[\frac{2r_{\lambda}m}{\delta'}\right]}{\delta'}} \pmod{\delta'}$$

und daher nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze einerseits für ein mindestens zwei Primtheiler besitzendes &

$$\sum_{\lambda} \left[ \frac{2 r_{\lambda} m}{\delta'} \right] \equiv 0 \quad (\text{mod. 2}),$$

anderseits für jeden ganzzahligen positiven Werth von a

$$\sum_{\lambda} \left[ \frac{2 r_{\lambda}' m}{p^{\alpha}} \right] \equiv \sum_{\mu} \left[ \frac{2 r_{\mu} m}{p} \right] \pmod{2},$$

wenn p eine Primzahl ist und die Zahlen  $r'_{\lambda}$ ,  $r_{\mu}$  alle durch p nicht theilbaren ganzen Zahlen des Intervalles  $1 \dots \frac{p^{\alpha}}{2}$ , beziehungsweise  $1 \dots \frac{p}{2}$  durchlaufen.

Es ist demnach die charakteristische Zahl (m, n) nach dem Modul 2 der Anzahl derjenigen Primtheiler von n congruent, welche bei der Darstellung von n durch ein Product von Prim-

zahlpotenzen mit einem ungeraden Exponenten versehen sind und von denen überdies *m* quadratischer Nichtrest ist. Dies ist im Wesentlichen der zweite von den oben erwähnten Schering-Schmidt'schen Sätzen.

3. Herr J. Schröder hat in dem anfänglich citirten Aufsatze folgenden Satz durch Specialisirung aus einem allgemeineren Theoreme gewonnen.

Bezeichnet  $\psi_{r+s}(a,b)$  die Anzahl derjenigen Theiler von a, welche grösser als b sind und einen complementären Divisor der Form vr+s besitzen, ist ferner  $\chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right)$  die Anzahl derjenigen ganzzahligen nicht negativen Werthe von  $\lambda$ , für welche  $\frac{n-\lambda r}{s}$  eine positive ganze Zahl ist, so besteht die Relation

$$\sum_{\rho=0}^{p=\left[\frac{n}{r}\right]} \psi_{\nu r+s}(n-r\rho, \rho) = \chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right).$$

Dieser Satz lässt sich ungemein einfach erhärten. Die Function  $\psi_{rv+s}(n-r\rho, \rho)$  kann nach ihrer Definition auch als die Anzahl derjenigen  $\rho$  überschreitenden ganzen Zahlen t aufgefasst werden, welche die Gleichung

$$n = r(vt + \rho) + ts$$

befriedigen; die auf der linken Seite der Schröder'schen Relation stehende Summe ist demnach die Anzahl derjenigen Zerlegungen von n in die zwei Elemente r und s, bei denen der Coëfficient von s von Null verschieden ist oder also gleich der Gesammtanzahl der Zerlegungen von n-t in die genannten Elemente. Dieselbe ist aber nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Zahlentheorie gleich  $\left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right] + \eta$ , wo  $\eta$  den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem  $n-s-rs\left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right]$  aus den Zahlen r und s additiv erzeugt werden kann, oder nicht. Man hat daher unmittelbar die Gleichung

L. Gegenbauer, Quadratisches Reciprocitätsgesetz.

$$\sum_{r=0}^{\rho=\left[\frac{n}{r}\right]} \psi_{rr+s}(n-r\rho,\rho) = \left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right] + \eta.$$

Die von Herrn Schröder angeführten speciellen Fälle  $s=1,\ r=s=1,\ r=1,$  welche er auch auf geometrischem Wege beweist, und deren zweiter schon vordem von Herrn Lerch ermittelt wurde, ergeben sich unmittelbar aus dieser Formel, da in diesen Fällen offenbar  $\eta=1$  ist.

## Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

von

#### Prof. Emanuel Czuber.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1894.)

Die folgenden Mittheilungen suchen die Anwendung eines neuen Begriffes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, zunächst zwischen drei Variabeln, zu zeigen, der sich aus naturgemässer Fortentwicklung eines Gedankens ergibt, welchen wir in einer früheren Abhandlung für gewöhnliche Differentialgleichungen ausgeführt haben, und geeignet scheint, die Anschaulichkeit der geometrischen Interpretation oben genannter Gleichungen zu fördern. Es handelt sich um Folgendes. Einem von zwei wesentlichen Parametern abhängigen System von Flächen ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zugeordnet; wenn man in dieser die Differential quotienten p, q als Parameter auffasst, so stellt sie wieder ein System von ∞² Flächen dar, welches wir das abgeleitete System des ersten nennen. Der Zusammenhang beider Systeme soll nun in zweifacher Richtung verwerthet werden. Im ersten Abschnitte wird nach allgemeinen Bemerkungen ein Gedankengang skizzirt, welcher zeigt, wie man mit Hilfe jenes Begriffes die vollständigen von Darboux2 gefundenen Bedingungen gewinnen kann, denen die singuläre Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Diese Sitzungsber., Bd. 102, Abth. II. a.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mém. prés. par div. savants à l'Acad. des sciences, t. XXVII. 2me sér.

genügen hat. Der zweite Abschnitt befasst sich mit der Anwendung des Begriffes des abgeleiteten Systems auf die Behandlung gewisser Formen partieller Differentialgleichungen.

Übrigens lassen sich die nachfolgenden Betrachtungen und ihre Resultate unter Benützung des Sprachgebrauches, wie er für den mehrdimensionalen Raum ausgebildet worden ist, ohne Schwierigkeit auf partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen.

I.

### 1. Durch die Gleichung

$$V(x, y, z, a, b) \equiv 0 \tag{1}$$

worin a, b unabhängige veränderliche Parameter bedeuten, sind  $\infty^4$  Elemente<sup>1</sup> des Raumes  $R_3$  bestimmt, deren Coordinaten x, y, z, p, q der Gleichung genügen, welche aus (1) und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}q = 0$$

mittelst Elimination von a, b erhalten wird und heissen möge

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$
 (2)

Die beiden Darstellungen, welche diesen  $\infty^4$  Elementen durch die Gleichung (1) einerseits und die Gleichung (2) anderseits gegeben sind, unterscheiden sich wesentlich von einander, und zwar in folgender Weise.

In (1) sind je  $\infty^2$  Träger<sup>2</sup> x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthepaar a, b charakterisirt ist, derart zusammengefasst, dass die zugehörigen Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. dass jede zwei benachbarte Elemente vereinigt liegen, oder der Pfaff'schen Gleichung

$$dz - pdx - qdy = 0 (3)$$

genügen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Für diesen und andere im Folgenden angewandte Begriffe vergl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. II, Kap. 4.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Wir bezeichnen den Punkt x, y, z als den Träger, p, q als die Stellungscoëfficienten des Elementes x, y, z, p, q.

In (2) sind je  $\infty^2$  Träger x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthepaar p, q charakterisirt ist, derart verbunden, dass die zugehörigen Elemente parallel liegen.

Der Übergang von der ersten Anordnung zur zweiten erfordert analytisch Differentiations- und Eliminationsprocesse; geometrisch wird, wenn die Anordnung (1) gegeben ist, ein Individuum des Flächensystems (2) erhalten, indem man an die Flächen des Systems (1) alle möglichen Tangentialebenen einer bestimmten Stellung p, q legt; ihre Berührungspunkte haben als Ort eine einzelne Fläche von (2).

Der Übergang von der zweiten als gegeben vorausgesetzten Anordnung zur ersten wird als Integration der Differentialgleichung (2), die Gleichung (1) im Sinne von Lagrange als ein vollständiges Integral von (2) bezeichnet; allgemein gefasst, geht das Problem der Integration dahin, aus der durch die Gleichung (2) gegebenen Schaar von  $\infty^4$  Elementen alle Elementmannigfaltigkeiten zweifach unendlicher Ausdehnung zu finden; der Ort der Träger einer solchen Mannigfaltigkeit wird eine Integralfläche genannt.

In den folgenden Betrachtungen wollen wir den Zusammenhang der beiden Flächensysteme (1) und (2) kurz dadurch ausdrücken, dass wir das System (1) als das ursprüngliche, (2) als das abgeleitete bezeichnen.

Um ein einfaches Beispiel anzuführen, sei das ursprüngliche System jene Schaar von Kugeln, welche über den zur z-Axe parallelen Sehnen einer gegebenen Kugel vom Radius r und dem Mittelpunkte O als Durchmessern beschrieben werden; ihre Gleichung ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2-a^2-b^2;$$

eliminirt man zwischen dieser und den beiden Gleichungen

$$x-a+pz = 0$$
$$y-b+qz = 0$$

die Parameter a, b, so erhält man als Gleichung des abgeleiteten Systems

$$x^{2}+y^{2}+(1+2p^{2}+2q^{2})z^{2}+2pxz+2qyz=r^{2};$$

es ist dies ein System von concentrischen Ellipsoiden, welche den Kreis z = 0,  $x^2 + y^2 = r^2$  gemein haben.

2. Durch einen Punkt x, y, z von  $R_3$  gehen  $\infty^1$  Flächen des Systems (1), ihre Tangentialebenen in dem gedachten Punkte hüllen einen Kegel (T) ein und bestimmen mit dem Punkte zusammen jene  $\infty^1$  Elemente, welche ihn zum gemeinsamen Träger haben.

Durch denselben Punkt gehen aber auch  $\infty^1$  Flächen des Systems (2) und die eben erwähnten Tangentialebenen vermitteln eine im Allgemeinen eindeutige Zuordnung der Flächen aus (1) und (2).

Einer Ebene E, deren Stellungscoëfficienten p, q sein mögen, entspricht eine bestimmte Fläche aus dem System (2); der Schnitt beider ist eine Curve (C), der Ort der Träger aller Elemente, deren gemeinsame Ebene E ist, mit anderen Worten gesagt, der Ort der Berührungspunkte aller die Ebene E tangirenden Integralflächen der Differentialgleichung (2).

Man kann diesen Zusammenhang auch in folgender Weise ausdrücken. Jeder Fläche des Systems (2) ist eine Stellung p,q im Raume  $R_3$  zugeordnet, und jede Ebene dieser Stellung schneidet die Fläche im Allgemeinen nach einer Curve (C), dem Ort der Berührungspunkte aller die Ebene tangirenden Integralflächen. Geschieht es, dass die Ebene die ihr zugeordnete Fläche berührt, so reducirt sich die Curve (C) auf einen Punkt; wir werden später gerade auf diesen Fall zurückzuweisen haben.

### 3. Existirt eine Fläche

$$\Sigma(x, y, z) \equiv 0 \tag{4}$$

von solcher Art, dass durch jeden ihrer Punkte eine Fläche des Systems (1) geht, welche mit ihr daselbst gemeinsame Tangentialebene hat, so soll die Fläche  $\Sigma$  als Einhüllende des Systems (1) definirt werden.

Man kann (4) aus (1) hervorgehen lassen, indem man hier für a, b passend gewählte Functionen von x, y, z einträgt; welchen Bedingungen diese zu genügen haben, ergibt sich aus der eben aufgestellten Definition von  $\Sigma$ . Ist nämlich x, y, z ein Punkt von  $\Sigma$ , und V(a, b) = 0 die durch ihn gehende Fläche

des Systems (1) von der in der Definition bezeichneten Art, so muss ihre Tangentialebene

$$(\xi - x)\frac{\partial V}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial V}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

zusammenfallen mit der Tangentialebene an  $\Sigma$ , deren Gleichung lautet

$$(\xi - x) \left[ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} \right] + (\eta - y) \left[ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} \right] +$$

$$+ (\zeta - z) \left[ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} \right] = 0;$$

dazu ist nothwendig, dass

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \tag{5}$$

und diese Bedingungen müssen für alle Punkte von  $\Sigma$  erfüllt sein; durch sie werden also a, b als Functionen von x, y, z derart bestimmt, dass sie (1) in (4) verwandeln.

4. Wir beweisen nun den Satz: Besitzt das ursprüngliche System (1) eine Einhüllende, so ist dieselbe zugleich Einhüllende des abgeleiteten Systems (2).

Es sei  $\Sigma$  die Einhüllende von (1); man wähle auf ihr drei unendlich benachbarte Punkte M(x, y, z),  $M_1(x+d_1x, ...)$ ,  $M_2(x+d_2x,...)$ , jedoch so, dass

$$\left| \begin{array}{cc} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{array} \right| \leq 0;$$

dann bestimmen diese Punkte eine Ebene, die Tangentialebene an  $\Sigma$  in den genannten Punkten, zugleich Tangentialebene an diejenigen Flächen des Systems (1), welche  $\Sigma$  in den Punkten  $M, M_1, M_2$  berühren; nennt man p, q die Stellungscoëfficienten dieser Ebene, so sind  $M, M_1, M_2$  zugleich drei unendlich benachbarte Punkte der durch p, q charakterisirten Fläche des Systems (2), folglich hat auch diese Fläche an der betrachteten Stelle mit  $\Sigma$  eine gemeinsame Tangentialebene und daher ist  $\Sigma$  auch Einhüllende des Systems (2).

In dem Beispiele am Schlusse des Art. 1 war das ursprüngliche System eine Schaar von  $\infty^2$  Kugeln, das abgeleitete eine Schaar von  $\infty^2$  concentrischen Ellipsoiden; beide Systeme werden durch das Rotationsellipsoid

$$x^2+y^2+2z^2=2r^2$$

eingehüllt.

5. Dem Satze in Art. 4 steht der folgende gegenüber: Hat das abgeleitete System (2) eine Einhüllende, so ist diese im Allgemeinen nicht zugleich Einhüllende des ursprünglichen Systems (1).

Es sei  $\Sigma'$  die Einhüllende des Systems (2); man wähle auf ihr einen Punkt M(x, y, z) und bestimme die Tangentialebene, deren Stellungscoëfficienten mit P, Q bezeichnet seien. Durch den Punkt M gehen  $\infty^1$  Flächen des Systems (1) und die Stellungscoëfficienten ihrer Tangentialebenen daselbst erfüllen die Gleichung (2); von P, Q wird diese Gleichung im Allgemeinen nicht erfüllt, daher hat keine der Flächen aus (1) mit  $\Sigma'$  eine gemeinschaftliche Tangentialebene, infolge dessen ist  $\Sigma'$  nicht auch Einhüllende des Systems (1).

Nur wenn die Function F gewissen Bedingungen, die nun entwickelt werden sollen, genügt, ist der Satz 4 auch in seiner Umkehrung richtig. Die Gleichung von  $\Sigma'$  geht dem Art. 3 zufolge aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

hervor, wenn man p, q durch jene Ausdrücke in x, y, z ersetzt, welche sich dafür aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$
 (6)

ergeben; nachdem dies geschehen, erhält man für P, Q die Werthe

$$P = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad Q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

nur wenn diese die Gleichung (2) befriedigen, ist  $\Sigma'$  auch Einhüllende des Systems (1); mit anderen Worten, die aus (6)

für p, q hervorgehenden Bestimmungen müssen mit P, Q zusammenfallen, oder es muss

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

sein.

Man kann das Ergebniss in dem Satze aussprechen: Soll das abgeleitete System eine Einhüllende haben und soll diese auch das ursprüngliche System einhüllen, so muss F eine solche Function der fünf Variabeln x, y, z, p, q sein, dass es Werthe dieser Variabeln gibt, welche den Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$
(8)

zugleich genügen; diese Werthe bestimmen die Elementmannigfaltigkeit, welche die gemeinsame Einhüllende darstellt.

Damit sind die vollständigen Bedingungen für die Existenz einer singulären Lösung der Differentialgleichung (2) gefunden.

6. Aus dem Satze zu Beginn des vorigen Artikels, dass nämlich die Einhüllende des abgeleiten Systems, wenn eine solche existirt, im Allgemeinen nicht auch Einhüllende des ursprünglichen Systems ist, folgt, dass eine vorgelegte Differentialgleichung im Allgemeinen ein singuläres Integral nicht besitzt. Darboux hat hiefür einen analytischen Beweis gegeben, indem er zeigt, dass die Gleichungen (8), obwohl sie nicht unabhängig von einander sind, da sie sich aus Differentialquotienten einer und derselben Function zusammensetzen, doch im Allgemeinen nicht zugleich bestehen können. Hat nämlich die Differentialgleichung statt der auf Null reducirten die Form

$$F(x, y, z, p, q) = c, \tag{9}$$

wobei c zunächst eine Constante bedeutet, und bestimmt man aus ihr und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{10}$$

z, p, q als Functionen von x, y und c, so müssen durch diese Ausdrücke, wenn die Gleichung (9) ein singuläres Integral haben soll, die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

identisch erfüllt werden. Denkt man sich jetzt unter c eine beliebige Function von x, y, z, so erfahren die Gleichungen (10) keine Änderung und die Ausdrücke für z, p, q, die aus (9) und (10) jetzt gezogen werden, bleiben ebenso zusammengesetzt aus x, y, c wie vordem; dagegen wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y} + q \frac{\partial c}{\partial z}$$

und es müssten also die Gleichungen

$$\frac{\partial c}{\partial x} + p \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} + q \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt sein, wie man auch c als Function von x, y, z festsetzen möge. Aus der Ungereimtheit dieses Ergebnisses ist zu schliessen, dass (9), (10) und (11) im Allgemeinen nicht nebeneinander bestehen können.

7. Wir geben nachstehend noch eine zweite neue Ableitung der Bedingungsgleichungen (8), welche von einem anderen Gesichtspunkte ausgeht.

So lange man unter p, q die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  versteht, stellt die Gleichung (2) dasselbe System von  $\infty^4$  Elementen dar, wie die Gleichung (1), aus welcher sie in der in Art. 1 beschriebenen Weise hervorgegangen ist. Betrachtet man dagegen p, q als veränderliche Parameter, so ist durch die Gleichung (2) ein anderes System von  $\infty^4$  Elementen bestimmt, und die Coordinaten x, y, z, p, qjedes dieser Elemente erfüllen die Gleichung, welche man erhält durch Elimination von p, q zwischen

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathfrak{p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathfrak{q} = 0.$$
 (12)

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob es zwischen den beiden Elementensystemen, welche die Gleichung (2) in dieser zweifachen Auffassung darstellt, gemeinsame Elemente gibt. Da für solche Elemente  $\mathfrak{p}=p$  und  $\mathfrak{q}=q$  sein muss, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0.$$
(13)

Weil sich hieraus z, p, q als Functionen der unabhängig verbleibenden Variabeln x, y ergeben, so gibt es der gemeinsamen Elemente  $\infty^2$ , der Ort ihrer Träger x, y, z ist eine Fläche, deren Gleichung durch Elimination von p, q zwischen den drei Gleichungen (13) erhalten wird.

Diese Fläche ist aber eine Integralfläche der Differentialgleichung (2) nur dann, wenn die durch (13) repräsentirten Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. wenn sie die genannte Fläche berühren. Nun kann diese Fläche durch die erste der Gleichungen (13) dargestellt werden, wenn man darin p, q durch die Ausdrücke in x, y, z ersetzt sich denkt, welche die beiden letzten Gleichungen liefern; die Stellungscoëfficienten  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  ihrer Tangentialebene im Punkte x, y, zergeben sich unter diesem Gesichtspunkte aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} \right\} \mathfrak{B} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} \right\} \mathfrak{Q} = 0;$$

die hieraus gerechneten  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  sollen mit den für den nämlichen Punkt x, y, z aus (13) resultirenden Werthen p, q übereinstimmen, also  $\mathfrak{P} = p$ ,  $\mathfrak{Q} = q$  sein; führt man dies ein, so reduciren sich die letzten Gleichungen vermöge (13) auf

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} p \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left( \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left( \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} q \right) = 0$$

und diese werden identisch erfüllt nur dann, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \tag{14}$$

Die gemeinsamen Elemente der beiden durch die Gleichung (2) in ihrer doppelten Auffassung dargestellten Systeme von ∞ Elementen, durch die Gleichungen (13) bestimmt, bilden nur dann eine Elementmannigfaltigkeit, wenn sie auch den Gleichungen (14) genügen. Diese Gleichungen besagen aber nichts anderes, als dass die Träger dieser Elemente auf der Einhüllenden des abgeleiteten Systems liegen müssen.

Man hätte zu den gemeinsamen Elementen der beiden Systeme auch durch folgende Betrachtung gelangen können. Zu der Fläche

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

des abgeleiteten Systems gehört eine Schaar paralleler Ebenen

$$px+qy-z=M$$
,

deren jede die ihr zugeordnete Curve (C) auf dieser Fläche hat. Die Curve reducirt sich auf einen Punkt, wenn Ebene und Fläche einander berühren, und augenscheinlich stellt eine solche Ebene mit ihrem Berührungspunkte ein beiden Systemen gemeinsames Element dar; dies tritt nun ein, wenn die Stellungscoöfficienten der Tangentialebene an die Fläche, d. i.

$$-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial z},\qquad -\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}$$

mit den Stellungscoëfficienten der Ebenenschaar übereinstimmen, wenn also

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q = 0$$

in Übereinstimmung mit (13).

II.

8. Wir eröffnen die Reihe der besonderen Formen von Differentialgleichungen, an welchen der eben entwickelte Gedankengang zur Anwendung gebracht werden soll, mit der Gleichung

$$F(p,q) = 0. (15)$$

In dem vorliegenden Falle existirt ein abgeleitetes Flächensystem nicht; durch jeden Punkt von  $R_3$  gehen  $\infty^1$  Ebenen, deren Stellungscoëfficienten die Gleichung (15) befriedigen und jeder Punkt einer solchen Ebene in Verbindung mit ihr selbst bildet ein Element der Gleichung; letztere definirt also wie die allgemeine Gleichung (2)  $\infty^4$  Elemente, nämlich  $\infty^1$  Stellungen, zu jeder  $\infty^1$  Ebenen, in jeder Ebene  $\infty^2$  Elemente. Die Kegel (T), zu den einzelnen Punkten von  $R_3$  gehörig, sind gleich und gleichliegend. Aus alledem folgt, dass das durch (15) bestimmte Elementensystem allen Translationen von  $R_3$  gegenüber invariant bleibt; wenn daher V(x, y, z) = 0 irgend ein Integral dieser Gleichung ist, so ist auch

$$V(x-a, y-b, z-c) \equiv 0$$
 (16)

ein solches, wobei a, b, c willkürliche Constanten bedeuten. Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die vorliegende Gleichung ein singuläres Integral nicht besitzt, denn die Gruppe der Translationen des Raumes hat keine Invariante.

Man kann das System der Elemente construiren, indem man den Kegel der Strahlen

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{-1}$$

bestimmt - seine Gleichung ist

$$F\left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right) = 0$$

— und zu jeder seiner Erzeugenden das System normaler Ebenen legt. Ist die Gleichung (15) insbesondere linear, also

$$Ap + Bq = C, (17)$$

so geht jener Kegel in die Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

über und das System der Elemente ist durch alle zu ihr normalen Ebenen bestimmt.

Wählt man aus der Schaar von ∞² Ebenen, welche solcher Art durch (15), respective (17) dargestellt sind, nach irgend einem der Stetigkeit unterliegenden Gesetze ∞¹ Ebenen aus, so hüllen sie eine developpable Fläche ein, im Falle (17) insbesondere eine Cylinderfläche; diese Fläche ist eine Integral-fläche nach dem üblichen Sprachgebrauche, aber mit der besonderen Massgabe, dass jede Tangentialebene mit jedem in ihr enthaltenen Punkte zusammen ein Element der Gleichung bildet.

9. Geometrisch gleichwerthig sind die drei Formen

$$F(x, p, q) = 0 \tag{18a}$$

$$F(y, p, q) = 0 \tag{18b}$$

$$F(z, p, q) = 0 \tag{18 c}$$

Das durch die erste dargestellte abgeleitete System besteht in einer Schaar zur yz-Ebene paralleler Ebenen. Die zu den Punkten einer solchen gehörigen Kegel (T) sind gleich und gleichliegend, weil durch die nämliche Gleichung  $(18\,a)$ , in welcher x constant zu denken ist, charakterisirt. Infolge dessen ist das durch diese Gleichung bestimmte System von  $\infty^4$  Elementen allen Translationen parallel zur yz-Ebene gegenüber invariant, so dass, wenn V(x,y,z)=0 irgend ein Integral der Gleichung ist, auch die mit den willkürlichen Constanten b,c gebildete Gleichung

$$V(x, y-b, z-c) = 0$$
 (19a)

ein Integral vorstellt. Daraus schliesst man weiter, dass, sofern die Gleichung ein singuläres Integral besitzt, dieses nur in

einer oder mehreren zur yz-Ebene parallelen Ebenen bestehen kann.

Jede Ebene, deren Stellungscoëfficienten p, q sind, enthält  $\infty^1$  Elemente, ihre Träger haben ein und dasselbe x, der Gleichung (18a) entnommen, liegen daher in einer Geraden parallel zur yz-Ebene. Man kann sich nun eine stetige Folge von  $\infty^1$  Ebenen ausgewählt denken, welche einer Geraden in der yz-Ebene parallel sind und die eingehüllte Cylinderfläche gerade längs der ihnen durch die Gleichung (18a) zugeordneten Geraden berühren; dann ist diese Cylinderfläche eine Integralfläche. Die allgemeine Form der Gleichung einer zur yz-Ebene parallelen Cylinderfläche ist

$$x = \varphi(y + Cz)$$

und setzt man vorübergehend y + Cz = u, so folgt daraus

$$1 = C \frac{dx}{du} p, \qquad 0 = \frac{dx}{du} (1 + Cq)$$

und weiter

$$p = \frac{1}{C\frac{dx}{du}}, \qquad q = -\frac{1}{C};$$

dies führt (18 a) über in

$$F\left(x, \frac{1}{C\frac{dx}{du}}, -\frac{1}{C}\right) = 0, \tag{20a}$$

d. i. in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung; ist V(x, u, B) = 0 ihr Integral, so ist V(x, y + Cz, B) = 0 und somit auch

$$V(x, y-b+C(z-c), B) = 0$$
 (21a)

ein Integral von (18a); B, C sind ebenso wie b, c willkürliche Constanten.

Ganz ähnliche Erwägungen gelten für die Gleichungen (18b) und (18c). Setzt man, um ein Integral der ersten zu erhalten.

$$y = \psi(z + Ax) \qquad z + Ax = v,$$

so folgt daraus

$$0 = \frac{dy}{dv}(p+A), \qquad 1 = \frac{dy}{dv}q$$

und es tritt an die Stelle von (18b) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F\left(y, -A, \frac{1}{\frac{dy}{dv}}\right) = 0; \tag{20b}$$

ist V(y, v, C) = 0 ihr Integral, so ist V(y, z+Ax, C) = 0 und auch

$$V(y, z-c+A(x-a), C) = 0$$
 (21b)

ein Integral von (18b).

Um (18c) zu integriren, setze man

$$z = \chi(x + By), \qquad x + By = w,$$

woraus

$$p = \frac{dz}{dw}, \qquad q = B \frac{dz}{dw};$$

hat man dann das Integral von

$$F\left(z, \frac{dz}{dw}, B\frac{dz}{dw}\right) = 0$$
(20c)

in der Form V(x, w, A) = 0 erhalten, so ist V(z, x + By, A) = 0 und auch

$$V(z, x-a+B(y-b), A) = 0$$
 (21c)

ein Integral von (18c).

10. Die im vorigen Artikel behandelten drei Formen sind im Grunde genommen specielle Fälle der Gleichung

$$F(z-\alpha x-\beta y, p, q) = 0.$$
 (22)

Das durch sie bestimmte abgeleitete System bildet nämlich eine Schaar zu  $z = \alpha x + \beta y$  paralleler Ebenen und lässt alle Translationen parallel zu dieser Ebene zu. Ist also V(x, y, z) = 0 ein Integral dieser Gleichung, so ist auch

$$V(x-a, y-b, z-a\alpha-b\beta) \equiv 0$$
 (23)

ein Integral, wenn a, b willkürliche Constanten bedeuten.

Man kann die vorliegende Gleichung auf eine der speciellen Formen, nämlich (18c), zurückführen durch die Substitution

$$x = X$$
,  $y = Y$ ,  $z - \alpha x - \beta y = Z$ ;

bezeichnet man die Ableitungen von Z nach X, Y, respective mit P, Q, so hat man

$$p = P + \alpha$$
,  $q = Q + \beta$ 

und es geht (22) über in

$$F(Z, P+\alpha, Q+\beta) = 0; (24)$$

nach dem oben entwickelten Vorgange kann nun ein Integral dieser Gleichung ermittelt werden.

Die Gleichung

$$z = \alpha x + \beta y + pq \tag{22*}$$

beispielsweise, welche unter diese Form fällt, verwandelt sich zunächst in

$$Z = (P + \alpha)(Q + \beta);$$

mit X+BY=W führt dies zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$Z = \left(\frac{dZ}{dW} + \alpha\right) \left(B\frac{dZ}{dW} + \beta\right) \tag{24*}$$

und nach Trennung der Variabeln zu

$$dW = \frac{2 BdZ}{-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4 BZ}};$$

Integration gibt

$$W+A = \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4BZ} + + (\alpha B - \beta)l \cdot \left[ -(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4BZ} \right],$$

demnach ist

$$x+By+A = \sqrt{(\alpha B-\beta)^2+4B(z-\alpha x-\beta y)} + + (\alpha B+\beta)l \cdot \left[ -(\alpha B+\beta)+\sqrt{(\alpha B-\beta)^2+4B(z-\alpha x-\beta y)} \right]$$

ein Integral der Gleichung (22\*) und man erkennt leicht, dass es im Wesen unverändert bleibt, wenn man x, y, z der Reihe nach durch x-a, y-b,  $z-ax-b\beta$  ersetzt.

11. Eine weitere Gruppe von Differentialgleichungen, welche geometrisch gleiche Interpretation zulassen, bilden die Formen

$$F(y, z, p, q) = 0 \tag{25a}$$

$$F(z, x, p, q) = 0 \tag{25b}$$

$$F(x, y, p, q) = 0 (25c)$$

Das abgeleitete System, welches die erste bestimmt, ist eine Schaar zur x-Axe paralleler Cylinder, in allen Punkten jeder Erzeugenden eines solchen Cylinders sind die zugehörigen Kegel (T) gleich und gleichliegend; daraus folgt, dass das durch die Gleichung bestimmte Elementensystem die Translationen parallel zur x-Axe zulässt, so dass, wenn V(x,y,z) = 0 irgend ein Integral dieser Gleichung ist, auch

$$V(x-a, y, z) \equiv 0 \tag{26 a}$$

ein Integral vorstellt, wenn a eine willkürliche Constante bedeutet. Ist ein singuläres Integral vorhanden, so kann es nur einer zur x-Axe parallelen Cylinderfläche entsprechen.

Ähnliche Bemerkungen gelten bezüglich der beiden anderen Gleichungen und man kann jedem ihrer Integrale die Form

$$V(x, y-b, z) = 0 \tag{26b}$$

beziehungsweise

$$V(x, y, z-c) = 0 \tag{26c}$$

ertheilen.

12. Die obigen drei Gleichungen sind wieder specielle Fälle einer allgemeinen Differentialgleichung, nämlich

$$F(z-\alpha x, z-\beta y, p, q) = 0, \qquad (27)$$

deren Elementensystem invariant bleibt bei den Translationen parallel zur Geraden

$$\alpha x = \beta y = z; \tag{28}$$

wenn daher V(x, y, z) = 0 ein Integral dieser Gleichung ist, so kann ihm mittelst der willkürlichen Constanten a die Form

$$V\left(x-\frac{a}{\alpha},\ y-\frac{a}{\beta},\ z-a\right)=0\tag{29}$$

verliehen werden.

Man kann die Gleichung (27) durch Einführung neuer Variabeln auf den Fall (25 c) zurückführen; als neue unabhängige Veränderliche wähle man

$$X = z - \alpha x, \qquad Y = z - \beta y,$$

als neue abhängige Variable eine dem Abstande des Punktes x, y, z von der zu (28) normalen Ebene  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + z = 0$  proportionale Grösse, setze also

$$Z = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + z;$$

die Auflösung dieser drei Gleichungen nach den ursprünglichen Variabeln gibt

$$x = \frac{-\frac{X}{\alpha^{2}} + \frac{Y}{\beta^{2}} + Z}{\alpha(\frac{1}{\alpha^{2}} + \frac{1}{\beta^{2}} + 1)}, \qquad y = \frac{\frac{X}{\alpha^{2}} - \frac{Y}{\beta^{2}} + Z}{\beta(\frac{1}{\alpha^{2}} + \frac{1}{\beta^{2}} + 1)},$$
$$z = \frac{\frac{X}{\alpha^{2}} + \frac{Y}{\beta^{2}} + Z}{\frac{1}{\alpha^{2}} + \frac{1}{\beta^{2}} + 1};$$

führt man auf dieser Grundlage die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial X} = p \frac{\partial x}{\partial X} + q \frac{\partial y}{\partial X},$$
$$\frac{\partial z}{\partial Y} = p \frac{\partial x}{\partial Y} + q \frac{\partial y}{\partial Y}$$

aus und bezeichnet mit P, Q die partiellen Differentialquotienten von Z nach X, Y, so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$p = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{P+Q}, \qquad q = \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}$$

und somit heisst die Gleichung (27) in den neuen Variabeln

$$F\left(X, Y, \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{Q+P}, \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}\right) = 0$$
 (27\*)

und dies ist conform mit (25c).

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\frac{(z-\alpha x)^{\mu}}{(z-\beta y)^{\nu}}=\frac{p}{q};$$

durch Anwendung der entwickelten Substitution geht sie über in

$$\frac{X^{\mu}}{Y^{\nu}} = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{\alpha(1+\beta^2)Q}$$

oder

$$\frac{\alpha X^{\mu}}{1+\alpha^2 P} = \frac{\beta Y^{\nu}}{1+\beta^2 Q};$$

bezeichnet man den willkürlichen gemeinsamen Werth dieser Verhältnisse mit A, so ergibt sich

$$P = \frac{X^{\mu}}{\alpha A} - \frac{1}{\alpha^2}, \qquad Q = \frac{Y^{\nu}}{\beta A} - \frac{1}{\beta^2}$$

und durch Integration der Gleichung dZ = PdX + QdY, wenn man gleich wieder die ursprünglichen Variabeln einführt, zunächst

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{y}{\beta} + z = \frac{(z-\alpha x)^{\mu+1}}{\alpha(\mu+1)A} + \frac{(z-\beta y)^{\nu+1}}{\beta(\nu+1)A} - \frac{z-\alpha x}{\alpha^2} - \frac{z-\beta y}{\beta^2} + B,$$

nach Ausführung aller Reductionen, und wenn man schliesslich für die willkürlichen Constanten A, B neue  $C_1$ ,  $C_2$  einführt mittelst der Gleichungen

$$A\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+1\right)=C_1, \qquad AB=-C_2,$$

so ergibt sich als Integral die Gleichung

$$C_1 z + C_2 = \frac{(z - \alpha x)^{\mu + 1}}{\alpha(\mu + 1)} + \frac{(z - \beta y)^{\nu + 1}}{\beta(\nu + 1)},$$

an der man ohneweiters erkennt, dass sie im Wesen ungeändert bleibt bei der durch (29) angedeuteten Transformation.

- 13. Die bisher behandelten Gleichungsformen bieten die einfachsten Beispiele solcher Differentialgleichungen dar, in deren Integralen überschüssige Constanten auftreten können. Vollständige Integrale der Gleichungen (15), dann (18) und (22), endlich (25) und (27), in den Formen (16), beziehungsweise (19) und (23), schliesslich (26) und (29) geschrieben, enthalten der Reihe nach fünf, vier, drei willkürliche Constanten. Trotzdem aber umfasst ein solches Integral nur dieselben ∞4 Elemente, welche durch die betreffende Differentialgleichung definirt sind, diese aber in mehrfacher Zählung. Es gibt sich dieser Umstand dadurch zu erkennen, dass die Constanten, welche man wegen der Verschiebbarkeit des Elementensystems (nach ∞<sup>2</sup>, ∞<sup>1</sup>, respective ∞<sup>0</sup> Richtungen) im Integral anbringen kann, schliesslich doch nur eine Abänderung an den eigentlichen Integrationsconstanten herbeiführen, also strenge genommen keine wirkliche Verallgemeinerung des Integrals bewirken.
- 14. Schliesslich möge noch die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung

$$z = px + qy + f(p, q) \tag{30}$$

von den hier entwickelten Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Das abgeleitete System, welches sie darstellt, ist eine Schaar von  $\infty^2$  Ebenen; jede Ebene dieser Schaar stellt in Verbindung mit jedem ihrer Punkte ein Element der Gleichung dar, ist daher eine Integralfläche; infolge dessen bedeutet die Gleichung (30), wenn man in ihr p, q als willkürliche Constanten auffasst, ein vollständiges Integral eben dieser Gleichung,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 475 f. — Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 23.

wenn man sie als Differentialgleichung deutet; es ist also das zu (30) gehörige ursprüngliche Flächensystem durch

$$z = ax + by + f(a, b) \tag{31}$$

darstellbar.

Auch die folgende Schlussweise kann bei der Gleichung angewendet werden. Bringt man, unter p, q bestimmte Werthe sich denkend, die durch (30) dargestellte Fläche des abgeleiteten Systems mit irgend einer Ebene derselben Stellung, z. B.

$$z = px + qy + C \tag{32}$$

zum Schnitt, so erhält man eine unendlich ferne Gerade, die gemeinsame Stellung von (30) und (32); diese Gerade ist die zur Ebene (32) gehörige Curve (C); im Allgemeinen wird also eine Ebene nur in den Punkten ihrer unendlich fernen Geraden von Integralflächen berührt. Nur wenn C = f(p, q), fallen die Ebenen (30) und (32) in eine zusammen und jeder Punkt dieser Ebene wird Berührungspunkt einer sie tangirenden Integralfläche, infolge dessen ist die Ebene selbst auch eine Integralfläche; die Curve (C) ist in diesem Falle unbestimmt insoferne, als jede in der Ebene gezogene Linie als solche angesehen werden kann.

Wenn man, den in Art. 7 entwickelten Vorgang befolgend, die dort mit (13), (14) bezifferten Gleichungen bildet, so lauten sie wie folgt:

$$z = px + qy + f(p, q),$$

$$p - p = 0, q - q = 0,$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0;$$

der Umstand, dass die Gleichungen der zweiten Zeile identisch, d. h. durch alle Werthe von x, y, z, p, q erfüllt sind, bedeutet, dass alle Elemente des abgeleiteten Systems zugleich Elemente des ursprünglichen Systems sind; eliminirt man also p, q zwischen den übrig bleibenden drei Gleichungen, so erhält man eine Integralfläche, das singuläre Integral als Einhüllende des abgeleiteten und zugleich des ursprünglichen Systems.

Die Clairaut'sche Gleichung ist der analytische Ansatz für ein Problem, das eine Fläche zu bestimmen verlangt aus einer Eigenschaft ihrer Tangentialebene, die von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig und daher von allen ihren Punkten gleichmässig erfüllt ist. Bringt man nämlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der unbekannten Fläche

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

auf die Form

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \tag{33}$$

so nimmt man wahr, dass der Abschnitt dieser Ebene auf der z-Axe, nämlich z—px—qy, im Allgemeinen abhängig ist von x, y, z, p, q, also von der Stellung der Ebene und der Lage des Berührungspunktes; soll er nur von der Stellung abhängig sein, so muss er sich auf eine Function von p, q allein, z. B. f(p, q) reduciren, so dass

$$z - px - qy = f(p, q) \tag{34}$$

wird. In der That erkennt man, nachdem dies in (33) eingetragen worden, dass jeder Punkt der Ebene (33) in (34) an Stelle von x, y, z gesetzt werden kann. Die Gleichung (34), welche ein derartiges Problem charakterisirt, ist aber die oben als Clairaut'sche bezeichnete.

Verlangt man beispielsweise eine Fläche zu finden derart, dass der aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte der Tangentialebene gezogene Strahl mit dieser einen gegebenen Winkel arc sin k bildet, so wird diese Forderung ausgedrückt sein durch

$$\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}:\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k$$

und hieraus ergibt sich als Abschnitt der Tangentialebene auf der z-Axe

$$z-px-qy = k\sqrt{(1+p^2+q^2)(x^2+y^2+z^2)}$$

ein Ausdruck, der von p, q und x, y, z abhängt.

Wird dagegen nach einer Fläche gefragt, deren Tangentialebenen einen gegebenen Abstand r vom Ursprunge haben, so drückt sich diese Forderung in der Gleichung

$$\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=r$$

aus und der Abschnitt der Tangentialebene auf der z-Axe

$$z-px-qy=r\sqrt{1+p^2+q^2}$$

ist von p, q allein abhängig.

### Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission

von

### G. Jaumann.

(Mit 3 Textfiguren.)

Im Folgenden wird der Nachweis erbracht 1., dass die emittirenden Schwingungen der leuchtenden Körper eine nachweisbare und messbare Dämpfung aufweisen und 2., dass sie nicht durch zufällige Impulse, sondern durch den continuirlichen Einfluss eines periodischen Vorganges excitirt werden.

### 1. Dämpfung der Emission und continuirliche Spectren.

Man betrachtet gegenwärtig ein continuirliches Spectrum wie den Grenzfall eines Linienspectrums, in welchem die Zahl der Linien unendlich gross ist. Nach Newton sind unendlich viele verschiedene Farben im weissen Licht vorhanden. Thatsächlich kann man aus diesen Farben wieder weisses Licht zusammensetzen.

Es ist nun unwahrscheinlich, dass es die beste Art ist, den Emissionsvorgang darzustellen, wenn man angibt, der weissglühende Körper sende unendlich viele Schwingungen aus. Man dürfte desshalb zu einer so complicirten Darstellung gekommen sein, weil es der Natur dieses Vorganges überhaupt nicht angemessen ist, das emittirte Licht als eine Summe von periodischen Schwingungen darzustellen. Um hingegen den Dispersionsvorgang zu verstehen, ist Newton's Darstellung die beste.

Die verschiedenen Farben eines Spectrums werden für incohärent gehalten. Dies ist ein Umstand, welcher schwerlich jemals direct bewiesen werden kann. Wohl aber kann das

Gegentheil, falls es zutrifft, indirect bewiesen werden. Wenn die Farben eines continuirlichen Spectrums cohärent sind, so lassen sie sich zusammensetzen. Das Ergebniss dieser Integration kann die untersuchte Lichtwelle als eine einfache, wenn auch nicht periodische Function darstellen. Wäre nun die Emission der so resultirenden unperiodischen Welle an sich aus anderen Gesichtspunkten verständlich, so könnte man hoffen, damit zu einem Aufschluss über die Natur der Emission gekommen zu sein und wird dann auch die Voraussetzung zugeben, dass die verschiedenen Farben des betrachteten continuirlichen Spectrums cohärent sind.

Die Intensität der Farben eines continuirlichen Spectrums ist eine Function der Schwingungsperiode u. Bezeichne da die Amplitude einer solchen Schwingung, d. h. die Wurzel aus der Intensität der gesammten Strahlung zwischen den Perioden u und (u+du), so wird gelten

$$da = f(u)du$$
.

Die Theilschwingung selbst stellt sich durch

$$da \sin ut = f(u) du \sin ut$$
,

worin t die Zeit bedeutet, dar. Sind alle diese Schwingungen cohärent und gleichphasig, so werden sie sich zu einer resultirenden Schwingung zusammensetzen, welche gegeben ist durch das Integral

$$\varphi(t) = \int_0^\infty f(u) \sin ut \, du, \qquad 1$$

welches über das ganze Spectrum zu erstrecken ist.  $\varphi(t)$  stellt dann die wahre Emission dar.

In dieser Richtung kann man jedoch nicht weiter kommen. Es fehlt an experimentellen Bestimmungen der f(u), da nur sehr wenig bolometrische Messungen vorliegen und diese nicht für solche continuirliche Spectren, welche man für einfach halten konnte.

<sup>1</sup> Als Schwingungsperiode wird hier bezeichnet der Quotient  $\frac{2\,\pi}{\tau}$  , worin  $\tau$  die Schwingungsdauer bedeutet.

Man muss den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich von einer Voraussetzung über die Natur der Emission, also der Function  $\varphi(t)$  ausgehen. Am nächsten liegt nun die Vermuthung, dass die Emission unter starker Dämpfung erfolge.

Die emittirende Schwingung wird dann wie alle gedämpften Schwingungen das Gesetz befolgen:

worin

$$\varphi(t) = Ae^{-\kappa t} \sin pt$$

$$p^2 = u_1^2 - \kappa^2$$
2)

und x die Dämpfungsconstante, ferner  $u_1$  die Periode der ungedämpften Schwingung bedeutet.

Diese Schwingung  $\varphi(t)$  dauert von t=0 bis  $t=\infty$  ehe sie verlöscht. Eine solche Schwingung lässt sich nach dem Fourier'schen Theorem nicht in eine discrete, wenn auch unendliche Reihe von Sinusschwingungen zerlegen, sondern nur in ein Continuum derselben. Die Amplitudenvertheilung in diesem continuirlichen Spectrum findet man mittelst des Fourier'schen Integrals:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin tu \, du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ut \, dt.$$

Es ist hiebei vorausgesetzt, dass die Partialschwingungen gleichphasig mit der resultirenden Schwingung sind, welche Voraussetzung nothwendig ist, wenn man verlangt, dass das Spectrum im infrarothen und ultravioletten Theile (für u=0 und  $u=\infty$ ) verschwindende Intensität habe.

Durch den Vergleich des Fourier'schen Integrals mit Gleichung 1) ergibt sich, dass die gesuchte Amplitudenvertheilung sich darstellt durch:

$$f(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \sin ut \, dt.$$

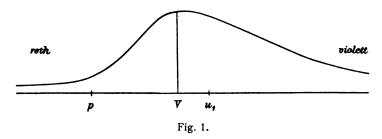
Man erhält endlich nach Einführung der in Gleichung 2) ausgesprochenen Annahme über die Natur der Function  $\varphi(t)$  und Ausführung der Integration:

$$f(u) = \frac{4}{\pi} A \pi p \cdot \frac{u}{(x^2 + p^2 + u^2)^2 - 4 p^2 u^2}.$$
 3)

Die Periode U, für welche f(u) ein Maximum aufweist, bestimmt sich durch

$$U^{4} - \frac{2}{3} (p^{2} - x^{2}) U^{2} - \frac{1}{3} (p^{2} + x^{2})^{2} = 0$$

Es existirt also innerhalb des Integrationsbereiches u=0 bis  $u=\infty$  nur ein Maximum der f(u). Dieses Maximum liegt stets zwischen  $u_1=\sqrt{p^2+x^2}$  und p, und rückt für abnehmende Dämpfungen (beim Anglühen) näher an  $u_1$  heran. Fig. 1 stellt diese Verhältnisse dar.



Wenn die Dämpfung nicht fast aperiodisch ist, so ist die Verschiebung des Maximums aus der ungedämpften Periode  $u_1$  also  $(u_1-U)$  stets von zweiter Ordnung unmerklich klein.

Der Übergang von einer ungedämpften Sinusschwingung zu dieser Zerlegung einer gedämpften Schwingung entspricht so sehr dem Übergang von einer scharfen Spectrallinie in eine verbreiterte Spectrallinie, dass anzunehmen ist:

Die Verbreiterung der Spectrallinien erklärt sich durch eine Dämpfung, welche die emittirende Schwingung erfährt.

Eine verbreiterte Linie ist im wesentlichen ein continuirliches Spectrum. Das Spectrum der meisten weissglühenden Körper dürfte bestehen aus einer Überdeckung mehrerer verbreiterter Linien.<sup>1</sup>

¹ Von früheren Erklärungen der Verbreiterung der Spectrallinien sind folgende zu erwähnen:

Zöllner (Pogg. Ann., 1871) nimmt an, dass die Gase immer continuirliche Spectren aussenden, deren Intensität in allen Theilen unmerklich klein ist, ausser

Die Emission eines festen oder flüssigen glühenden Körpers oder eines verdichteten Gases unterliegt also einer Dämpfung. Der Werth der Dämpfungsconstanten z einer emittirten Schwingung lässt sich mit derselben Sicherheit angeben, mit welcher man die Intensitätsvertheilung in der verbreiterten Linie kennt.

Beispielsweise sei die Dämpfungsconstante für die Magnesiumlinie von der Wellenlänge  $\lambda=2852$  angegeben. Dieselbe verbreitert sich unter Umständen so sehr, dass noch bei der Wellenlänge 2950 die Lichtstärke den vierten Theil der maximalen Lichtstärke, die Amplitude f(u) also die Hälfte der maximalen Amplitude f(U) ausmacht. Mit diesen Zahlen berechnet sich aus Gleichung 3) die Dämpfungsconstante zu:

$$x = 10^{13} \cdot 19^{\text{sec}^{-1}}$$

d. h. die Amplitude der emittirenden Schwingung sinkt schon während fünf Schwingungen im Verhältniss e: 1 ab.

Einen noch extremeren Fall von Dämpfung zeigt die Wasserstoffemission unter höherem Druck. Die für gewöhnlich beobachtbaren Verbreiterungen von Spectrallinien sind jedoch

in den Spectrallinien des Gases. Bei grösserer Dichte des Gases wird das continuirliche Spectrum merklich. Diese Meinung ist nicht unrichtig, aber im Grunde genommen inhaltslos.

Lippich, (Pogg. Ann., 1870) bringt die Verbreiterung der Linien vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie mit der Abweichung vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze in Beziehung.

Kayser (Winkelmann's Handb. der Phys., 1894) erklärt sie vom Standpunkt der Moleculartheorie durch die secundären Wirkungen des bei grösserer Dichte häufigeren Zusammenstosses der Moleküle.

Lock yer schliesst auf Dissociation der Elemente, aus der Verbreiterung ihrer Spectrallinien.

Ebert (Wied. Ann., 1889) erklärt die Verbreiterung durch dieschwingende Bewegung der Moleküle in der Visirlinie und das Doppler'sche Princip.

Es wurde auch die Ansicht ausgesprochen, dass es sich bei Verbreiterung von Duplets um eine Abweichung zufolge der grossen Amplitude der ausgesendeten Lichter handle, nach Art der Combinationstöne.

Das Fourier'sche Theorem wurde meines Wissens nur von Stoney (Phil. Mag., 1871) auf Spectralprobleme bezogen, aber ohne Erfolg, da er demselben nichts entnahm als die Vermuthung, dass in dem Spectrum harmonische Schwingungen vorhanden sein müssten, was nicht der Fall ist.

sehr klein, man erkennt, dass erst nach 50 bis 100 Schwingungen die Amplitude von *e* auf 1 absinkt.

#### 2. Periode der Excitation. Die Banden und Serien.

Wenn die emittirende Schwingung gedämpft ist, so muss bei fortdauerndem Leuchten eine Ursache vorhanden sein, welche diese emittirende Schwingung von Zeit zu Zeit wieder excitirt. Diese Excitation könnte nun in ganz zufälligen und unregelmässigen Pausen, oder aber periodisch erfolgen.

Wir wollen letzteres annehmen und zusehen, zu welchen Folgerungen dies führt.

Wenn die Excitation periodisch ist, so gewinnt der Emissionsvorgang, obgleich er gedämpft ist, wieder eine Periode, nämlich die der Excitation.



Fig. 2.

Fig. 2 stellt eine derartige Schwingung dar.

Nun als eine periodische Function zerlegt sich die Schwingung am Prisma nach Fourier in eine Summe von discreten Sinusschwingungen, deren Perioden ganzzahlige Vielfache der Functionsperiode, hier der Excitationsperiode, sind.

Eine periodisch excitirte Emission sendet also ein Linienspectrum aus. Die Schwingungszahlen dieser Linien stellen alle ganzzahligen Vielfachen der Excitationszahl dar.

Die Excitationszahl pro Secunde ist nun jedenfalls viel kleiner als die Schwingungszahl der emittirenden Schwingung, da viele gedämpfte Schwingungen der Emission vorübergehen werden, ehe wieder eine Excitation erfolgt. Desshalb liegen auch die Vielfachen der Excitationszahl einander sehr nahe und das ausgesendete Spectrum wird durch zahlreiche, der Schwingungszahl nach äquidistante Linien fein gestreift erscheinen.

Die Differenz der Schwingungszahlen zweier dieser Linien ist gleich der Excitationszahl pro Secunde.

Damit ist noch nichts über die Stärke dieser Linien ausgesagt. Aus der Convergenz der Fourier'schen Reihe ergibt sich, dass sie im äussersten Ultraviolett immer schwächer werden müssen. Im Infrarothen brauchen sie aber nicht etwa stärker zu sein als im sichtbaren Spectrum. Sie können dort auch schwächer sein oder ganz verschwinden. Ferner brauchen auch dort, wo sie stark sind, nicht alle zu erscheinen, sondern es können irgend welche gesetzmässige Auslassungen zwischen ihnen vorkommen, indem die Amplitude der so ausfallenden Schwingungen sich durch die Natur der dargestellten periodischen Function als gleich Null bestimmt.

Wie diese Amplitudenvertheilung sich nun im gegebenen Falle bestimmt, ist leicht vorauszusehen. Je länger das Excitationsintervall ist, desto feiner gestreift wird das Spectrum sein und wenn die Zeit zwischen zwei Excitationen so lang ist, dass die emittirende Schwingung Zeit hat, fast ganz abzuklingen, so wird das Spectrum fast genau continuirlich sein und eine nach dem Gesetz des vorigen Capitels vertheilte Lichtintensität aufweisen.

Bei grösseren Excitationszahlen wird es discontinuirlich, gestreift, sein, im Wesentlichen aber dieselbe Intensitätsvertheilung aufweisen. Es wird eine Spectralbande respective eine Spectralserie darstellen.

Die Schwingungszahlen *n* aller Linien einer Bande bestimmen sich nach Deslandres (Compt. rend. 1889, 1890) durch das Gesetz

$$n = a \pm bx^2$$

worin a und b Constante und z die ganzen Zahlen darstellt. Die Differenz je zweier Schwingungszahlen sind also ganzzahlige Vielfache der Constanten b und desshalb ist diese die Excitationszahl pro Secunde. Die ganze oft aus hunderten von Linien bestehende Bande wird emittirt durch eine einfache, gedämpfte, periodisch excitirte Sinusschwingung.

Deslandres stellt z. B. die Schwingungszahlen der 63 Linien der Bande  $\lambda = 3914 \cdot 6 - 3827 \cdot 4$  am negativen Pol des Funkens in Stickstoff von normalem Druck dar durch

$$\frac{1}{3}10^{-12}n = 255 \cdot 45 + 0 \cdot 001534(n-1)^{2}.$$

Es treten somit für diese Schwingung während 255450 Emissionsschwingungen etwas über anderthalb (genau 1.534) Excitationen ein.

Eine Leuchtgasbande bei  $\lambda = 3891 \cdot 5 - 4033 \cdot 8$ , welche 20 Linien aufweist, stellt Deslandres dar durch

$$\frac{1}{3} \cdot 10^{-12} n = 257 \cdot 04 - 0.02078 (x - 1)^{2}.$$

Hier kommen also auf ungefähr dieselbe Zahl emittirender Schwingungen, nämlich auf 257040 nicht weniger als 20.78 Excitationen.

Dabei kann man aus der Lichtvertheilung in einer solchen Bande auch die Dämpfung der emittirenden Schwingung abschätzen, sowie im vorigen Capitel gezeigt wurde.

Die Linie Nr. 11  $\lambda = 3936 \cdot 4$  der erwähnten Leuchtgasbande ist die lichtstärkste. Nach beiden Seiten nimmt die Lichtstärke ab. Sie dürfte ungefähr bei der Linie Nr.  $\delta \lambda = 3902 \cdot 4$  den vierten Theil erreicht haben.

Hieraus berechnet sich die Dämpfungsconstante zu

$$x = 10^{13}.3.9 \,\mathrm{sec^{-1}}$$

Das Leuchtgas emittirt also eine Schwingung von der Wellenlänge  $0.000394 \, mm$ , welche so gedämpft ist, dass ihre Amplitude nach je 21 Schwingungen im Verhältniss von e:1 absinkt und welche nach je 12360 Schwingungen neu excitirt wird.

# 3. Abweichungen von der Intensitätsvertheilung und vom Deslandres'schen Gesetz.

Die Intensitätsvertheilung in den Banden, seltener in den verbreiterten Linien ist unter Umständen eine einseitige. Ich bringe dies vorläufig in Zusammenhang mit dem Auftreten von Schwingungsduplets und Triplets, welches directbeobachtbar ist. Es sind dies simultane Schwingungen von gegebenem Amplituden verhältniss. Verbreitern sich beide, so entsteht eine einseitige Intensitätsvertheilung nach Fig. 3, welche die Intensitätsvertheilung der Componenten des Duplets gestrichelt, die resultirende Vertheilung voll ausgezogen darstellt.

Balmer (Wied. Ann., 1885) stellt die Serien genauer durch

$$n=a+bx^{-2}$$

dar, während Kayser und Runge (Abhandl. d. Berl. Akad., 1890, 1891, 1892) mit der Formel

$$n = a + bx^{-2} + cx^{-4}$$

noch bessere Übereinstimmung erzielen. Mit erster Annäherung stimmt diese Formel mit der Deslandres'schen überein, nur muss man die Zählung am anderen Ende der Serie beginnen.

In voller Genauigkeit gilt also die Deslandres'sche Formel nicht. Es folgt hieraus, dass die Excitation zwar mit erster Annäherung periodisch genannt werden kann, es aber nicht

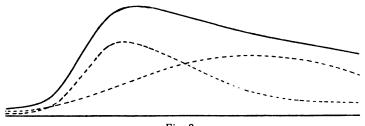


Fig. 3.

völlig ist. Da aber doch eine grosse Gesetzmässigkeit der Excitation vorhanden sein muss um die Streifung nach dem Gesetz von Kayser und Runge zu bewirken, so drängt sich mir die Vermuthung auf, dass die Excitation nicht durch periodische Anstösse, sondern durch den continuirlichen Einfluss einer excitirenden Schwingung bewirkt wird, welche fast periodisch ist, aber desshalb nicht völlig periodisch, weil sie selbst gedämpft ist.

Als Bild vergleiche man die Schwingung einer Stimmgabel, welche durch einen Fiedelbogen angestrichen wird, der nicht gleichförmig, sondern gedämpft sinusförmig bewegt wird.

Ist die excitirende Schwingung gedämpft, so braucht sie selbst wieder eine excitirende Ursache und diese Excitation zweiter Stufe kann entweder durch einen zufälligen gelegentlichen Anlass erfolgen, oder selbst wieder periodisch sein. In letzterem Falle wird ausgesendet werden statt einer Serie von Linien eine Serie von Banden wie dies beispielsweise bei der Bandengruppe von Stickstoff bei  $\lambda = 5000-2800$  der Fall ist.

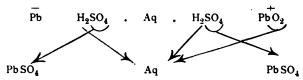
### Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär-Elemente

von

#### Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

Die chemische Energie in einem Secundärelemente kommt dadurch zu Stande, dass auf Kosten der im Elektrolyte befindlichen Schwefelsäure an beiden Platten Bleisulfat ausgeschieden wird. Wendet man die von Pfaundler¹ für die Processe in einigen constanten Ketten gewählte übersichtliche Darstellung an, so erhält man als Ausdruck für die gemachte Behauptung das nachstehende Schema:



Dabei wird auf begleitende Nebenerscheinungen, bestehend in der Bildung der Verbindung H<sub>2</sub>PbO<sub>3</sub>, in der Absorption von H durch die negative Platte und endlich in der Ausscheidung von freien Gasen,<sup>2</sup> keine Rücksicht genommen. Ferner ist vorausgesetzt, dass bei der Entladung sämmtliche Säure zur Salzbildung verbraucht wird.

Um die chemische Energie zu berechnen, zerlegt man sich vortheilhaft den Entladungsvorgang in drei Phasen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pfaundler, Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, III, S. 578, 1888-1890.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Streintz und Neumann, Wied. Ann., 41, 1890, S. 111 enthält die vollständigen Gleichungen.

In der ersten Phase wird durch die Thätigkeit der Jonen 2H und SO" Wasser zerlegt; für diesen Vorgang gilt die Gleichung

$$H_2O = H_2 + O - 684 K^1$$
 (1)

Der Sauerstoff erscheint an der negativen Platte, dieselbe oxydirend; der Wasserstoff reducirt das an der positiven Platte befindliche Superoxyd in Monoxyd unter Bildung von Wasser; es ergibt sich

$$Pb+O = PbO+503K; \dots PbO_{2}+H_{2} = PbO+H_{2}O+aK;$$
 (2)

da die Metalloxyde neben freier Säure nicht bestehen können, so tritt in der dritten Phase Sulfatbildung ein; die thermochemische Gleichung ist für beide Elektroden dieselbe und lautet:

$$PbO + H_2SO_4$$
 aq =  $PbSO_4 + Aq + 234K_1$ ;... $PbO + H_2SO_4$  aq =  $PbSO_4 + Aq + 234K$ . (3)

Durch Addition der Gleichungen in (1), (2) und (3) erhält man für die chemische Energie

$$E_c = P_b + 2 H_2 SO_4 aq + P_b O_2 = 2 P_b SO_4 + Aq + (a + 287) K.$$
 (I)

Bei Elementen mit grösserem Gehalt an Säure ist die jeweilige Verdünnungswärme derselben durch das bei der Entladung gebildete Wasser als additives Glied hinzuzufügen; auch wird die Lösungswärme des Bleisulfates in der Schwefelsäure zu berücksichtigen sein.

Sieht man von diesen Umständen zunächst ab, so beschränkt sich das thermochemische Problem auf die Aufgabe, die unbekannte Wärmetönung a direct oder indirect zu ermitteln oder mit andern Worten, das Bleisuperoxyd in irgend eine stabile Verbindung, deren potentielle chemische Energie bekannt ist,

Die in der Abhandlung vorkommenden thermochemischen Angaben und Bezeichnungen sind dem Lehrbuch der allgemeinen Chemie (II. Band, 1893) von Ostwald entnommen. — Die Arbeit, welche gegen den Atmosphärendruck durch Entstehung von 1.5 Grammmolekülen Knallgas geleistet wird, wurde nicht berücksichtigt, da die Gase in der zweiten Phase wieder verschwinden.

unter Beobachtung der bei der Reaction auftretenden Wärme überzuführen.

Hiezu erschien ein Versuch geeignet, der in Vorlesungen über Experimentalchemie vorgeführt wird. In einem Kolben hängt ein Mousselinbeutelchen, das pulverförmiges Superoxyd enthält; leitet man einen lebhaften Strom von Schwefeldioxyd in denselben ein, so entsteht Bleisulfat unter so beträchtlicher Erhitzung der Substanz, dass das einhüllende Gewebe verbrennt. Bezeichnet man die entwickelte Wärme mit c, so ergibt sich

$$PbO_2 + SO_2 = PbSO_4 + c K, \tag{4}$$

wobei noch die Arbeit beim Verschwinden des Gases zu berücksichtigen wäre.

Sollen brauchbare Messungen dieser Reactionswärme angestellt werden, so musste vor Allem das organische Gewebe durch ein neutrales Behältniss für das Pulver ersetzt werden. Zu diesem Behufe dienten der Reihe nach Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, Glaswolle, Glimmerplättchen.

Einige orientirende Versuche ergaben, dass der Gasstrom von SO<sub>2</sub> nur geringe Mengen der Substanz umzusetzen im Stande ist; infolge dessen waren die zu erwartenden absoluten Wärmemengen klein; man musste demnach zum empfindlichsten Instrumente, dem Eiscalorimeter greifen.

Leider stellte es sich heraus, dass die Intensität der Reaction bei der niedrigen Temperatur (der Gasstrom war selbstverständlich vor seinem Eintritte in das Reagirglas des Calorimeters auf 0° gekühlt worden) ganz bedeutend geschwächt wird. Es musste daher eine Vorwärmung der Substanz vorgenommen werden durch eine kleine Platinspirale, der auf galvanischem Wege eine genau gemessene Wärmemenge zugeführt wurde. Trotzdem blieb auch nunmehr der überwiegende Theil des Pulvers unverändert. Der Quecksilberfaden im Capillarrohr des Calorimeters hatte jedoch grössere Bewegungen vollzogen, so dass noch Hoffnung vorhanden war, es werde sich durch Wägungen vor und nach dem Versuche der Werth c ermitteln lassen. Die Resultate standen jedoch in keiner Übereinstimmung unter einander, so dass sich die Vermuthung aufdrängte, es sei durch die galvanische Erwärmung

ein veränderlicher Bruchtheil des Superoxydes in Monoxyd übergegangen.

Es war daher ein anderer Weg einzuschlagen, welcher auch schliesslich zum Ziele führte. Aus Versuchen ergab sich, dass schwefelige Säure (H<sub>2</sub>SO<sub>3</sub> aq) allein nicht im Stande ist, PbO<sub>2</sub> zu verändern. Concentrirte Salzsäure jedoch zerstört das Superoxyd unter Bildung von Bleichlorid (PbCl<sub>2</sub>) Bleitetrachlorid (PbCl<sub>4</sub>) und unter Entwicklung von freiem Chlor nach der Formel

$$PbO_2 + 4HCl = \underbrace{PbCl_2 + Cl_2}_{PbCl_4} + 2H_2O.$$

Einzeln ist somit keine von beiden Säuren für den gewünschten Zweck zu verwerthen; wohl aber, wenn man aus ihnen eine entsprechende Mischung herstellt. Dann wird das Blei an SO<sub>4</sub>, das Chlor an H gebunden, entsprechend der Gleichung

$$\underbrace{\text{Pb Cl}_{\mathbf{2}} + \text{Cl}_{\mathbf{2}}}_{\text{Pb Cl}_{\mathbf{4}}} + \text{H}_{\mathbf{2}}\text{SO}_{\mathbf{3}} + 2\,\text{H}_{\mathbf{2}}\text{O} = \text{Pb SO}_{\mathbf{4}} + 4\,\text{HCl} + \text{H}_{\mathbf{2}}\text{O}.^{1}$$

Da der in der Mischung enthaltene Chlorwasserstoff keiner Veränderung durch den Process unterliegt, das Entstehen von einem Molekül Wasser aber mit Rücksicht auf den Überschuss von Wasser in der Lösung nicht in Betracht kommt, so kann man für beide neben einander verlaufenden Reactionen die thermochemische Gleichung aufstellen

Pb O<sub>2</sub> + H<sub>2</sub>SO<sub>3</sub> aq = Pb SO<sub>4</sub> + Aq + 
$$c'$$
 ·  $K$ .

Mit Zuhilfenahme des Werthes

$$SO_2 + Aq = H_2 SO_3 aq + 77 K$$

$$c - c' = 77 K.$$
(5)

ergibt sich

Gasförmiges SO<sub>2</sub> tritt nicht auf; der Atmosphärendruck leistet somit keine Arbeit, noch wird eine solche gegen ihn verrichtet.

 $<sup>^1</sup>$  Es ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil des Bleies an  $\operatorname{Cl}_2$  gebunden bleibt. Da jedoch die Neutralisirungswärme des Chlorbleies (223 K) jener des Sulfates (234 K) nahezu gleichkommt, so ist dadurch eine Fehlerquelle nicht zu befürchten.

Um nun an Stelle von a in der Gleichung für die chemische Energie den experimentell auszumittelnden Werth c' zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Es war

$$PbO_{2} + H_{2} = PbO + H_{2}O + aK$$

Bezeichnet man die Wärme, welche entwickelt wird, wenn Monoxyd in Superoxyd übergeführt wird mit b, also

Pb O<sub>2</sub> = Pb O+O-
$$b K$$
,

so gibt die Differenz dieser beiden Gleichungen die Bildungswärme des Wassers, d. h.

$$a+b=684 K, (6)$$

ferner lässt sich Gleichung (4) in die Form bringen

$$PbO+O+SO_{\bullet} = PbSO_{\bullet} + (c+b) K$$

und da

$$SO_2 + O = SO_3 + 301 K$$

so ergibt sich

$$PbO + SO_3 = PbSO_4 + (c + b - 301) K.$$

Die Wärmetönung dieses Vorganges ist zu 644 K bestimmt worden; daraus folgt

$$c + b = 945 K.$$
 (7)

Mit Hilfe der Gleichungen (5), (6) und (7) können also a, b, c und c' berechnet werden, sobald eine dieser vier Grössen bekannt ist. Sollen a, b oder c für sich bestimmt werden, dann kommt noch die durch die Gase geleistete Arbeit entsprechend zu berücksichtigen. Hingegen ist bei Einführung des Werthes c' in die Gleichung für die chemische Energie an den Zahlen, welche sich für (a+b) und für (b+c) ergaben, keine Correction in diesem Sinne vorzunehmen. Es lehrt dies eine einfache Überlegung. Die Gleichung lautet nunmehr

$$E_c = Pb + 2H_2SO_4 aq + PbO_2 = 2PbSO_4 + Aq + (103 + c)K.$$
 (II)

Zur Bestimmung von c' war zunächst wieder das Eiscalorimeter ausersehen. Allein der Nachtheil einer nicht vollkommen verlaufenden Reaction trat auch hier ein und zudem war es misslich, dass man wegen der Einrichtung dieses Instrumentes nicht in der Lage war, den Verlauf des Processes mit den Augen zu verfolgen. Ich bediente mich daher einer

Einrichtung, welche von Nernst<sup>1</sup> mit Erfolg angewendet wurde. Ein kleines dünnwandiges Becherglas mit etwa 300 cm<sup>3</sup> Fassungsraum, dessen Rand abgesprengt war, stand auf drei Korkschneiden in einem weiten Batterieglas, das mit einem Holzdeckel versehen war. Der Holzdeckel enthielt zwei Ausschnitte; der eine diente dazu, die gewogenen Mengen Superoxyd einzuführen und war für gewöhnlich bedeckt; der andere seitliche hielt ein in Zehntelgrade getheiltes Thermometer, dessen Kugel bis nahe an den Boden des Becherglases reichte.

In das Becherglas wurden ungefähr 200 cm³ der Mischung von Salzsäure und schwefeliger Säure gegossen. Um die entsprechende Mischung zu erhalten, gingen einige orientirende Versuche voraus, die ergaben, dass die bei gewöhnlicher Temperatur durch Absorption des SO, von Wasser hergestellte schwefelige Säure zum glatten Verlauf der Reaction nicht kräftig genug sei. Es wurde daher das Gas, das sich beim Erhitzen von Kupferspänen mit concentrirter Schwefelsäure entwickelte, zunächst in einem Schlangenrohr, welches von schmelzendem Schnee umgeben war, gekühlt und dann in einen gleichfalls gekühlten Glaskolben mit destillirtem Wasser so lange eingeleitet, bis dieses zu erstarren begann, d. h. bis sich das feste Hydrat (SO, .7 H, O) ausschied. Auf diesem Wege erhielt man Säure von 12 bis 13 Gewichtsprocenten. 40 Volumtheile davon wurden dann mit 30 Volumtheilen reiner concentrirter Salzsäure von 38·2 Gewichtsprocenten vermischt. Wenn man nun in diese Mischung das pulverförmige Pb O, tauchte, so ging der Process der Überführung in PbSO, allerdings sehr rasch von statten, es wurden aber Nebel von SO. ausgestossen, was vermieden werden musste. Dies war dadurch zu erreichen, dass man 150 bis 160 cm3 der Mischung die auf ungefähr 200 cm³ ergänzende Menge Wasser zusetzte.

Das Bleisuperoxyd war aus einer Lösung von Bleiacetat und Kalilauge durch Einleiten von Chlor gefällt, dann durch Dekantation ausgewaschen, bis das Waschwasser weder Chlornoch Bleireaction zeigte. Mit Salpetersäure gekocht gab es kein Blei ab, war somit frei von Oxyd. Es wurde, nachdem es sorg-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Nernst, Theoretische Chemie, S. 468, 1893.

fältig bei einer Temperatur, die 100° nicht überstieg, getrocknet war, feingepulvert in einer Platinschale aufbewahrt, welche in einem Exsiccator stand.

Die Bestimmungen geschahen in der Weise, dass zunächst eine Wägung der Platinschale vorgenommen wurde. Dann entnahm man mittelst eines kleinen Glaslöffels der Schale eine Quantität Superoxyd und brachte dieselbe in ein Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, dessen Drähte einen Durchmesser von 0.06 mm besassen. Zur Herstellung des Körbchens wurden an den vier nach aufwärts gebogenen Ecken des quadratischen Netzes Platindrähte eingehackt, welche ober der Mitte dieses vereint um einen stärkeren Platindraht, der zum Theil in ein Glasrohr eingeschmolzen war, geschlungen wurden. Das Glasrohr diente als Stiel, mit der Flüssigkeit in Berührung kam nur Platin. Eine Wägung der Schale nach dem Versuche gab die Menge des verbrauchten PbO, an. Nach Ablauf von einer Minute war die Lösung milchig und am Boden des Becherglases begann sich schneeig weisses Sulfat niederzuschlagen. Das Körbchen hatte nunmehr durch weitere drei bis vier Minuten als Rührvorrichtung zu dienen.

Es handelte sich nun darum, die Wasserwerthe der verschiedenen Bestandtheile, an welche Wärme durch den chemischen Vorgang abgegeben worden war, zu ermitteln. Der Wasserwerth des in die Mischung tauchenden Thermometerstückes wurde aus dem Volumen desselben zu 0.62 g, jener des Platinkörbchens aus dem Gewichte des Metalles zu 0.10g, endlich der des Becherglases bis zu der Höhe, die das Niveau der Flüssigkeit einnahm, aus einer Wägung des Gefässes, dessen Rand nach Beendigung aller Versuche bis zu dieser Niveaufläche abgesprengt war, zu 6.65 g bestimmt worden. Zur Ermittelung des Wasserwerthes der Mischung in der nach jedem einzelnen Versuche vorhandenen Zusammensetzung bediente man sich des Calorifers von Andrews, dessen Wärmeinhalt zwischen zwei festen Marken wiederholt bestimmt und im Mittel zu 11.20 K gefunden wurde. Die jeweilige Mischung wurde hiezu vorher auf 10° C. abgekühlt, so dass man, da die Erwärmung durch den Calorifer zwischen 6°3 und 6°5 betrug und die Zimmertemperatur bei 18° lag, bei stets steigendem Thermometer

beobachtete. Zur Anbringung der nöthigen Correcturen für den Temperaturgewinn waren die den entsprechenden Zeiten zukommenden Temperaturen zu verzeichnen.

Ganz in gleicher Weise musste verfahren werden, wenn an Stelle des Calorifers die Erwärmung das im Körbchen befindliche pulverförmige PbO<sub>2</sub> besorgte; 3 g der Substanz erhöhten die Temperatur der Mischung um 5°5 C.

Das zu den Messungen verwendete Thermometer wurde in dem Intervalle, innerhalb dessen die Ablesungen geschahen, mit einem Normalthermometer aus Jenenser Glas im Wasserbade verglichen. Darauf ermittelte man die Fundamentalpunkte des letzteren und calibrirte es nach dem Rudberg'schen Verfahren durch Ablösen und Verschieben von Quecksilberfäden in der Länge von 50°, 30°3 und 41°6. Die so erhaltenen Correctionen wurden auf die Angaben des Versuchsthermometers übertragen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der durchgeführten sechs Versuche zusammengestellt; sie befinden sich in genügender Übereinstimmung. Die erste Columne enthält die Menge des umgesetzten Superoxydes in Grammen, die zweite die durch den Process hervorgerufene Temperaturerhöhung der Mischung. In der dritten ist die procentuelle Zusammensetzung von  $100 \, cm^3$  Säure, in der vierten die durch den Calorifer erzeugte Steigerung der Temperatur angegeben; in der letzten Columne endlich befinden sich die auf ein Grammmolekül PbO<sub>2</sub> (238·2 g) bezogenen Resultate in rationellen Calorien.

	Pb $\mathrm{O}_2$	$\tau - t$	Concentration der Säuremischung	$\tau'-t'$	c'
1.	2.5081	4960	12·2 g HCl 4·3 g SO <sub>2</sub>	6°40	773 · 1
2.	2 · 2214	4.05	13 · 1 g HCl 4 · 5 g SO <sub>2</sub>	6.48	759 · 2
3.	2.8639	5.27	12 · 2 g HCl 5 · 1 g SO <sub>2</sub>	6 · 43	771 · 8
4.	3.0235	5.55	12.2 g HCl 5.1 g SO <sub>2</sub>	6.38	767 • 4
5.	3.0178	5 · 47	12 · 2 g HCl 5 · 1 g SO <sub>2</sub>	6.34	771-1
6.	2.9278	5.26	12 · 2 g HCl 5 · 1 g SO <sub>2</sub>	6.36	761 · 4

Die grössten Abweichungen von einander liefern die Versuche 1 und 2, sie betragen  $1.8^{\circ}/_{0}$ . Als Mittelwerth ergibt sich

$$c' = 767 \cdot 3$$
.

Man erhält somit nachstehende thermochemische Daten:

$$\begin{array}{c}
\text{Pb } O_{2} + \text{H}_{2} \text{SO}_{3} \text{ aq} = \text{Pb } \text{SO}_{4} + \text{Aq} + 767 K \\
\text{Pb } O_{2} + \text{SO}_{2}^{*} = \text{Pb } \text{SO}_{4} + 844 K \\
\text{Pb } O_{2} + \text{H}_{2}^{*} = \text{Pb } \text{O} + \text{H}_{2} \text{O} + 583 K \\
\text{Pb } O_{2} = \text{Pb } \text{O} + \text{O}^{*} - 101 K
\end{array}$$
(8)

Es darf nicht verschwiegen werden, dass die Resultate in (8) mit einem Fehler behaftet sind. Das im Wasser unlösliche Bleisulfat löst sich nämlich theilweise in Salzsäure von der angewendeten Concentration. In der Zahl 767 ist daher auch die Lösungswärme eines Bruchtheiles des entstandenen PbSO<sub>4</sub> in HCl enthalten.<sup>1</sup>

Für die thermochemische Energie des Secundärelementes ergibt sich die Gleichung

$$E_c = PbO_{\bullet} + 2 H_{\bullet}SO_{\bullet} aq + Pb = 2 PbSO_{\bullet} Aq + 870 K.$$
 (III)

Nimmt man die Constante des Faraday'schen Gesetzes zu 96540 Coulomb an, erwägt man ferner, dass der Einheit der elektrischen Energie 0.00239~K entsprechen, so kommen unter Berücksichtigung, dass Blei ein zweiwerthiges Metall ist, 461.5~K auf ein Volt. Die aus den thermochemischen Grössen berechnete elektromotorische Kraft des Elementes folgt daraus zu

Wie schon eingangs erwähnt, liegt der vorliegenden Berechnung die Annahme zu Grunde, dass sämmtliche im Elektrolyte enthaltene Säure zur Bildung des Salzes verbraucht wird.

In der Untersuchung, welche über die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Säuregehalte angestellt wurde,<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man vergleiche übrigens die Anmerkung auf Seite 288.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Streintz, Wied. Ann., 46, S. 458, 1892.

zeigte es sich, dass das Element, dessen Säure die geringste von den verwendeten Concentrationen (spec. Gew. 1.055) hatte, die elektromotorische Kraft 1.900 Volt besass.

Mit Rücksicht auf die mannigfaltigen Fehler, welche sich der thermochemischen Rechnung gemäss aus fremdem und eigenem Beobachtungsmaterial ergeben, wird man dieses nahe Zusammentreffen der Werthe für die elektromotorische Kraft zum Theile einem günstigen Zufalle zuzuschreiben haben. Immerhin aber dürfte diese Mittheilung als ein Kriterium dafür anzusehen sein, dass sich die Processe im Secundärelemente in der geschilderten, verhältnissmässig einfachen Weise abspielen.

### XIV. SITZUNG VOM 25. MAI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b, der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. F. Exner übersendet eine im physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn M. v. Smoluchowski, betitelt: \*Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper«.

Ferner übersendet Herr Prof. F. Exner eine in demselben Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Bruno Piesch, betitelt: »Änderung des elektrischen Widerstandes wässeriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von dem Assistenten daselbst, dipl. Chemiker Carl Mangold, betitelt: \*Einige Beiträge zur Kenntniss der Ricinusöl-, Ricinelaïdin- und Ricinstearolsäure«.

Der Secretär legt eine von Prof. J. V. Janovsky und Herrn K. Hanofsky in Reichenberg eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Analyse des Maffersdorfer Sauerbrunnens«.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: »Ichthyologische Beiträge« (XVII.) und beschreibt in der-

selben einige neue Arten, deren Mehrzahl von Dr. Holub in Südafrika entdeckt wurden.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien, betitelt: Deitrag zur Flora von Aetolien und Acarnanien«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht eine Abhandlung betitelt: »Ein Beitrag zur Kenntniss der 26-tägigen Periode des Erdmagnetismus«.

Herr Prof. Dr. J. Schaffer, Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine zweite vorläufige Mittheilung über den feineren Bau der Thymus, betitelt: »Über die Thymusanlage bei Petromyzon Planeri«.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Chiru C., Canalisation des Rivières et les Irrigations. (Avec la charte hydrographique de la Roumanie.) — (Abhandlung in rumänischer Sprache.) Bukarest, 1893; 8°.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

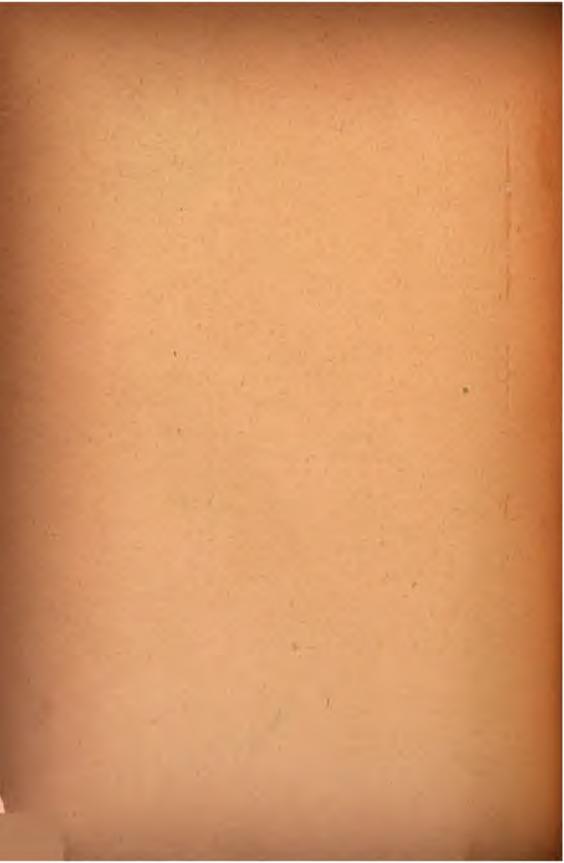
- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medici n

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Wollzeile 15) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VI. HEFT.

JAHRGANG 1894. - JUNI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHALT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 7 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREL

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

### INHALT '

des 6. Heftes Juni 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
XV. Sitzung vom 7. Juni 1894; Übersicht	341
Puschl C., Folgerungen aus Amagat's Versuchen. [Preis: 25 kr.	
= 50 Pfg.] ,	
Weyr E., Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Ge-	
schlechte Eins und seine Anwendung. (Mit 7 Textfiguren.)	
[Preis: 70 kr. = 1 Mk. 40 Pfg.]	365
Suchanek E., Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommen-	
den Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. [Preis:	
1 fl. 30 kr. = 2 Mk. 60 Pfg.]	443
XVI. Sitzung vom 14. Juni 1894: Übersicht	611
XVII. Sitzung vom 21. Juni 1894: Übersicht	612

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 20 kr. = 4 Mk. 40 Pfg.



### SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

- Von den Herren Adam Walcz und Henryk Olechowski in Lemberg, welches angeblich die Skizze einer Abhandlung über eine technische Erfindung enthält;
- 2. von Herrn Carl Moser in Wien mit der Aufschrift: »Selbstwirkende Regulatorbremse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übergibt unter dem Titel: »Vergleichende physiologische Untersuchungen über die Keimung europäischer und tropischer Arten von Viscum und Loranthus« die vierte »pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg«.

Herr Prof. Dr. Oscar Simony überreicht eine von Herrn Dr. E. Suchanek in Wien ausgeführte Arbeit: "Über die dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen«.

### Folgerungen aus Amagat's Versuchen

von

#### C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Die Untersuchungen Amagat's über das Verhalten comprimirter Flüssigkeiten haben eine Reihe wichtiger Thatsachen kennen gelehrt, deren theoretische Bedeutung vorerst noch nicht absehbar ist.

Allgemein und als augenfälligstes Resultat ergab sich, dass die Zunahme, welche der Ausdehnungscoöfficient einer Flüssigkeit mit steigender Temperatur gewöhnlich zeigt, durch Compression sich vermindert, wobei selbst der stärkste Druck noch keine Grenze erreicht, so dass jener Coöfficient schliesslich mit steigender Temperatur nicht mehr zu-, sondern abnimmt, also eine völlige Umkehrung des gewöhnlichen Verhaltens eintritt. Es dürfte schwer sein, diese bedeutungsvolle Thatsache mit der kinetischen Anschauung vom Wesen der Wärme in Einklang zu bringen, und es ist bisher, wie ich glaube, auch nicht versucht worden.

Dem ausgesprochenen Satze gemäss ist für die Flüssigkeiten allgemein

$$\frac{d^2a}{dpdt} < 0$$

oder negativ, wobei

$$a = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

der hierdurch definirte Ausdehnungscoëfficient ist und p, t, v die gewöhnliche Bedeutung haben.

Wenn  $\frac{d^2a}{dndt}$ , wie es nach Amagat innerhalb der Grenzen seiner bezüglichen Versuche der Fall war, stets negativ bleibt, also der für gewöhnlich positive Quotient  $\frac{da}{dt}$  bei jeder Temperatur durch Compression beständig abnimmt und endlich negativ wird, dann muss der für gewöhnlich negative Quotient  $\frac{da}{dp}$  bei jeder Compression durch Temperaturerniedrigung beständig zunehmen und endlich positiv werden. Diese Folgerung ist theoretisch unanfechtbar; für die Wirklichkeit ist aber zu beachten, dass eine Flüssigkeit durch Erkalten zuletzt immer erstarrt, wobei ihre Substanz eine Veränderung der Structur erfährt und ihr Verhalten sich mehr oder weniger sprungweise modificirt. Man kann daher nur sagen, dass jedenfalls, je tiefer der Erstarrungspunkt einer Flüssigkeit liegt, desto mehr Aussicht vorhanden sein muss, die erwähnte Folgerung an ihr vollständig verificirt zu sehen; es wird dabei weniger auf die absolute Lage jenes Punktes, als vielmehr darauf ankommen, dass er tief genug unterhalb der kritischen Temperatur liegt, deren Höhe für den Gang der Wärmeausdehnung unter gleichen Versuchsbedingungen am meisten massgebend erscheint. In dieser Hinsicht dürfte neben dem Wasser besonders das Quecksilber in Betracht kommen.

#### Halt- und Wendepunkte der Wärmeausdehnung.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihr Ausdehnungscoëfficient a bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein sehr starkes Maximum, wofür

$$\frac{da}{dt} = 0$$

ist. Bei einer Temperatur unterhalb seines Maximums hat a einen Wendepunkt, wo nämlich die Geschwindigkeit seiner Zunahme am grössten, also  $\frac{da}{dt}$  ein Maximum und

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 0$$

ist. Wie jener Werth von a wird auch dieser ähnlich starke Werth von  $\frac{da}{dt}$  durch Compression vermindert.

Es sei die Flüssigkeit unter dem vorausgesetzten Drucke bis zur Temperatur des Wendepunktes von a erwärmt. Drückt man sie dann stärker zusammen, indem man zugleich die Temperatur so regelt, dass a immer in seinem Wendepunkte und somit die bezügliche obige Bedingung erfüllt bleibt, so hat man die Gleichung

$$d\frac{da}{dt} = \frac{d^2a}{dpdt} dp,$$

wonach  $\frac{da}{dt}$  auch in diesem Falle, wie bei constanter Temperatur, mit der Zunahme des Druckes abnimmt. Man kann so die Compression fortsetzen, bis

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird. Hier ist das Maximum von a auf dessen Wendepunkt gerückt und fällt mit einem Minimum zusammen (erster Haltund Wendepunkt). Für Drucke ober dieser Grenze ist  $\frac{da}{dt}$  im Wendepunkte und daher als Maximum negativ; das für den kritischen Zustand unendlich grosse Maximum von a ist dann vollständig unterdrückt und verschwunden.

Aus diesem Halt- und Wendepunkte von a geht, gemäss der aus  $\frac{da}{dt} = 0$  folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{d^2a}{dt^2}dt + \frac{d^2a}{dpdt}dp = 0,$$

bei Abnahme des Druckes das Maximum, an Grösse zunehmend, zunächst auf höhere Temperaturen über, und es mag sein schliesslicher Verlauf bis zum kritischen Punkte vorläufig ausser Betracht bleiben; das Minimum geht gleichzeitig, ebenfalls an Grösse zunehmend, auf immer tiefere Temperaturen herab.

Nach Amagat's Versuchen wird der Quotient  $\frac{da}{dt}$ , wenn er durch Compression negativ oder Null ist, durch Abnahme des Druckes, welches auch die Temperatur sei oder wie immer sie wechseln mag, jedenfalls zuletzt positiv. Jenes mit abnehmender Compression auf tiefere Temperaturen fortschreitende Minimum von a muss daher endlich auf einen Druck fallen, welcher der kleinste ist, wobei noch  $\frac{da}{dt} = 0$  sein kann; für diesen kleinsten Druck wird in der entsprechenden obigen Gleichung das Differential dp = 0 und somit ist dann auch

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0;$$

hier trifft das Minimum von a mit einem Wendepunkte und einem Maximum zusammen (zweiter Halt- und Wendepunkt).

Von diesem Punkte aus kehrt bei Zunahme des Druckes das Minimum von a wieder auf höhere Temperaturen zurück, während das Maximum, wegen des negativen Werthes von  $\frac{da}{dp}$  an Grösse abnehmend, auf immer tiefere Temperaturen hinabgeht.

Denken wir uns jetzt eine Flüssigkeit, für welche  $\frac{da}{dp}$  positiv ist, so dass a bei einem ohnehin für gewöhnlich positiven Werthe von  $\frac{da}{dt}$  sowohl durch Erwärmung, als auch durch Compression zunimmt. Es lässt sich dann bei Erniedrigung der Temperatur durch gleichzeitigen Druck bewirken, dass a constant bleibt, wobei die Gleichung

$$\frac{da}{dt}dt + \frac{da}{dp}dp = 0$$

stattfinden muss. Da nach den erwähnten Versuchen ein positiver Werth von  $\frac{da}{dt}$  bei jeder Temperatur durch Compression endlich Null wird und das Vorzeichen wechselt, so muss man

bei einer unter der bezeichneten Bedingung fortgesetzten Compression jedenfalls zu einem Drucke kommen, welcher der grösste ist, wobei dieser Quotient noch positiv sein kann und wo derselbe also verschwinden muss. Für diesen grössten Druck wird in der vorigen Gleichung das Differential  $dp\equiv 0$  und zugleich

$$\frac{da}{dt} = 0;$$

aus derselben Gleichung ergibt sich aber für diesen Fall

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{da}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt, dass hier, weil der Druck ein Maximum ist,  $\frac{d^2a}{dt^2}$  positiv und a ein Minimum sein muss. In einer Flüssigkeit, für welche  $\frac{da}{dp}$  positiv ist, gibt es demnach bei jedem Drucke eine Temperatur, bei welcher a ein Minimum wird; dasselbe geht dem Amagat'schen Satze gemäss mit steigender Compression auf höhere Temperaturen über.

In einer Flüssigkeit, für welche  $\frac{da}{dp}$  bei hohen Temperaturen negativ und bei niedrigen positiv ist, geht nach dem Gesagten bei hinreichender Compression einerseits ein Maximum von a mit negativem  $\frac{da}{dp}$  von oben her auf immer tiefere Temperaturen hinab, während anderseits ein Minimum mit positivem  $\frac{da}{dp}$  von unten her zu immer höheren Temperaturen hinaufgeht; diese zwei Punkte müssen endlich in einem Wendepunkte zusammentreffen, für welchen

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird (dritter Halt- und Wendepunkt). Da der Werth von  $\frac{da}{dp}$  für das Maximum negativ und für das Minimum positiv ist,

so muss derselbe im Coincidenzpunkte verschwinden und das Vorzeichen wechseln.

Für den so erreichten Punkt ist daher einerseits wegen  $\frac{da}{dt} = 0$ :

$$\frac{d^2a}{dt^2}dt + \frac{d^2a}{dp\,dt}dp = 0,$$

und anderseits wegen  $\frac{da}{dp} = 0$ :

$$\frac{d^2a}{dp^2}dp + \frac{d^2a}{dpdt}dt = 0;$$

durch Verbindung dieser zwei Differentialgleichungen ergibt sich:

$$\frac{d^2a}{dp^2}dp^2 = \frac{d^2a}{dt^2}dt^2$$

und man sieht, dass hier mit dem einen auch der andere der beiden zweiten Differentialquotienten von a verschwindet und folglich

$$\frac{d^2a}{dp^2} = \frac{da}{dp} = 0$$

ist. Der hierdurch definirte Zustand einer Flüssigkeit ist aber derjenige, welchen ich in einer früheren Abhandlung,¹ wo ich denselben auf eine andere Weise erschloss, den peripetischen nannte. Man kann daher sagen: Im peripetischen Punkte einer Flüssigkeit geht ihr Ausdehnungscoëfficient sowohl als Function der Temperatur wie als Function des Druckes aus einem Maximum in ein Minimum über.

Von diesem durch Compression erreichten merkwürdigen Zustande aus kehrt bei Abnahme des Druckes das der Bedingung  $\frac{da}{dt} = 0$  entsprechende Maximum von a mit negativen Werthen von  $\frac{da}{dp}$  wieder auf höhere Temperaturen zurück,

<sup>1</sup> Diese Berichte, Bd. 98, Abth. II. a, S. 1341.

während das der gleichen Bedingung entsprechende Minimum mit positiven Werthen von  $\frac{da}{dp}$  auf immer tiefere Temperaturen fortgeht.

#### Verlauf der Wärmeausdehnung für constanten Druck.

Im Vorigen haben sich für den Verlauf von a als Function der Temperatur in einer Flüssigkeit drei Wendepunkte und vier Haltpunkte, nämlich zwei Maxima und zwei Minima, ergeben. Der erste oder obere Wendepunkt fällt für den kritischen Zustand mit dem dann unendlich grossen Maximum von a zusammen; für Drucke unter dem kritischen bleiben daher zwei Wendepunkte, der mittlere und der obere, übrig; in jenem ist  $\frac{da}{dt}$  ein Minimum, in diesem ein Maximum. Der mittlere Wendepunkt scheint bei den meisten Flüssigkeiten innerhalb oder nicht weit ausserhalb des Intervalles der gewöhnlichen Versuchstemperaturen zu fallen und ist dann aus empirischen Ausdehnungsformeln, wenn sie eine hinreichende Zahl von Constanten enthalten, immer nachweisbar; er liegt bei Wasser ober  $100^{\circ}$ , bei anderen Flüssigkeiten tiefer, sehr tief bei Alkohol.

Lässt man eine Flüssigkeit von ihrem kritischen Zustande aus bei constantem Drucke erkalten, so nimmt der Quotient  $\frac{da}{dt}$  zuerst schnell, aber allmälig sich verlangsamend ab, bis er bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum wird und weiterhin zunimmt. Dieses durch Compression abnehmende Minimum von  $\frac{da}{dt}$  ist nun bei dem vorausgesetzten kritischen Drucke entweder noch positiv oder schon negativ; im ersten Falle nimmt der Ausdehnungscoëfficient a sowohl vor wie nach Überschreitung des Wendepunktes ununterbrochen ab, im zweiten Falle hingegen hat derselbe ober dem Wendepunkte ein mehr oder weniger ausgeprägtes Minimum und unterhalb ein entsprechendes Maximum. Bei schwachen Drucken, wie der atmosphärische ist, findet fast allgemein nur das erstere Verhalten statt; verstärkt man aber dann den Druck mehr und mehr, so kommen endlich ein vom Wendepunkte aus

nach oben fortschreitendes Minimum und ein von demselben Punkte aus nach unten fortschreitendes Maximum von a zur Entwicklung. Die Versuche Amagat's lassen diesen Verlauf besonders am Äther, wo der Wendepunkt auf eine mittlere Temperatur fällt, sehr deutlich ersehen.

Wenn in Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur mässig hoch ist, schon der mittlere Wendepunkt auf eine gewöhnliche oder auch niedrige Temperatur fällt, so muss natürlich der untere Wendepunkt, wenn nicht früher die Erstarrung eintritt, unterhalb der unteren Grenze der gewöhnlichen Versuche liegen. Nur bei Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur besonders hoch ist, wird man erwarten dürfen, dass dieser Wendepunkt relativ hoch liegt und, wenn die Erstarrungstemperatur niedrig ist, ober derselben eintritt. Eine solche Flüssigkeit ist, wie ich glaube, das Quecksilber.

Der Werth von a nimmt bei Quecksilber¹ in niedriger Temperatur mit deren Erhöhung ab, bis er etwa bei 80° ein Minimum wird und dann zunimmt. In diesem Verlaufe wächst also  $\frac{da}{dt}$  vorerst. Wie andere Flüssigkeiten, z. B. das Wasser ober 100°, aber jedenfalls bei einer viel höheren Temperatur, wird nämlich auch das Quecksilber einen Wendepunkt haben, wo jener Quotient ein Minimum ist. Von da an nimmt derselbe mit sinkender Temperatur zu und muss folglich bei einem gewissen tieferen Punkte ein Maximum werden; dies ist der untere Wendepunkt und das erwähnte, unterhalb desselben fallende Minimum von a ist ein unteres Minimum, für welches daher  $\frac{da}{dp}$  positiv sein muss. Man kommt somit zu dem

Schlusse, dass der Ausdehnungscoöfficient des Quecksilbers in gewöhnlicher Temperatur durch Compression zunimmt. Diese Folgerung entbehrt indessen noch der experimentellen Bestätigung. Das Quecksilber würde hiernach, aber bis zu einer viel höheren Temperatur, ein ähnliches Verhalten zeigen wie das Wasser bis 63°.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Nach Wüllner's Ausdehnungsformel in Poggendorf's Annalen, Bd. 153, S. 444.

Wenn diese Folgerung richtig ist, muss das bei Quecksilber vorkommende Minimum von a mit dem Drucke abnehmen. Bei der Kleinheit des gewöhnlichen Druckes hat eine solche Abnahme natürlich sehr bald eine Grenze; wenn es aber möglich wäre, die Flüssigkeit mechanisch oder durch einen allseitigen äusseren Zug stark auszudehnen, so würde man durch hinreichende Dehnung jenes Minimum von a auf Null bringen und negativ machen können.

Es lässt sich eine Flüssigkeit mit positivem  $\frac{da}{dn}$  denken, für welche das untere Minimum von a einen gleichen Werth hat wie für Quecksilber, aber nicht unter dem atmosphärischen, sondern unter einem sehr starken Drucke. Indem mit dessen Verminderung jenes Minimum abnimmt, kann dasselbe bei einem gewissen Drucke Null werden; ein noch kleinerer Druck macht es dann negativ. Diesfalls gibt es jetzt zwei Temperaturen, wobei a = 0 wird: Die eine ist niedriger, die andere höher als diejenige, bei welcher a sein Minimum hat; bei ersterer ist die Dichte ein Minimum, bei letzterer ist sie ein Maximum. Mit Abnahme des Druckes geht der untere Nullwerth von a oder das Dichteminimum auf niedrigere, der obere Nullwerth oder das Dichtemaximum auf höhere Temperaturen über. Die Flüssigkeit würde also, von einer höheren Temperatur her erkaltend, zuerst ein Maximum und bei einer entsprechend niedrigen Temperatur ein Minimum ihrer Dichte erreichen. Es ist nun auch eine Flüssigkeit denkbar, welche durch Erkalten zwar ein Dichtemaximum erreicht, aber bald nach dessen Überschreitung erstarrt. Dies ist der Fall des Wassers.

Befindet sich Wasser bei dem gewöhnlichen Drucke im Dichtemaximum und ist somit für dasselbe a=0, so kann man bei Erniedrigung der Temperatur durch Compression bewirken, dass diese Bedingung erfüllt bleibt. Da der für ein Dichtemaximum selbstverständlich positive Werth von  $\frac{da}{dt}$  bei der auf solche Weise fortgesetzten Compression jedenfalls endlich Null wird, so muss man in deren Verlauf zu einem grössten Drucke kommen, wobei noch a=0 und die Dichte ein Maximum sein kann. Für diesen Druck ist nach der bezüglichen

obigen Begründung  $\frac{d^2a}{dt^2}$  positiv und der Nullwerth von a ein Minimum. Da der genannte Quotient für a=0 bei 4° bekanntlich negativ ist, so muss er während des Überganges zu jenem letzten oder untersten Dichtemaximum irgendwo das Vorzeichen gewechselt haben; dies ist der untere, einem Maximum von  $\frac{da}{dt}$  entsprechende Wendepunkt, welcher dem unteren Minimum von a vorangehen muss.

Bei dem grössten für a=0 möglichen Drucke fällt das Maximum der Dichte mit dem entsprechenden, durch die Compression gleichzeitig aufwärts gerückten Minimum derselben zusammen (Halt- und Wendepunkt der Dichte). Das in diesem Punkte nullgleiche Minimum von a wird nun durch weitere Compression positiv; die Dichte der Flüssigkeit erreicht folglich dann bei keiner Temperatur mehr ein Maximum. Von einer diesbezüglichen Anomalie des Wassers kann daher nur insoferne die Rede sein, als bei demselben das bei anderen Flüssigkeiten gewöhnliche Verhalten erst unter einem sehr starken Drucke eintritt. Diesen Einfluss des Druckes hat Amagat auf Grund seiner Versuche ausführlich hervorgehoben.

Ob sich Wasser bei dem dazu nöthigen Drucke bis zu der jedenfalls sehr niedrigen Temperatur des untersten Dichtemaximums flüssig erhalten lässt, muss allerdings dahingestellt bleiben; die Möglichkeit scheint aber nicht unbedingt ausgeschlossen zu sein. Dass übrigens die Druckzunahme, welche zur Verschiebung des Dichtemaximums um 1° nöthig ist, mit steigender Compression, der Annäherung an ein Maximum derselben gemäss, kleiner wird, ist in Amagat's bezüglichen Angaben erkennbar ausgesprochen.

Erwähnenswerth ist noch, dass, weil das untere Minimum von a, mit steigender Compression auf höhere Temperaturen verschoben, schliesslich den peripetischen Punkt trifft, für diesen die Temperatur und der Druck nothwendig höher sind als für den Halt- und Wendepunkt der Dichte und dass folglich dort der Werth von a in jedem Falle positiv sein muss.

Man denke sich zum Schlusse eine Flüssigkeit so comprimirt, dass das obere, durch den kritischen Punkt bedingte Maximum von a im oberen Wendepunkte mit dem bezüglichen Minimum coincidire. Dann ist  $\frac{da}{dt} = 0$ ; lässt man jetzt bei constantem Drucke die Temperatur sinken, so wird dieser Quotient negativ, erreicht bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum und nimmt dann zu, bis er bei einer niedrigen Temperatur wieder verschwindet; hier hat a ein Maximum und unterhalb desselben, jenseits des unteren Wendepunktes, ein Minimum. Durch stärkere Compression fallen endlich auch diese zwei Haltpunkte zusammen; der dann obwaltende Druck ist der peripetische. Für Drucke ober dieser Grenze nimmt a von einem beliebig tief liegenden Punkte an bis zu den höchsten erreichbaren Temperaturen ununterbrochen ab. Der gewöhnliche, nach der herrschenden Ansicht für selbstverständlich gehaltene Verlauf der Wärmeausdehnung erscheint dann vollständig umgekehrt. Die bisherigen Versuche Amagat's, obwohl bei den höchsten Drucken auf ein mässiges Temperaturintervall beschränkt, dürften in dieser Hinsicht schon gegenwärtig kaum einen Zweifel bestehen lassen.

#### Verlauf der Wärmeausdehnung für constante Temperatur.

Wenn in einer Flüssigkeit der für höhere Temperaturen stets negative Quotient  $\frac{da}{dp}$  durch Erkalten positiv wird, so ist a im Punkte des Zeichenwechsels, wie für das Wasser auch experimentell feststeht, als Function des Druckes ein Maximum. Durch Compression nimmt dann a zuerst langsam, aber sich beschleunigend, ab; bei einem gewissen Drucke, einem Wendepunkte entsprechend, ist die Abnahme am schnellsten und wird dann wieder allmälig langsamer. Schliesslich muss a, der Existenz des peripetischen Punktes gemäss, stationär und ein Minimum werden; aber ein solches hat Amagat mit dem höchsten angewendeten Drucke bisher noch bei keiner Flüssigkeit erzielt. Der für das Maximum von a positive Quotient  $\frac{da}{dt}$  wechselt, durch den genannten zweifachen Wendepunkt bedingt, bei dem Übergange das Vorzeichen und ist für das Minimum negativ.

Mit sinkender Temperatur kommen das Maximum und das Minimum, jenes auf grössere und dieses auf kleinere Drucke übergehend, einander immer näher, bis sie im peripetischen Punkte zusammenfallen; bei Temperaturen unterhalb dieses Punktes nimmt a durch Compression beständig zu und es ist nur noch ein Wendepunkt übrig, wo diese Zunahme am langsamsten ist.

Geht man von einem Punkte, wo a als Function des Druckes ein Maximum hat, zu dem der gleichen Temperatur entsprechenden Minimum unter der Bedingung über, dass dabei immer  $\frac{da}{dp} = 0$  bleiben soll, so nimmt a zuerst, als Maximum verlaufend, verzögert ab, wird im peripetischen Punkte stationär und setzt dann, als Minimum verlaufend, seine Abnahme, nun beschleunigt, weiter fort.

Bei Quecksilber muss nach meiner betreffenden obigen Schlussfolgerung der peripetische Punkt jedenfalls höher liegen als das bei ungefähr 80° eintretende Minimum von a; es wird daher bei dieser Flüssigkeit der Ausdehnungscoëfficient für jede gewöhnliche Temperatur durch Compression beständig, wenn auch sehr langsam, zunehmen.

Bei Wasser nimmt a für 0° nach Amagat sowohl mit dem Drucke wie mit der Temperatur zwar noch etwas, aber schon sehr langsam zu; hier dürfte also der peripetische Punkt, wo a in beiden Beziehungen stationär ist, nicht weit von 0° entfernt liegen und durch einen erheblich stärkeren Druck als 3000 Atmosphären wirklich erreichbar sein.

Erhöht man die Temperatur von dem Punkte an, wo a bei dem atmosphärischen Drucke sein Maximum hat, so geht dieses auf kleinere und daher negativ werdende Drucke über, wobei die Flüssigkeit nicht mehr bestandfähig ist, und endlich fällt sogar auch der Wendepunkt auf solche Drucke; dann nimmt a durch Compression von Anfang an mit fortwährend sich vermindernder Geschwindigkeit ab. Bei Flüssigkeiten, deren kritischer Punkt mässig hoch liegt, tritt der letztere Fall thatsächlich schon bei gewöhnlichen Temperaturen ein.

Während sonach das Maximum von a von einer gewissen Temperatur an wegen der für diese Bedingung eintretenden

Instabilität der Flüssigkeit sich der Beobachtung entzieht und erst im kritischen Punkte wieder zum Vorschein kommt, geht das wegen Stärke der nöthigen Compression bisher dem Experimente gleichfalls unzugängliche Minimum mit steigender Temperatur auf höhere Drucke über, wobei, weil für dasselbe  $\frac{da}{dt}$  negativ ist, a fortwährend abnimmt. Den schliesslichen Verlauf dieses Minimums, welches, sobald dessen Existenz sicher gestellt sein wird, eine wichtige Bedeutung erlangen dürfte, habe ich bereits in der oben citirten Abhandlung erörtert. Ich erwähne hier nur, dass ein durch hohe Temperatur bedingter Nullwerth und Zeichenwechsel von a jedenfalls zuerst in einem Minimum dieser Grösse eintreten wird.

Comprimit man eine Flüssigkeit bei ihrer kritischen Temperatur, wo a als Function des Druckes ein Maximum  $= \infty$  ist, so nimmt der diesbezügliche Werth des Productes pv zuerst ab, erreicht aber, wie man weiss, bald ein Minimum und fängt dann schnell zu wachsen an; hierbei nimmt das Product apv zuerst noch ab, muss aber ebenfalls bald ein Minimum werden, und erst nach dessen Überschreitung wird endlich auch der Eintritt des Minimums von a erfolgen. Immer aber, wenn bei Compression das Minimum von apv früher eintritt als dasjenige von a, muss letzteres noch positiv sein; sobald nämlich diese zwei Minima zusammenfallen, ist

$$a = \frac{da}{dp} = 0,$$

und die entsprechende Temperatur ist die niedrigste, wobei durch Erwärmung a=0 (die Dichte ein Minimum) werden kann. Diese Temperatur liegt jedoch, wie es nach Amagat's Versuchen scheint, jedesmal weit ober der kritischen.

#### Verlauf der Zusammendrückbarkeit mit der Temperatur.

Zwischen dem Ausdehnungscoëfficienten a und der Zusammendrückbarkeit

$$c = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp}$$

356 C. Puschl,

besteht ihrer Bedeutung gemäss allgemein die einfache Beziehung

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{da}{dp}.$$

Man sieht, dass, wenn a durch Compression abnimmt, c durch Erwärmung wächst, und dass umgekehrt, wenn a durch Compression wächst, c durch Erwärmung abnimmt. Ist a durch Druck ein Maximum, so ist, der Gleichung

$$\frac{d^2c}{dt^2} = -\frac{d^2a}{dpdt}$$

entsprechend, c durch Wärme ein Minimum.

Wie bei Wasser bis 63°, wird nach dem obigen auch bei Quecksilber, aber hier bis zu einem viel höheren Punkte, die Zusammendrückbarkeit mit steigender Temperatur abnehmen. Bisher liegt in dieser Hinsicht eine experimentelle Angabe nicht vor.

Wie für ein Maximum von a wird auch für das bei gleicher Temperatur durch hinreichende Compression zu erwartende Minimum wieder  $\frac{dc}{dt} = 0$ , wobei c gleicherweise wieder als Function der Temperatur ein Minimum ist. Beide Minima von c nähern sich mit sinkender Temperatur einander und im peripetischen Punkte fallen sie zusammen. Die hier stattfindende Temperatur ist die niedrigste, wobei die Zusammendrückbarkeit ein Minimum werden kann. Von diesem Punkte an nimmt dieselbe durch Erkalten, so lange die Flüssigkeit als solche bestehen bleibt, fortwährend zu.

#### Kritische Anomalie.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihre Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein starkes Maximum, wofür

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

ist. Unterhalb ihres Maximums hat dieselbe einen Wendepunkt. wo sie am schnellsten zunimmt, und oberhalb einen zweiten Wendepunkt, wo sie am schnellsten abnimmt; für beide Wendepunkte ist

$$\frac{d^2c}{dt^2}=0,$$

aber der Quotient  $\frac{dc}{dt}$  ist im unteren ein Maximum und im oberen, wo er negativ ist, ein Minimum.

In dem Temperaturintervalle zwischen den zwei Wendepunkten und daher auch für das Maximum von c ist der Quotient  $\frac{d^2c}{dt^2}$  negativ, wogegen derselbe unter- und oberhalb jenes Intervalles positiv ist. Vermöge der Gleichung

$$\frac{d^2c}{dt^2} = -\frac{d^2a}{dpdt}$$

ist folglich für Temperaturen innerhalb des genannten Intervalles

$$\frac{d^2a}{dpdt} > 0$$

oder positiv, während ausserhalb desselben, mit den Angaben Amagat's übereinstimmend, überall

$$\frac{d^2a}{dpdt} < 0$$

oder negativ ist. Jene durch die Existenz des kritischen Punktes bedingte Ausnahme vom gewöhnlichen Verhalten nenne ich die kritische Anomalie.

Für den kritischen Zustand fallen die zwei Wendepunkte von c mit dem dann unendlich grossen Maximum zusammen. Durch einen etwas stärkeren Druck, wie der vorausgesetzte ist, gehen die genannten drei Punkte mit ungleicher Geschwindigkeit, und daher sich von einander entfernend, alle zugleich auf höhere Temperaturen über. Die Verschiebung nach oben ist eine nothwendige Folge davon, dass im kritischen Punkte

 $\frac{dp}{dt}$  = 0 ist und daher in seiner Nähe p und t für jede Zustands-

358 C. Puschl,

änderung annähernd so wechseln, als wenn v constant wäre. Das Intervall zwischen den Wendepunkten von c muss also von Anfang an mit steigender Compression sich erweitern.

Nach dem Gesagten ist der Quotient  $\frac{d^3c}{dt^3}$  im unteren Wendepunkte negativ, im oberen positiv; zwischen beiden liegt daher eine Temperatur, bei welcher

$$\frac{d^3c}{dt^3} = 0$$

und somit der negative Werth von  $\frac{d^2c}{dt^2}$  ein Minimum ist. Für den kritischen Zustand ist dieses Minimum  $=-\infty$ ; durch Compression wird es schnell abgeschwächt, und es muss einen Druck geben, der dasselbe auf Null bringt. Lässt man bei der Compression die Temperatur so wechseln, dass  $\frac{d^2c}{dt^2}$  immer in seinem Minimum und also die entsprechende obige Bedingung erfüllt bleibt, so wird man demnach zu einem Drucke kommen, wobei

 $\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{d^3c}{dt^3} = 0$ 

ist; hier fallen die zwei Wendepunkte zusammen und die kritische Anomalie ist verschwunden. Das Temperaturintervall, in welchem der Amagat'sche Satz nicht gilt, erweitert sich also durch Compression zuerst, erreicht dabei eine grösste Erstreckung und zieht sich dann zusammen, bis es zuletzt wieder, wie im kritischen Punkte, auf Null reducirt ist und von da ab entfällt.

Mit demjenigen von c fällt für den kritischen Zustand das Maximum von a zusammen. Ein etwas stärkerer Druck verschiebt auch dieses nach oben; da es zugleich an Grösse abnimmt, ist dann für dasselbe  $\frac{da}{dp}$  negativ und somit  $\frac{dc}{dt}$  positiv, woraus folgt, dass es nun zwischen dem Maximum und dem unteren Wendepunkte von c liegt. Es zeigt also eine Tendenz, sich dem letzteren Punkte zu nähern.

Der Verschiebung des Maximums von a nach oben entspricht der kritischen Anomalie gemäss ein positiver Werth

von  $\frac{d^2a}{dpdt}$ . Da nun dieser Quotient, wo er positiv ist, bei hinreichender Compression nach und nach überall das Vorzeichen wechselt, so muss bei einem gewissen Drucke ein solcher Wechsel auch für die Temperatur des Maximums von a erfolgen; dann hat letzteres die höchste Temperatur erreicht, auf welche es fallen kann, und zugleich fällt es dabei mit dem unteren Wendepunkte von c zusammen. Durch weitere Compression geht dasselbe, diesen Punkt hinter sich lassend, auf immer tiefere Temperaturen herab, bis es mit dem gleichzeitig von unten her kommenden Minimum in dem bezüglichen Wendepunkte zusammentrifft.

Hiermit ist die im Früheren (S. 345) offen gelassene Frage nach dem Verlaufe dieses Maximums von a erledigt. Aus dem als erster Halt- und Wendepunkt der Wärmeausdehnung bezeichneten Zustande geht dasselbe nämlich bei Abnahme des hier den kritischen weit übersteigenden Druckes zunächst auf höhere Temperaturen über, erreicht dabei eine höchste Temperatur ober der kritischen und geht sodann immer tiefer herab, bis es bei dem kritischen Drucke auf die kritische Temperatur fällt.

#### Zusammendrückbarkeit ober der kritischen Temperatur.

Für das Maximum von c bleibt immer  $\frac{da}{dp} = 0$ , d. h. es ist bei demselben jedesmal a als Function des Druckes ein Maximum. Aus der bezüglichen Gleichung

$$\frac{d^2c}{dt^2}dt = \frac{d^2a}{dp^2}dp$$

ersieht man daher, dass das Maximum von c, so lange ein solches besteht, durch Compression nach oben zu gehen fortfährt.

Von jenem Zustande hoher Compression aus, wobei nach dem Vorigen die Wendepunkte von c coincidiren, geht der obere, d. h. derjenige, für welchen  $\frac{dc}{dt}$  ein Minimum ist, bei Abnahme des Druckes auf höhere Temperaturen über, wogegen derselbe

360 C. Puschl,

vom kritischen Zustande aus, wie erwähnt wurde, bei Zunahme des Druckes auf höhere Temperaturen übergeht. Es gibt folglich für diesen Punkt eine höchste Temperatur, auf welche er fallen kann; hat er dieselbe durch Druck erreicht, so kehrt er auf stärkeren Druck um und geht zu tieferen Temperaturen zurück, also dem gleichzeitig von unten her nach oben fortschreitenden Maximum entgegen. Diese zwei Punkte müssen daher bei einem gewissen Drucke zusammentreffen; dann ist

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d^2c}{dt^2} = 0,$$

d. h. hier fällt das Maximum von c bei dem höchsten dafür möglichen Drucke mit einem Minimum zusammen (Halt- und Wendepunkt der Zusammendrückbarkeit). Von diesem Zustande aus geht bei Abnahme des Druckes einerseits das Maximum auf tiefere Temperaturen zurück, bis es dabei auf den kritischen Punkt trifft, während andererseits das Minimum (wie das Maximum mit der Bedingung  $\frac{da}{dp}=0$  zusammenfallend) auf immer höhere Temperaturen fortgeht.

Für Drucke ober dem kritischen bis zu einer gewissen Grenze hat demnach die Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur ober der kritischen ein Maximum und bei einer entsprechend höheren Temperatur ein Minimum; für Drucke ober jener Grenze hat dieselbe kein Maximum und kein Minimum mehr, sondern nimmt mit steigender Temperatur ununterbrochen zu.

Es sei noch hervorgehoben, dass im Zustande der Coincidenz der Wendepunkte von c der Nullwerth von  $\frac{d^2c}{dt^2}$  ein Minimum und somit  $\frac{d^3c}{dt^4}$  positiv ist. Für höhere Temperaturen sind daher die ersten vier Differentialquotienten von c sämmtlich positiv. Ich halte diese Folgerung für weittragend; sie scheint anzudeuten, dass eine comprimirte Flüssigkeit bei Temperaturen ober der kritischen, also ein Gas, bei fortgesetzter Erwärmung durch stetiges und mit Beschleunigung fortschreitendes Wachsen der Zusammendrückbarkeit einem bisher unbe-

kannten Zustande von Instabilität, der Existenz eines oberen kritischen Punktes entsprechend, zugeht.

#### Wärmeausdehnung stark comprimirter Gase.

Nach vorstehender Bemerkung lässt sich jede gasförmige Substanz durch Druck und Wärme auf einen Zustand bringen, wobei dem Zusammenhange zwischen a und c gemäss die Differentialquotienten

$$\frac{da}{dp}, \frac{d^2a}{dpdt}, \frac{d^3a}{dpdt^2}, \frac{d^4a}{dpdt^3}$$

sämmtlich negativ sind. Man kann folglich dann jedesmal durch Compression bewirken, dass die Werthe von

$$\frac{da}{dt}$$
,  $\frac{d^2a}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3a}{dt^3}$ 

mit einander negativ ausfallen, dass also, während der Ausdehnungscoëfficient mit steigender Temperatur beständig abnimmt, zugleich die Geschwindigkeit seiner Abnahme immer grösser wird. Durch solchen ersichtlich an das Verhalten stark comprimirter Flüssigkeiten sich anschliessenden Verlauf muss, wie es scheint, bei hinreichender Erwärmung nothwendig endlich a=0, nämlich die Dichte ein Minimum werden, und zwar umso früher, je höher der ausgeübte Druck ist.

Indem ein so erreichtes Dichteminimum durch stärkeren Druck auf immer tiefere Temperaturen herabgeht, tritt zuletzt, weil a durch Compression ein Minimum wird, der schon oben erwähnte Zustand ein, für welchen

$$\frac{da}{dp} = a = 0$$

und die bezügliche Temperatur die niedrigste ist, wobei die Dichte ein Minimum werden kann. Diesen Zustand wenigstens am Wasserstoff experimentell zu verwirklichen, dürfte vielleicht nicht unausführbar sein. Vom genannten Punkte an als negativ verlaufend und in diesem Sinne beständig wachsend, würde der minimale Ausdehnungscoöfficient bei einer immerhin schon

sehr hohen Temperatur den oberen kritischen Zustand, wofür  $a = -\infty$  wäre, bedingen. Temperaturen von entsprechender Höhe darf man jedenfalls in der Astrophysik für annehmbar halten.

#### Das Gay-Lussac'sche Gesetz.

Bezeichnet T die absolute Temperatur, so kann der Bedeutung von a gemäss die Gleichung

$$aT = 1$$

als der Ausdruck des Gay-Lussac'schen Gesetzes gelten.

Der Ausdehnungscoëfficient a ist für die Gase erfahrungsmässig auch unter gewöhnlichen Umständen vom Drucke nicht unabhängig; nach Amagat wächst er mit demselben, wird bei hinreichender Compression ein Maximum und nimmt dann ab. Angenommen also, es sei das Gay-Lussac'sche Gesetz für irgend eine Temperatur eines Gases von gewöhnlicher Dichte genau giltig und somit aT=1, so wird durch Compression aT>1; setzt man dieselbe fort, bis a sein Maximum überschritten hat und abnimmt, so kommt man zu einem Drucke, wobei wieder aT=1 und daher das genannte Gesetz bei gleicher Temperatur ein zweitesmal genau giltig ist.

Den Einfluss der Temperatur betreffend, wird das Product aT für ein gewöhnliches Gas durch Erkalten nach und nach entschieden grösser und folglich umgekehrt durch Erwärmen kleiner. Bei gleichzeitiger Veränderung des Druckes und der Temperatur muss daher, wenn aT constant bleiben soll, die Gleichung

$$\frac{d(aT)}{dt}dt + T \cdot \frac{da}{dp}dp = 0$$

bestehen. Wie man sieht, geht die Erfüllung des Gay-Lussac'schen Gesetzes mit steigender Temperatur auf grössere Drucke über, bis auf solche Weise  $\frac{da}{dp}=0$ , nämlich a ein Maximum wird; die dann stattfindende Temperatur ist die höchste, bei welcher eine Erfüllung des Gesetzes überhaupt möglich ist. Bei weiterer Compression kehrt die demselben entsprechende Bedingung, das Maximum von a

überschreitend, auf tiefere Temperaturen zurück, und es gibt aus diesem Grunde für jede Temperatur unterhalb jener höchsten zwei Drucke, wobei das Gesetz genau zutrifft.

Die Möglichkeit, dass die Gase bei ihrer Ausdehnung durch die Wärme annähernd das Gay-Lussac'sche Gesetz befolgen, erscheint hiernach für Temperaturen, welche eine gewisse, von der Natur der bezüglichen Substanz abhängige Grenze weitaus übersteigen, bei jedem Drucke völlig ausgeschlossen. Nach dem Sinne der betreffenden Abweichung kann man es für wahrscheinlich halten, dass der Ausdehnungscoëfficient bei weit genug gehender Erwärmung in jedem Falle endlich das Vorzeichen wechselt, wenn auch die dazu nöthige Temperatur bei einem gewöhnlichen Drucke, mit dem Vorigen übereinstimmend, eine ausserordentlich hohe sein dürfte.

·			

## Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung

von

#### Emil Weyr, †

w. M. k. Akad.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1894.)

# I. Allgemeine Sätze über Curven dritter Ordnung vom Geschlechte Eins.

1. Es sei  $a_1a_2...a_n$  eine feste Gruppe einer Involution  $J_{n-1}^n$   $n^{\text{ten}}$  Grades  $(n-1)^{\text{ter}}$  Stufe (in der Folge kurz bezeichnet mit  $J^n$ ) auf einer  $C_3$ ,  $x_1x_2...x_n$  eine variable Gruppe; dann soll  $J^n$  gegeben sein durch die Gleichung

$$x_1x_2...x_n = a_1a_2...a_n$$

oder, indem man  $a_1 a_2 \dots a_n$  mit k bezeichnet, durch

$$x_1x_2\ldots x_n=k$$
.

Da jede  $J^n n^2 n$ -fache Elemente besitzt, so hat die Gleichung  $x^n = k n^2$  Lösungen.

2. Liegen  $x_1x_2x_3$  in einer Geraden, bilden sie also ein Tripel der fundamentalen  $J^3$ , so sei  $x_1x_2x_3=k$ . Liegen  $x_1x_2...x_{3n}$  auf einer  $C_n$ , so sei  $x_1x_2...x_{3n}=k^n$ . Mit andern Worten: Sind abc

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Der Entwurf zu dieser Arbeit ist Mitte December 1892 begonnen und im Laufe des folgenden Jahres mit mehrfachen Unterbrechungen fortgesetzt worden. Die Ausführung hat der am 25. Jänner 1894 verstorbene Verfasser kurz vorher mir übertragen. Indem ich seinem Wunsche nachkomme, bitte ich, dass Mängel in der Darstellung mir zur Last gelegt werden mögen.

drei Punkte in gerader Linie, so sind  $x_1 x_2 ... x_{3n}$  dann auf einer  $C_n$  gelegen, wenn  $x_1 x_2 ... x_{3n} = (abc)^n$  ist.

E. Weyr,

3. Wenn abc und ebenso a'b'c' in gerader Linie liegen, so schneiden aa', bb', cc' die  $C_3$  zum drittenmale in Punkten a''b''c'', die ebenfalls in einer Geraden liegen. Denn aus

$$abc = k$$
 und  $a'b'c' = k$ 

folgt

$$abca'b'c' = k^2$$
;

da ferner auch

$$a a'a'' = k$$
  $b b'b'' = k$   $c c'c'' = k$ 

so ist

$$abc a'b'c'a''b''c'' = k^3;$$

aus der Verbindung beider Resultate folgt thatsächlich

$$a''b''c'' \equiv k$$
.

4. Sind a, b correspondirende Punkte, t ihr gemeinsamer Tangentialpunkt und t' der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie, so ist

$$a^2t = b^2t = abt'$$

somit

$$a^2b^2t^2 = (abt')^2$$

oder  $t^2 = t'^2$ , d. h. t und t' sind ebenfalls correspondirende Punkte.

5. Werden zwei correspondirende Punkte a, b aus einem beliebigen Punkte (o) der  $C_3$  auf diese nach a', b' projicirt, so hat man einerseits

$$a^2 = b^2$$
 (wegen  $a^2t = b^2t$ )

und anderseits

$$aa' = bb'$$
 (wegen  $aa'o = bb'o$ );

aus dem zweiten Ansatze folgt  $a^2a'^2 = b^2b'^2$  und daraus durch Division mit dem ersten  $a'^2 = b'^2$ , womit erwiesen ist, dass auch a', b' correspondirende Punkte sind.

6. Liegen die sechs Punkte abca'b'c' von  $C_3$  auf einer  $C_2$ , so schneiden aa', bb', cc' die Curve zum drittenmale in Punkten a''b''c'' einer Geraden. Denn es ist

$$ahca'h'c' = k^2$$

und

$$aa'a'' = bb'b'' = cc'c'' = k;$$

aus dem zweiten Ansatze ergibt sich

$$abc a'b'c'a''b''c'' = k^3$$

demnach ist a''b''c'' = k, w. z. b. w.

7. Berührt eine  $C_2$  die  $C_3$  in den Punkten abc, so liegen die Tangentialpunkte a'b'c' von abc in einer Geraden. Aus

$$a^2b^2c^2 = k^2$$

und

$$a^2a'=b^2b'=c^2c'=k$$

folgt nämlich zunächst  $a^2b^2c^2a'b'c' = k^3$  und daraus durch Division mit der ersten Gleichung a'b'c' = k.

- 8. Ist a ein Inflexionspunkt von  $C_3$ , so ist  $a^3 = k$ ; ist b ein zweiter, so ist  $b^3 = k$ ; ist x der dritte Schnittpunkt der  $\overline{ab}$ , so hat man abx = k, also  $a^3b^3x^3 = k^3$ , und da  $a^3b^3 = k^2$ , so ist  $x^3 = k$ , d. h. x ist auch ein Inflexionspunkt; es schneidet also die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte zum drittenmale wieder in einem solchen.
- 9. Wenn abcd ein Quadrupel auf  $C_3$  ist, so gehören a, b und c, d einer  $J^2$  an. Das Paar ab bestimmt nämlich eine  $J^2$  und ist x der in ihr dem c entsprechende Punkt, so ist ab = cx, also  $a^2b^2 = c^2x^2$ ; nun ist aber  $b^2 = c^2$ , daher auch  $a^2 = x^2$ ; es kann aber x weder mit a, noch mit b oder c identisch sein, also ist nothwendig  $x \equiv d$ , w. z. b. w. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass ac, bd und ad, bc je einer  $J^2$  angehören.
- 10. Sind a, b zwei correspondirende Punkte, so ist  $a^2 = b^2$  sind a', b' zwei correspondirende Punkte desselben Systems, so ist auch  $a'^2 = b'^2$  und überdies aa' = bb'. Aus letzterer Gleichung folgt durch Multiplication mit a'b'

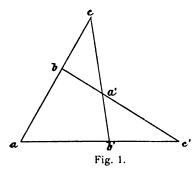
$$aa'^2b'=a'bb'^2$$
,

und hieraus ergibt sich, wenn man die Gleichung  $a'^2 = b'^2$  beachtet, ab' = a'b, d. h. die beiden Geraden ab' und a'b schneiden sich in einem Punkte von  $C_2$ .

11. Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf  $C_3$ , so sind je zwei gegenüberliegende Ecken correspon-

dirende Punkte desselben Systems.« Es ist nämlich vermöge der Voraussetzung (siehe Fig. 1)

$$abc = ab'c' = a'bc' = a'b'c = k$$
:



aus abc = k und ab'c' = k folgt aber  $a^2bcb'c' = k^2$  und aus a'bc' = k und a'b'c = k ergibt sich  $a'^2bcb'c' = k^2$ ; durch Vergleichung erhält man  $a^2 = a'^2$ ; in ähnlicher Weise findet sich  $b^2 = b'^2$  und  $c^2 = c'^2$ .

Da ferner, wie aus dem ersten Ansatze hervorgeht,

ab = a'b' und ac = a'c', so gehören thatsächlich aa', bb' und cc' zu demselben System.

12. Wenn die drei Punkte abc auf  $C_3$  in gerader Linie liegen, so sei abc = k; die Gleichung  $x^3 = k$  hat die neun Inflexionspunkte als die dreifachen Punkte der fundamentalen  $J^3$ , welche die geraden Punktetripel der  $C_3$  bilden, zur Lösung.

Sind dagegen abc Berührungspunkte einer dreifach berührenden  $C_2$ , so muss  $a^2b^2c^2=k^2$  oder  $(abc)^2=k^2$ , somit  $abc=\sqrt{k^2}$  sein. Nun hat  $\sqrt{k^2}$  vier Werthe; einer davon ist k, weil aus abc=k sich  $a^2b^2c^2=k^2$  ergibt; durch die drei andern  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sind die drei  $J^3$ :

- 1)  $a_1b_1c_1 = k_1$
- 2)  $a_2b_2c_2 = k_2$
- 3)  $a_3b_3c_3 = k_3$

bestimmt, welche zu den drei Systemen der dreifach berührenden Kegelschnitte führen. Die Werthe k,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  entsprechen den vier aus der  $J^6$ :  $abcdef = k^2$  abgeleiteten  $J^3$ .

Zwischen den k besteht die aus ihrer Definition unmittelbar fliessende Beziehung

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2$$

<sup>1</sup> Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

Wählt man a, b beliebig, so gibt es vier  $C_2$ , welche in a, b und nochmals in einem dritten Punkte x berühren; dieser ist definirt durch  $a^2b^2x^2 = k^2$ , oder wenn c den dritten Schnittpunkt von  $\overline{ab}$  bezeichnet, durch  $a^2b^2x^2 = a^2b^2c^2$ , woraus  $x^2 = c^2$ ; dies gibt die vier Lösungen x = c,  $x = c_1$ ,  $x = c_2$ ,  $x = c_3$ .

Wenn wir also die Punkte, welche mit c gemeinsamen Tangentialpunkt haben,  $c_1c_2c_3$  nennen, so ist abc = k,  $abc_1 = k_1$ ,  $abc_2 = k_2$ ,  $abc_3 = k_3$ , wodurch  $k_1k_2k_3$  geometrisch definirt sind.

13. Hieraus ergeben sich die Sätze über die drei Systeme conjugirter Punkte; diese sind durch die drei Paare  $cc_1$ ,  $cc_2$ ,  $cc_3$  als erstes, zweites und drittes System gegeben.

Aus den beiden Gleichungen abc = k und  $abc_1 = k_1$  erhält man durch Multiplication  $abck_1 = abc_1k$  und daraus die charakteristische Gleichung

 $ck_1 \equiv c_1 k$  für das erste System,

ebenso

 $ck_2 = c_2 k$  für das zweite System

und

 $ck_3 = c_3k$  für das dritte System.

Auf dieser Grundlage lässt sich der folgende Satz erweisen: Sind abc drei Punkte in einer Geraden und  $a_ib_ic_i$  die ihnen im  $i^{\text{ten}}$  System conjugirten, so bilden diese ein Tripel der betreffenden  $J_i^3$ , sind also Berührungspunkte einer dreifach berührenden  $C_2$ . Es gelten nämlich die vier Gleichungen

$$abc = k$$

$$ak_i = a_i k$$

$$bk_i = b_i k$$

$$ck_i = c_i k;$$

die letzten drei geben durch Multiplication

$$abck_i^2.k_i = a_ib_ic_ik^2.k;$$

hieraus folgt wegen  $k_i^2 = k^2$  und mit Beachtung der ersten Gleichung

$$a_i b_i c_i \equiv k_i$$
, w. z. b. w.

Umgekehrt: \*Ist  $a_ib_ic_i$  ein Tripel der  $J_i^3$ , so liegen die conjugirten Punkte im  $i^{\text{ten}}$  System in einer Geraden. \*Sind nämlich  $aa_i$ ,  $bb_i$  zwei Paare desselben Systems, so ist

$$ak_i = a_i k$$
$$bk_i = b_i k;$$

daraus ergibt sich durch Multiplication unter Beachtung von  $k_i^2 = k^2$ 

$$ab = a_ib_i$$
;

daher schneiden sich  $\overline{ab}$  und  $\overline{a_ib_i}$  in einem Punkte der  $C_3$ , er heisse c. Aus der letzten Gleichung folgt, wenn man sie mit  $a_i$  multiplicirt,  $aa_ib = a_i^2b_i$  und daraus wegen  $a_i^2 = a^2$ 

$$a_i b = a b_i$$

so dass auch  $\overline{a_ib}$  und  $\overline{ab_i}$  sich in  $C_3$  schneiden in einem Punkte c'; nach Artikel 11 ist c' der conjugirte Punkt zu c. Es lässt sich aber zeigen, dass  $c' \equiv c_i$  ist. Denn vermöge des Umstandes, dass. $ab_ic'$  ein gerades Tripel bilden, ist  $c' = \frac{k}{ab_i}$ , somit weiter  $k_ic' = \frac{kk_ic_i}{ab_ic_i}$  oder, da  $b_ic_i = bc$  und abc = k ist, endlich  $k_ic' = k_ic_i$ , woraus thatsächlich  $c' \equiv c_i$  folgt.

14. Es sei  $a_ib_ic_i$  ein Tripel der  $J_i^3$ , so dass  $a_ib_ic_i = k_i$ ; ferner seien abc der Reihe nach die dritten Schnittpunkte der  $\overline{b_ic_i}$ ,  $\overline{c_ia_i}$ ,  $\overline{a_ib_i}$  mit  $C_3$ ; man hat dann

$$ab_ic_i = k$$

$$bc_ia_i = k$$

$$ca_ib_i = k,$$

woraus sich durch Multiplication  $abc a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k^3$  ergibt; es ist aber  $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k_i^2 = k^2$ , folglich abc = k, d. h. die drei Punkte abc liegen in gerader Linie.

Bezeichnet man weiter mit  $\alpha\beta\gamma$  die dritten Schnittpunkte der Geraden  $aa_i$ ,  $bb_i$ ,  $cc_i$  mit der  $C_3$ , so ist

$$aaa_i = k$$
$$\beta bb_i = k$$
$$\gamma cc_i = k,$$

folglich  $\alpha\beta\gamma abc a_i b_i c_i = k^3$ ; da aber abc = k, so ist weiter  $\alpha\beta\gamma a_i b_i c_i = k^2 = k_i^3$ , und wegen  $a_i b_i c_i = k_i$  ergibt sich daraus  $\alpha\beta\gamma = k_i$ , d. h. die drei Punkte  $\alpha\beta\gamma$  bilden ein Tripel des nämlichen Systems.

15. Wieder sei  $a_i b_i c_i$  ein Tripel der  $J_i^3$ ;  $\alpha \beta \gamma$  mögen die Tangentialpunkte seiner Elemente sein; dann gilt

$$a_i^2 \alpha \equiv b_i^2 \beta \equiv c_i^2 \gamma \equiv k$$
,

woraus  $a_i^2 b_i^2 c_i^2 \alpha \beta \gamma = k^3$ ; weil aber  $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k^2 = k^2$ , so folgt  $\alpha \beta \gamma = k$ , d. h. die Tangentialpunkte der Elemente eines Tripels der  $J_i^3$  liegen in gerader Linie.

16. Es seien  $a_ib_ic_i$  und  $a'_ib'_ic'_i$  zwei Tripel desselben Systems,  $\alpha\beta\gamma$  die dritten Schnittpunkte der  $\overline{a_ia'_i}$ ,  $\overline{b_ib'_i}$ ,  $\overline{c_ic'_i}$  mit  $C_3$ ; dann gelten die Gleichungen

$$a_ib_ic_i = a'_ib'_ic'_i = k_i,$$
  

$$aa_ia'_i = \beta b_ib'_i = \gamma c_ic'_i = k;$$

aus den drei letzten folgt  $\alpha\beta\gamma a_ib_ic_ia_i'b_i'c_i'=k^3$ , aus den zwei ersten  $a_ib_ic_ia_i'b_i'c_i'=k_i^3=k^2$ ; daher ist  $\alpha\beta\gamma=k$ , d. h. es liegen  $\alpha\beta\gamma$  in einer Geraden.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen:  $\rightarrow$ Sind  $a_ib_ic_i$  die Punkte eines Tripels,  $\alpha\beta\gamma$  drei Punkte in gerader Linie auf  $C_2$ ,  $a_i'b_i'c_i'$  die dritten Schnittpunkte von  $\overline{a_i\alpha}$ ,  $\overline{b_i\beta}$ ,  $\overline{c_i\gamma}$ , so sind  $a_i'b_i'c_i'$  auch die Punkte eines Tripels desselben Systems.

17. Zwischen den vier Werthen  $kk_1k_2k_3$  bestehen bemerkenswerthe Relationen. Es ist (Artikel 12)

$$abc \equiv k$$
,  $abc_1 \equiv k_1$ ,  $abc_2 \equiv k_2$ ,  $abc_3 \equiv k_3$ ;

aus dem ersten Gleichungspaar folgt

$$a^2b^2cc_1=kk_1,$$

aus dem zweiten

$$k_2k_3\equiv a^2b^2c_2c_3,$$

daraus weiter durch Multiplication

$$kk_1c_2c_3 = k_2k_3c_1;$$

nun bilden aber  $cc_1c_2c_3$  ein Quadrupel, daher ist  $cc_1$  s=  $c_2c_3$ 0; ergibt sich die erste Gleichung des Systems

$$kk_1 = k_2 k_3$$
  
 $kk_2 = k_3 k_1$  (1)  
 $kk_3 = k_1 k_2$ ;

daneben bestehen die Gleichungen

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2. (2)$$

Aus der zweiten der Gleichungen (1) ergibt sich durch Multiplication mit  $k_3$   $kk_2k_3 = k_3^2k_1$  und daraus wegen (2) die erste Gleichung des Systems

$$kk_{2}k_{3} = k_{1}^{3}$$
 $kk_{3}k_{1} = k_{2}^{3}$ 
 $kk_{1}k_{2} = k_{3}^{3}$ . (3)

Es ist ferner  $kk_1^2 = kk^2 = k^3$ , ebenso  $k_1k_2^2 = k_1k_1^2 = k_1^3$ , allgemein

$$k_i k_i^2 = k_i^2. \tag{4}$$

18. »Die Geraden, welche die Punkte zweier Tripel aus zwei verschiedenen Systemen gegenseitig verbinden, schneiden  $C_3$  in einem Tripel des dritten Systems. « Sind nämlich  $a_1b_1c_1$  und  $a_2b_2c_2$  die beiden Tripel,  $\alpha\beta\gamma$  die dritten Schnittpunkte von  $a_1a_2$ ,  $b_1b_2$ ,  $c_1c_2$ , so bestehen die Gleichungen

$$a_1b_1c_1 = k_1 \qquad a_2b_2c_2 = k_2$$
  
$$a_1a_2\alpha = b_1b_2\beta = c_1c_2\gamma = k;$$

daraus ergibt sich zunächst  $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$   $\alpha\beta\gamma=k^3=k_1k_2k_3$  und mit Rücksicht auf das erste Gleichungspaar

$$\alpha\beta\gamma = k_3$$
, w. z. b. w.

19. \*Legt man durch ein Tripel  $a_ib_ic_i$  und einen Punkt m von  $C_3$  eine  $C_2$ , welche  $C_3$  weiter in x, x' schneiden möge, so ist der dritte Schnittpunkt o von xx' der zum Punkte m im iten System conjugirte  $m_i$ « (siehe H. Schroeter, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, 1888, S. 62).

Es ist nämlich

$$a_i b_i c_i m x x' \equiv k^2$$

und

$$k = xx'o$$
,

woraus sich durch Multiplication

$$a_i b_i c_i m = ok$$

ergibt; daraus folgt wegen  $a_i b_i c_i = k_i$ 

$$k_i m = ok$$
;

bezeichnet man aber den zu m im  $i^{\text{ten}}$  System conjugirten Punkt mit  $m_i$ , so ist auch (Artikel 13)

$$k_i m = m_i k$$
,

folglich in der That  $o \equiv m_i$ .

20. \*Liegen sechs Punkte abcdef einer  $C_3$  auf einer  $C_2$  und bestimmt man zu irgend zweien, z. B. ef, die conjugirten in irgend einem System, etwa  $e_i f_i$ , so liegen  $abcde_i f_i$  auch auf einer  $C_2$ . (Schroeter, l. c., S. 70.) Denn es ist

$$abcdef = k^2$$
 $ke_i = k_i e$ 
 $kf_i = k_i f;$ 

daraus ergibt sich durch Multiplication

$$abcde_i f_i = k_i^2 = k^2$$
, w. z. b. w.

\*Bestimmt man zu allen sechs Punkten die conjugirten irgend eines Systems, so liegen auch diese auf einem Kegelschnitt. (Schroeter, 1. c., S. 71). Denn aus den Beziehungen

$$ka_i = k_i a, \quad kb_i = k_i b, \dots kf_i = k_i f$$

erhält man

$$k^6a_ib_ic_id_ie_if_i = k_i^6abcdef$$

und da  $abcdef = k^2$  und  $k_i^6 = k^6$ , so folgt, was zu beweisen war, nämlich  $a_ib_ic_id_ie_if_i = k^2$ .

21. \*Der Gegenpunkt o von vier Punkten abcd auf  $C_3$  ist zugleich Gegenpunkt von den conjugirten Punkten  $a_ib_ic_id_i$  irgend eines Systems.

Man erhält nämlich o, indem man die dritten Schnittpunkte  $\alpha$ ,  $\beta$  von  $\overline{ab}$  und  $\overline{cd}$  verbindet und den weiteren Schnittpunkt dieser Geraden mit  $C_3$  bestimmt; demzufolge ist

$$o=\frac{k}{\alpha\beta}$$
,

und da  $ab\alpha = cd\beta = k$ , so ist  $abcd\alpha\beta = k^2$ , folglich  $\alpha\beta = \frac{k^2}{abcd}$  und daher

$$o = \frac{abcd}{k}$$
.

Nun ist aber weiter

$$ka_i = k_i a$$
  
 $kb_i = k_i b$   
 $kc_i = k_i c$   
 $kd_i = k_i d$ 

demnach  $k^k a_i b_i c_i d_i = k^k abcd$  und wegen  $k^2 = k^k auch$   $k^k = k^k auch$  daher  $a_i b_i c_i d_i = abcd$  und somit auch  $a_i b_i c_i d_i = abcd$  und somit auch  $a_i b_i c_i d_i = abcd$  wodurch der Satz bewiesen ist.

22. \*Liegen die sechs Punkte abcdef von  $C_3$  auf einem Kegelschnitt, so liegen ihre Tangentialpunkte abgröße ebenfalls auf einer  $C_2$ . (Schroeter, l. c., S. 72.) Denn aus

$$a^2\alpha = b^2\beta = \ldots = f^2\varphi = k$$

folgt durch Multiplication  $a^2b^2c^2d^2e^2f^2$   $\alpha\beta\gamma\delta s\varphi = k^6$ ; weil aber voraussetzungsgemäss  $abcdef = k^2$ , so ergibt sich auch  $\alpha\beta\gamma\delta s\varphi = k^2$ , w. z. b. w.

23.  $\rightarrow$  Sind ab...hj die neun Schnittpunkte der  $C_3$  mit einer andern Curve dritter Ordnung, so bilden auch  $ab_i...h_ij_i$  eine solche Gruppe von neun Punkten. (Schroeter, l. c., S. 78.) Nach Voraussetzung ist

$$ab \dots hj = k^3;$$

ferner gelten die Beziehungen

$$kb_i \equiv k_i b, \ kc_i \equiv k c_i, \ldots k j_1 \equiv k_i j,$$

aus welchen durch Multiplication

$$k^8b_ic_i\ldots j_i=k_i^8bc\ldots j$$

erhalten wird; nun ist aber  $k_i^8 = k^8$ , daher  $b_i c_i \dots j_i = b c \dots j$  und daraus

$$ab_ic_i \dots j_i = abc \dots j = k^3$$
, w. z. b. w.

24. Nimmt man aus den drei Tripelsystemen je ein Tripel, so erhält man eine Gruppe von neun associirten Punkten. Denn aus

$$a_1b_1c_1 = k_1$$
,  $a_2b_2c_2 = k_2$ ,  $a_3b_3c_3 = k_3$ 

folgt unmittelbar  $a_1b_1c_1a_2b_2c_2a_3b_3c_3=k_1k_2k_3=k^3$ , womit die Behauptung erwiesen ist.

25. \*Ein Punkt o auf  $C_3$ , sein Tangentialpunkt t, die Berührungspunkte abcd der durch o an  $C_3$  gehenden vier Tangenten und die Diagonal-

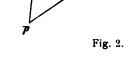
punkte pqr des Vierecks abcd sind neun associirte Punkte. « (Fig. 2).

Zunächst folgt aus ab = cd durch Multiplication mit c, dass

$$abc = c^2d = d^2d = d^3,$$

daher ist

$$abcd = d^4;$$



weiter hat man

 $p = \frac{k}{ab}, \quad q = \frac{k}{bc}, \quad r = \frac{k}{ca},$ 

woraus sich

$$pqr = \frac{k^3}{a^2b^2c^2} = \frac{k^3}{d^6}$$

ergibt; folglich ist nun schon

$$abcdpqr = \frac{k^3}{d^2}$$
,

und da weiter  $o^2 t = k$ , so hat man  $ot = \frac{k}{o}$ , also

$$abcdpqrot = \frac{k^3k}{d^2o};$$

schliesslich bemerke man, dass  $d^2o = k$ , und dann ergibt sich die zu beweisende Relation

$$abcdpqrot = k^3$$
.

26. Es seien  $\alpha\beta\gamma$  drei Punkte in gerader Linie auf  $C_3$ ;  $a_1a_2a_3a_4$  die Berührungspunkte der aus  $\alpha$ ,  $b_1b_2b_3b_4$  die Berührungspunkte der aus  $\beta$ , endlich  $c_1c_2c_3c_4$  die Berührungspunkte der aus  $\gamma$  an  $C_3$  gelegten Tangenten. Man verbinde  $a_i$  mit  $b_{i'}$  (i, i' = 1, 2, 3, 4) und bezeichne mit x den dritten Schnittpunkt von  $a_ib_{i'}$ ; dann ist

$$a_i b_{i'} x = k$$

also auch

$$a_i^2 b_{i'}^2 x^2 = k^2$$
;

nun ist 
$$a_i^2 = \frac{k}{\alpha}$$
,  $b_{i'}^2 = \frac{k}{\beta}$ , daher weiter  $\frac{k^2x^2}{\alpha\beta} = k^2$ 

und weil schliesslich  $\alpha\beta\gamma = k$  ist, so ergibt sich

$$x^2\gamma=k$$
,

- d. h. der dritte Schnittpunkt x ist einer der vier Punkte  $c_1c_2c_3c_4$ ; es geht also jede der sechzehn Geraden, welche sich ergeben, wenn man jeden der vier Punkte  $a_i$  mit jedem der vier Punkte  $b_{i'}$  verbindet, durch einen der vier Punkte  $c_{i''}$ . Wenn man also aus den Punkten eines geraden Tripels die Tangenten an  $C_3$  führt, so liegen die zwölf Berührungspunkte auf sechzehn Geraden derart, dass jede Gerade drei Punkte enthält und durch jeden Punkt vier Gerade gehen. « (Schroeter, l. c., S. 99.)
- 27. »Ist abcd das zum Punkte o gehörige Quadrupel, t der Tangentialpunkt von o und pqr das Diagonaldreieck des Vierecks abcd, so bilden opqr ebenfalls ein Quadrupel, gehörig zum Punkte t.« (Schroeter, l. c., S. 109).

Es ist nämlich  $o=\frac{k}{a^2}$ , daher  $o^2=\frac{k^2}{a^4}$ ; ferner  $p=\frac{k}{ab}$ , folglich  $p^2=\frac{k^2}{a^2b^2}=\frac{k^2}{a^4}$ , weil  $b^2=a^2$ ; durch Vergleichung ergibt sich daraus  $o^2=p^2$ ; in derselben Weise zeigt man  $o^2=q^2=r^2$ ;  $o^2=p^2=q^2=r^2$  aber sagen aus, dass die vier

Punkte opqr einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben, und zwar ist dies t.

28. Es seien a,  $a_1$  zwei conjugirte Punkte des ersten; b,  $b_2$  zwei conjugirte Punkte des zweiten Systems, ferner c der dritte Schnittpunkt von  $\overline{ab}$ , c' der dritte Schnittpunkt von  $\overline{a_1b_2}$  mit der  $C_3$ . Man hat dann

$$ak_1 = a_1k$$
  
$$bk_2 = b_2k,$$

woraus durch Multiplication  $abk_1k_2 = a_1b_2k^2$  erhalten wird; nun ist aber  $ab = \frac{k}{c}$ ,  $a_1b_2 = \frac{k}{c'}$ , folglich weiter  $\frac{k}{c}k_1k_2 = \frac{k}{c'}k^2$  oder  $kc' = \frac{k^3}{k_1k_2}c$ ;

da aber  $k^3 = k_1 k_2 k_3$ , so hat man schliesslich  $kc' = k_3 c$ , d. h.  $c' \equiv c_3$ , wenn c,  $c_3$  ein Paar conjugirter Punkte des dritten Systems ist (Schroeter, l. c., S. 118).

29. Die neun dreifachen Elemente einer  $J^3$  seien  $a_1b_1c_1$ ,  $a_2b_2c_2$ ,  $a_3b_3c_3$ ; dann ist

$$a_1^3 = b_1^3 = c_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 = k$$

Wir wählen einen derselben, z. B.  $a_1$ , als Doppelelement einer  $J^2$ , so müssen die übrigen paarweise dieser  $J_2$  angehören, beispielsweise in solcher Anordnung, dass

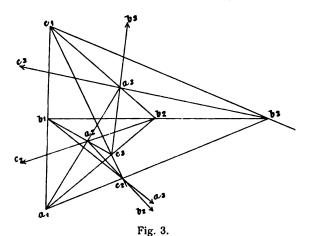
$$a_1^2 \equiv b_1 c_1 \equiv a_2 a_3 \equiv b_2 c_3 \equiv b_3 c_2$$
.

Jedes der vier Paare rechts wird durch  $a_1$  zu einem Tripel der  $J^3$  ergänzt.

Das Paar  $a_2b_1$  wird ebenso durch eines der dreifachen Elemente zu einem Tripel ergänzt;  $a_1$  und  $c_1$  können es nicht sein, weil ja  $a_1$  mit  $b_1c_1$  und  $c_1$  mit  $b_1a_1$  bereits ein Tripel bilden;  $a_3$  ist ausgeschlossen, weil es schon mit  $a_1a_2$  ein Tripel bildet; es muss also eines der vier Elemente  $b_2c_3b_3c_2$  sein. Sei  $c_3$  dieses Element, so dass  $a_2b_1c_3$  ein Tripel der  $J^3$  ist. Dann muss  $a_3c_1$  nothwendig durch  $b_2$  ergänzt werden; denn  $a_1b_1a_2c_3$  sind wie früher ausgeschlossen, so dass nur  $b_2b_3c_2$  als möglich übrig bleiben; nun wird die  $J^3$  durch jene  $J^2$ , deren Doppelelement  $a_2$  ist, in sich übergeführt, so dass das Tripel  $a_2b_1c_3$  wieder in ein

Tripel, und dieses ist  $c_1a_3b_2$ , übergeht; es ist also  $a_3b_2c_1$  ein Tripel der  $J^3$ . Das Paar  $b_1b_2$  kann weder durch  $c_1c_3$ , noch durch  $a_1a_2a_3$  ergänzt werden, sondern nur durch eines der Elemente  $c_2b_3$ ; also möge  $b_3$  es sein, so dass  $b_1b_2b_3$  ein Tripel ist. Dann muss, weil durch jene  $J^2$  dieses Tripel wieder in ein Tripel verwandelt wird, auch  $c_1c_2c_3$  ein Tripel sein. Wir haben also im Ganzen bisher die acht Tripel

$$a_1b_1c_1$$
  $a_1a_2a_3$   $a_1b_2c_3$   $a_1b_3c_2$   
 $a_2b_1c_3$   $a_3b_2c_1$   $b_1b_2b_3$   $c_1c_2c_3$ .



Das Paar  $b_1c_2$  kann weder durch  $a_1$ , noch durch  $c_1b_2$  ergänzt werden, also auch nicht durch  $c_3$  (denn es wird  $c_1c_2$  durch  $c_3$  ergänzt) und ebenso nicht durch  $b_3$  (denn  $b_3c_2$  wird durch  $a_1$  ergänzt); es bleiben also nur  $a_2$  oder  $a_3$ , davon ist  $a_2$  ausgeschlossen, weil  $c_3b_1$  durch  $a_2$  ergänzt wird; folglich ist  $a_3$  das fehlende Element und  $a_3b_1c_2$  wieder ein Tripel der  $J^3$ . Aus diesem geht durch die  $J^2$  das Tripel  $a_2c_1b_3$  hervor. Endlich erkennt man genau in derselben Weise, dass das Paar  $c_2a_2$  durch  $b_2$  ergänzt wird und dass aus diesem Tripel  $a_2b_2c_2$ 

Schreiben wir

durch  $J^2$  das Tripel  $a_3b_3c_3$  entsteht.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

so sind die zwölf Tripel dargestellt durch die drei Horizontalreihen, die drei Verticalreihen und durch die sechs Glieder der Determinante  $\Delta$  (siehe die schematische Fig. 3).

Die vier Gruppen zu je drei Tripeln, welche alle neun Elemente enthalten, sind:

I) 
$$a_1b_1c_1$$
  $a_2b_2c_2$   $a_3b_3c_3$ 

II) 
$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3$$

III) 
$$a_1b_2c_3$$
  $a_2b_3c_1$   $a_3b_1c_2$ 

IV) 
$$a_3b_2c_1$$
  $a_1b_3c_2$   $a_2b_1c_3$ ;

III) stellt die positiven, IV) die negativen Glieder der Determinante  $\Delta$  vor.

Man kann bei Zusammenstellung der Tripel auch in folgender Weise vorgehen. Es sei  $a_1$  Doppelelement  $(a_1^2)$  einer  $J^2$ , welcher  $b_1c_1$ ,  $a_2a_3$ ,  $b_2c_3$ ,  $b_3c_2$  als Paare angehören; dann ist

$$a_1^3 = a_1b_1c_1 = a_1a_2a_3 = a_1b_2c_3 = a_1b_3c_2 = k.$$

Das Paar  $a_2b_1$  kann durch  $a_3$ ,  $c_1$  oder  $a_1$  nicht ergänzt werden; denn sonst müsste z. B.  $a_2a_3b_1=k$  sein; da aber  $a_1a_2a_3=k$  ist, so wäre  $b_1\equiv a_1$ , was nicht angeht, da alle Elemente von einander verschieden sind u. s. w. Es kann also  $a_2b_1$  nur durch eines der Elemente  $c_3b_2c_2b_3$  ergänzt werden; wir bezeichnen das ergänzende Element mit  $c_3$ , so ist  $a_2b_1c_3$  ein Tripel. Nun folgt aus

$$a_1b_1c_1 \equiv a_1a_2a_3 \equiv a_1c_3b_2 \equiv k,$$

dass  $a_1^3$ .  $a_2b_1c_3$ .  $a_3b_2c_1 = k^3$ , und da  $a_1^3 = k$  und  $a_2b_1c_3 = k$ , so ist auch  $a_3b_2c_1 = k$ , und dadurch wieder ein Tripel gefunder. In ähnlicher Weise fährt man mit dem Paare  $b_1b_2$  fort.

Hiernach bestehen also zwischen den neun dreifachen Elementen folgende Relationen:

$$a_{1}^{3} = b_{1}^{3} = c_{1}^{3} = a_{2}^{3} = b_{2}^{3} = c_{2}^{3} = a_{3}^{3} = b_{3}^{3} = c_{3}^{3}$$

$$a_{1}^{2} = b_{1}c_{1} = a_{2}a_{3} = b_{2}c_{3} = b_{3}c_{2}$$

$$b_{1}^{2} = a_{1}c_{1} = b_{2}b_{3} = a_{3}c_{3} = a_{2}c_{3}$$

$$c_{1}^{2} = a_{1}b_{1} = c_{2}c_{3} = a_{2}b_{3} = a_{3}b_{2}$$

$$\vdots$$

$$c_{3}^{2} = a_{3}b_{3} = c_{1}c_{2} = a_{1}b_{2} = a_{2}b_{1}.$$

380 E. Weyr,

Die vier cyklischen E-Beziehungen mit dreielementigen Gruppen erhält man mit Hilfe folgender Sätze.

Satz 1. Wenn  $a_1b_1c_1$  ein Cyklus einer *E*-Beziehung ist, so dass also den Elementen  $a_1b_1c_1$  der Reihe nach die Elemente  $b_1c_1a_1$  entsprechen, so sind diese Elemente dreifache Elemente einer  $J^3$ .

Denn nach Voraussetzung ist

$$a_1c_1 = b_1^2$$
  $a_1b_1 = c_1^2$   $b_1c_1 = a_1^2$ 

somit

$$a_1b_1c_1 = a_1^3 = b_1^3 = c_1^3$$
, w. z. b. w.

Satz II. Wenn  $a_1b_1$  zwei dreifache Elemente einer  $J^3$  sind, so ist die durch sie gegebene E-Beziehung cyklisch.

Es ist nämlich nach Voraussetzung  $a_1^3 = b_1^3$ ; ist  $c_1$  das dem  $b_1$  entsprechende Element, so ist  $a_1c_1 = b_1^2$ ; das dem  $c_1$  entsprechende Element x ist gegeben durch  $b_1x = c_1^2$  oder  $b_1x = \left(\frac{b_1^2}{a_1}\right)^2$ , d. h.  $a_1^2b_1x = b_1^4 = b_1^3b_1 = a_1^3b_1$ , somit ist  $x \equiv a_1$ , where  $a_1$  is the  $a_1$  in the  $a_1$  is the  $a_1$  is the  $a_1$  is the  $a_1$  is the  $a_1$  in the  $a_1$  is the  $a_1$  is the  $a_1$  in the  $a_1$  is the  $a_1$  in the  $a_1$  is the  $a_1$  in the  $a_1$  in the  $a_1$  in the  $a_1$  in the  $a_1$  is the  $a_1$  in

Satz III. »Jedem weiteren dreifachen Element von  $J^3$  entspricht in der *E*-Beziehung wieder ein dreifaches Element, welches von  $a_1b_1c_1$  verschieden ist«

Es sei  $a_2$  ein weiteres dreifaches Element und x das ihm entsprechende; dann muss, weil  $a_1b_1$ ,  $a_2x$  zwei Paare der E sind,  $a_1x=a_2b_1$  sein, also auch  $a_1^3x^3=a_2^3b_1^3$ ; nun ist  $a_1^3=a_2^3$ , daher  $x^3=b_1^3$ , d. h. x ist ein dreifaches Element. Dass x von  $a_2$  verschieden ist, folgt sofort daraus, dass in jeder E-Beziehung einem Element ein von ihm verschiedenes entspricht; es muss aber x auch von  $a_1b_1c_1$  verschieden sein, weil ja diese Gruppe in sich geschlossen ist. Wir setzen also  $x=b_2$ , erhalten dann wie oben noch ein drittes Element  $c_2$ , und die Gruppe  $a_2b_2c_2$  ist wieder geschlossen. Die letzten drei Elemente  $a_3b_3c_3$  müssen natürlich auch eine geschlossene Gruppe bilden. (Weiteres siehe im nächsten Abschnitt.)

## II. E-Beziehungen auf Trägern vom Geschlechte Eins $(C_3)$ .

30. Eine allgemeine eindeutige Punktbeziehung E auf  $C_3$  sei durch a, a' gegeben; ist dann x, x' ein beliebiges Paar der-

selben, so schneiden sich die wechselweisen Verbindungslinien ax' und a'x auf  $C_3$ , folglich ist xa' = x'a oder aber

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$$
.

Durch diese Gleichung ist eine E-Beziehung auf  $C_3$  charakterisirt. Man könnte sie symbolisch auch in der Form  $\frac{x}{x'}=c$ , wo e eine Constante bedeutet, darstellen.

Hieraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

I. In einer *E*-Beziehung gibt es keine oder lauter Doppelpunkte«. Es kann nämlich nie x' = x werden; nur wenn  $a \equiv a'$ , so ist auch  $x \equiv x'$ , dann aber immer.

II. Durch zwei conjugirte Punkte ist eine vertauschungsfähige E-Beziehung gegeben«. Ist  $a^2 = a'^2$ , so folgt aus  $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$  zunächst  $\frac{x^2}{x'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = 1$ , daher  $x^2 = x'^2$ , d. h. x, x' sind auch conjugirte Punkte. Wird nun  $x' \equiv y$  gesetzt, so ist  $x \equiv y'$ ; denn es ist  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$  und für  $y \equiv x'$  wird  $\frac{x}{x'} = \frac{x'}{y'}$ , oder  $xy' = x'^2$ ; weil aber  $x'^2 = x^2$ , so hat man in der That  $y' \equiv x$ , wodurch die Vertauschungsfähigkeit von E erwiesen ist.

III. Aus  $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$  folgt  $x^n a'^n = x'^n a^n$ , d. h. wenn man x und a' jeden n-fach gezählt als Gruppe einer  $J^{2n}$  deutet, so ist auch x'a eine solche Gruppe derselben  $J^{2n}$ .

IV. Wenn  $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$  und  $a^n = a'^n$ , so ist auch  $x^n = x'^n$ , d. h. \*in der durch zwei *n*-fache Elemente einer  $J^n$  bestimmten *E*-Beziehung sind jede zwei entsprechende Elemente *n*-fach für eine  $J^{n_*}$ .

Im Folgenden wird die durch das Punktepaar a a' bestimmte E-Beziehung mit E(a a') bezeichnet.

31. V. • Wenn aa' n-fache Elemente einer  $J^n$  sind, so ist E(aa') cyklisch aa' ist nämlich E(aa') gegeben und man con-

¹ »Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.« Sitzungsber. Bd. LXXXVII, 2. Abth., S. 843.

struirt die Punktreihe xx'x''... derart, dass jedes folgende Element dem vorausgehenden entspricht, so hat man die Relationen

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{x'}{a} = \frac{x''}{a'}, \quad \frac{x''}{a} = \frac{x'''}{a'}, \cdots \quad \frac{x^{(k-1)}}{a} = \frac{x^{(k)}}{a'};$$

aus denselben ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{xx'x''\dots x^{(k-1)}}{a^k} = \frac{x'x''\dots x^{(k)}}{a'^k}$$

oder aber

$$\frac{x}{a^k} = \frac{x^{(k)}}{a^{\prime k}}.$$

Ist nun k Theiler von n, also  $n = \lambda k$ , und sind aa' k-fache Elemente einer der  $\lambda^k$  aus  $J^n$  abgeleiteten  $J^k$ , so sind aa' auch n-fache Elemente für  $J^n$  aber so, dass schon  $a^k = a'^k$ ; dann ist  $x^{(k)} = x$  und die Gruppe  $xx'x'' \dots x^{(k-1)}$  geschlossen. Sind aa' nicht Hauptelemente einer solchen abgeleiteten  $J^k$ , so muss die obige Gleichungsreihe bis  $\frac{x^{(n-1)}}{a} = \frac{x^{(n)}}{a'}$ , fortgesetzt werden und man hat  $\frac{x}{a^n} = \frac{x^{(n)}}{a'^n}$ , woraus wegen  $a^n = a'^n$  folgt, dass  $x^{(n)} \equiv x$ , und es ist der n-elementige Cyklus  $xx' \dots x^{(n-1)}$  geschlossen.

Wir wollen eine cyklische E, welche k-elementige Cyklen liefert, mit  $E_k$  bezeichnen und uns die Frage vorlegen: Wie viele  $E_k$  gibt es?

32. a) Für k=2 ist die Frage bald beantwortet; denn ist x x' ein Cyklus, so muss

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'} \qquad \frac{x'}{a} = \frac{x}{a'},$$

also  $\frac{xx'}{a^2} = \frac{xx'}{a'^2}$ , d. h.  $a^2 = a'^2$  sein; aa' sind also conjugitte Punkte. Den drei Systemen conjugitter Punkte entsprechen also die drei  $E_2$  auf  $C_3$ .

33.  $\beta$ ) Für k=3 liefert der Cyklus xx'x'' die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'} \qquad \frac{x'}{a} = \frac{x''}{a'} \qquad \frac{x''}{a} = \frac{x}{a'};$$

dieselben führen zu  $\frac{xx'x''}{a^3} = \frac{xx'x''}{a'^3}$  oder zu  $a^3 = a'^3$  und zeigen, dass aa' Hauptelemente einer  $J_3^3$  sind.

Es seien nun

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die neun Hauptelemente einer  $J^3$  in der Artikel 29 erörterten Anordnung. In der  $E(a_1b_1)$  entspricht dem Element  $b_1$  das Element  $c_1$  und dem  $c_1$  das  $a_1$ ; denn wird mit  $u_1$  das dem  $b_1$  entsprechende Element bezeichnet, so muss  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{u_1}{b_1}$  oder  $\frac{b_1}{a_1c_1} = \frac{u_1}{b_1c_1}$  sein; nun ist aber  $a_1c_1 = b_1^2$ , daher hat man weiter  $\frac{1}{b_1} = \frac{u_1}{b_1c_1}$ , woraus wirklich  $u_1 \equiv c_1$  folgt u. s. w. Es ist also  $E(a_1b_1) \equiv E_1(b_1c_1) \equiv E(c_1a_1)$  und diese cyklische  $E_3$  möge mit  $E(a_1b_1c_1)$  bezeichnet werden;  $E(a_2b_2c_2)$ ,  $E(a_3b_3c_3)$  stellen die nämliche  $E_3$  dar; denn wenn  $\frac{x}{a_2} = \frac{x'}{b_2}$ , so ist auch  $\frac{x}{a_1a_2} = \frac{x'}{a_1b_2}$ , aber wegen  $a_1b_2 = a_2b_1$  gibt dies  $\frac{x}{a_1a_2} = \frac{x'}{a_2b_1}$ , d. h.  $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1}$ , was bewiesen werden sollte. Wir haben also

$$E(a_1b_1c_1) \equiv E(a_2b_2c_2) \equiv E(a_3b_3c_2)$$

ebenso

$$E(a_1 a_2 a_3) \equiv E(b_1 b_2 b_3) \equiv E(c_1 c_2 c_3) E(a_1 b_2 c_3) \equiv E(a_2 b_3 c_1) \equiv E(a_3 b_1 c_2) E(a_3 b_2 c_1) \equiv E(a_1 b_3 c_2) \equiv E(a_2 b_1 c_3)$$

und dies sind die vier  $E_3$ . Sie sind auch als die  $E(a_1b_1)$ ,  $E(a_1b_2)$ ,  $E(a_1a_2)$  und  $E(a_1b_3)$  gegeben, und zwar sind es die einzigen vier. Dies erkennt man in folgender Weise. Man darf die Elemente eines Cyklus cyklisch permutiren; insbesondere bleibt die cyklische E auch dieselbe, wenn man den Cyklus umkehrt, also z. B. aus  $a_1b_1c_1$  macht  $c_1b_1a_1$ ; nimmt man hierauf Rücksicht, so wird man wahrnehmen, dass in den obigen vier  $E_3$  jedes der acht Elemente  $b_1c_1...c_3$  als dem  $a_1$  ent-

sprechend schon vorkommt; folglich bleibt für eine weitere  $E_3$  kein Element übrig, welches dem  $a_1$  entsprechen könnte.

Es sei xx'x'' irgend ein Cyklus der  $E(a_1b_1c_1)$ , so muss

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \qquad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

oder also  $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{b_1^2}$  sein; nun ist  $b_1^2 = a_1c_1$ , daher weiter  $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{a_1c_1}$ , d. h.  $\frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$ , so dass für die  $E(a_1b_1c_1)$  die Gleichungen bestehen

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$$

und ähnliche Gleichungen gelten für die übrigen.

34. Wird ein Cyklus xx'x'' aus einem Punkte z der  $C_3$  auf diese projicirt (die Projection ganz allgemein durch eine beliebige  $J^3$  hergestellt), so ergibt sich wieder ein Cyklus.

Bezeichnet man die Projectionen von xx'x'' der Reihe nach mit yy'y'', so ist xyz = x'y'z = x''y''z, also auch

$$xy = x'y' = x''y'',$$

woraus  $x : x' : x'' = \frac{1}{y} : \frac{1}{y'} : \frac{1}{y''}$ , und da  $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$ , weiter  $\frac{1}{a_1 y} = \frac{1}{b_1 y'} = \frac{1}{c_1 y''}$  oder

$$a_1 y = b_1 y' = c_1 y''$$

folgt; stellt man diesen Beziehungen die bekannten

$$a_1c_1 = b_1^2 = a_1c_1$$

gegenüber, so ergibt sich durch Division

$$\frac{y}{c_1} = \frac{y'}{b_1} = \frac{y''}{a_1},$$

wodurch erwiesen ist, dass y''y'y wieder einen Cyklus von  $E(a_1b_1c_1)$  darstellen.

35. Es sei xx'x'' ein Cyklus in der  $E(a_1b_1)$ , so ist

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \qquad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

also

$$x' = \frac{b_1}{a_1} x$$
  $x'' = \frac{b_1}{a_1} x' = \frac{b_1^2}{a_1^2} x.$ 

Ist yy'y'' ein zweiter beliebiger Cyklus derselben E, so hat man ebenso

$$y' = \frac{b_1}{a_1} y$$
  $y'' = \frac{b_1^2}{a_1^2} y$ 

und für einen dritten Cyklus zz'z"

$$z' = \frac{b_1}{a_1}z$$
  $z'' = \frac{b_1^2}{a_1^2}z$ .

Aus diesen drei Gleichungspaaren ergibt sich durch Multiplication

$$x'y'z' = \frac{b_1^3}{a_1^3}xyz = xyz$$

$$x''y''z'' = \frac{b_1^6}{a_1^6}xyz = xyz,$$

so dass

$$xyz = x'y'z' = x''y''z'',$$
 (1)

d. h. die drei Tripel xyz, x'y'z', x''y''z'' gehören einer  $J^3$  an.

Da man nun in jedem Tripel die Elemente cyklisch vertauschen darf, so ist auch (wenn die Vertauschung in dem Tripel x x'x'' vorgenommen wird):

$$x'yz = x''y'z' = xy''z''; (2)$$

dagegen erhält man durch Vertauschung der y

$$xy'z = x'y''z' = x''yz''$$
 (3)

und durch Vertauschung der z

$$xyz' = x'y'z'' = x''y''z.$$
 (4)

Weil jedoch

$$x'yz = \frac{b_1}{a_1}xyz, \qquad xy'z = \frac{b_1}{a_1}xyz, \qquad xyz' = \frac{b_1}{a_1}xyz,$$

so gehören die Tripel (2), (3), (4) wieder einer  $J^3$  an.

Führt man in (2), (3), (4) mit dem x-Tripel nochmalige cyklische Vertauschung aus, so ergeben sich die Relationen

$$x''yz = xy'z' = x'y''z''$$
 (2')

$$x'y'z = x''y''z' = xyz'' \tag{3'}$$

$$x'yz' = x''y'z'' = xy''z \tag{4'}$$

und da

$$x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2}xyz, \quad x'y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2}xyz, \quad x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2}xyz,$$

so gehören (2'), (3'), (4') wieder einer  $J^3$  an.

Wenn man in (3'), (4') mit der Vertauschung nochmals vorgeht, so kommt man zu

$$x''y'z = xy''z' = x'yz''$$
 (3")

$$x''yz' = xy'z'' = x'y''z$$
 (4")

und weil

$$x''y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \frac{b_1}{a_1} xyz = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz$$
$$x''yz' = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz,$$

so gehören (3''), (4'') derselben  $J^3$  an wie (1).

Die drei Cyklen xx'x'', yy'y'', zz'z'' aus  $E(a_1b_1)$  lassen sich also dreimal in drei Tripel der Involution  $J^3 = xyz$ , dreimal in drei Tripel der Involution  $J^3 = \frac{b_1}{a_1}xyz$  und dreimal in drei Tripel von  $J^3 = \frac{b_1^2}{a_1^2}xyz$  ordnen. Weitere  $J^3$ , die man noch herstellen kann, fallen mit den eben gefundenen zusammen; so gibt z. B.  $x''y''z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz = \frac{b_1^4}{a_1^4} xyz = \frac{b_1}{a_1} xyz$ , und das

fällt zusammen mit (2), (3), (4); ebenso liefern die reciproken Coëfficienten  $\frac{a_1}{b_1}$ ,  $\frac{a_1^2}{b_1^2}$  nichts Neues, weil  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1b_1^3}{a_1^3b_1} = \frac{b_1^2}{a_1^2}$  und  $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_1^2b_1^3}{a_1^3b_1^2} = \frac{b_1}{a_1}$  ist.

Anmerkung. Man kann, wenn  $a_1b_1$  Hauptpunkte einer bestimmten  $J^3$  sind, zu jeder andern gegebenen  $J^3$  zwei andere von der Form  $\frac{b_1}{a_1}J^3$ ,  $\frac{b_1^2}{a_1^2}J^3$  hinzufügen, d. h. wenn diese  $J^3$  durch ein Tripel xyz gegeben ist, so sind die beiden andern durch die Tripel  $\frac{b_1}{a_1}xyz$ ,  $\frac{b_1^2}{a_1^2}xyz$  bestimmt; der letzten entspricht die erste wie der zweiten die dritte und der ersten die zweite, so dass wir eine cyklische Beziehung von Tripeln der  $J^3$  vor uns haben.

Oben sind die drei von einander verschiedenen Involutionen gegeben durch die Tripel xyz, xyz', xyz''.

## III. Über eine $J_3^4$ auf $C_3$ .

36. Die Berührungspunkte der aus einem Punkte p der  $C_3$  an diese geführten Tangenten seien abcd, die Berührungspunkte

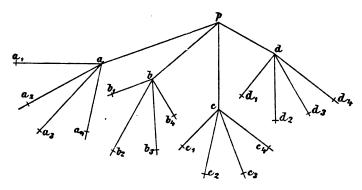


Fig. 4.

der aus abcd gelegten Tangenten seien  $a_ib_ic_id_i$  (i=1,2,3,4) (siehe die schematische Fig. 4). Man kann dann die  $a_ib_ic_id_i$  durch  $a_1b_1c_1d_1$  wie folgt ausdrücken:

endlich

$$a_1b_4 = a_4b_1 = a_2b_3 = a_3b_2 (= w_4a_1b_1)$$

$$a_1c_4 = a_4c_1 = a_2c_3 = a_3c_2 (= w_4a_1c_1)$$

$$a_1d_4 = a_4d_1 = a_2d_3 = a_3d_2 (= w_4a_1d_1)$$

$$b_1c_4 = b_4c_1 = b_2c_3 = b_3c_2 (= w_4b_1c_1)$$

$$b_1d_4 = b_4d_1 = b_2d_3 = b_3d_2 (= w_4b_1d_1)$$

$$c_1d_4 = c_4d_1 = c_2d_3 = c_3d_2 (= w_4c_1d_1)$$

37. Die Involution  $J_3^4$  auf  $C_3$ , welche wir in Betracht ziehen, sei definirt durch die Gleichung

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv kp$$
.

Wir wählen aus jedem der Quadrupel  $a_ib_ic_i$  je einen Punkt, z. B.  $a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}$  und ergänzen dieses Tripel durch x zu einem Quadrupel der  $J_3^3$ ; dann muss der Definition gemäss

$$a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}x=kp$$

somit auch  $a_a^2 b_j^2 c^2 x^2 = k^2 p^2$  oder  $\frac{k}{a} \frac{k}{b} \frac{k}{c} x^2 = k^2 p^2$ , also  $kx^2 = abcp^2$  sein; da aber bc = ad, so hat man auch  $kx^2 = a^2 dp$  und wegen  $a^2 = d^2$  weiter  $kx^2 = d^3p^2$ ; nun ist  $d^2p = k$ , somit  $x^2 = dp = \frac{k}{d} = d_i^2$ ; es ist also x einer der Punkte  $d_i$ . D. h.: »Wählt man aus dreien der Quadrupel  $a_i b_i c_i d_i$  je ein Element, so wird ein solches Tripel jedesmal durch ein Element des vierten Quadrupels zu einem Quadrupel unserer  $J_3^2$  ergänzt.«

Wir wollen nun jenen der Punkte  $d_i$ , welcher mit  $a_1b_1c_1$  ein Quadrupel der  $J_3^{\bullet}$  bildet, mit  $d_1$  bezeichnen, also festsetzen, dass

$$a_1b_1c_1d_1 = kp$$

sei. Es handelt sich jetzt darum, alle möglichen Quadrupel aus den Elementen  $a_ib_ic_id_i$  zu ermitteln.

Zunächst überzeugt man sich durch einen Blick auf die letzten drei Gruppen von Relationen in Artikel 36, dass  $a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}d_{\delta}$  ein Quadrupel der  $J^{4}$  ist, sobald  $\alpha\beta\gamma\delta$  von einander verschieden sind; folglich stellen die 24 Glieder der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ebensoviele Quadrupel dar.

Es ist ferner jede Gruppe der Form  $a_x b_x c_\lambda d_\lambda$   $(x \le \lambda)$  ein Quadrupel der  $J^*$ ; denn es ist ja  $a_x b_x = w_x^2 a_1 b_1$  und  $c_\lambda d_\lambda = w_\lambda^2 c_1 d_1$ , und weil  $w_x^2 = w_\lambda^2 = 1$ , so kommt thatsächlich  $a_x b_x c_\lambda d_\lambda = a_1 b_1 c_1 d_1$ . Es sind also  $a_1 b_1 c_1 d_1$ ,  $a_1 b_1 c_2 d_2$ ,  $a_1 b_1 c_3 d_3$ ,... lauter Quadrupel der  $J^*$ ; wie man bemerkt, befinden sich darunter auch die Horizontalreihen obiger Determinante. Die Abzählung dieser Formen ist leicht; aus jeder Zeile lassen sich sechs Paare bilden, und jedes dieser Paare kann mit vier andern verbunden werden; da es nun vier Zeilen gibt, so entstünden 4.6.4 Verbindungen, von denen aber jede zweimal vorkommt, so dass noch  $\frac{4.6.4}{2} = 48$  Combinationen blieben;

aber jedes der vier Quadrupel  $a_{x}b_{x}c_{x}d_{x}$  ist dabei immer noch dreimal gezählt (nämlich von  $a_{x}b_{x}$ ,  $a_{x}c_{x}$ ,  $a_{x}d_{x}$  herrührend); es müssen daher von obiger Zahl 2.4 = 8 Einheiten subtrahirt werden. Dies gibt 48-8=40 von einander verschiedene Quadrupel der Form  $xx\lambda\lambda$  (oder  $x\lambda x\lambda$  oder  $\lambda\lambda xx$ ). Dies zu den 24 Gliedern der Determinante und zu den vier Quadrupeln  $a_{i}$ ,  $b_{i}$ ,  $c_{i}$ ,  $d_{i}$  (i=1,2,3,4) hinzugefügt, gibt vorläufig 24+4+40=68 Quadrupel.

Um die noch übrig bleibenden zu ermitteln, stellen wir folgende Betrachtung an. Es wird  $C_3$  zum drittenmale geschnitten

von 
$$a_1 a_2$$
 oder  $a_3 a_4$  in  $-\frac{k}{a_1 a_2} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{b}{a} a_1} = \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{b} = b$ 
 $a_1 a_3 \quad a_2 a_4 \quad \frac{k}{a_1 a_3} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{c}{a} a_1} = \frac{a^2}{c} = \frac{c^2}{c} = c$ 
 $a_1 a_4 \quad a_2 a_3 \quad \frac{k}{a_1 a_4} = \frac{a_1^2 a}{a_1 \frac{d}{a} a_1} = \frac{a^2}{d} = \frac{d^2}{d} = d$ 

von 
$$b_1b_2$$
 oder  $b_3b_4$  in  $\frac{k}{b_1b_2} = -\frac{b_1^2b}{b_1\frac{b}{a}b_1} = a$ 

\*  $b_1b_3$  \*  $b_2b_4$  \*  $\frac{k}{b_1b_3} = -\frac{b_1^2b}{b_1\frac{c}{a}b_1} = \frac{ab}{c} = d$ 

\*  $b_1b_4$  \*  $b_2b_3$  \*  $\frac{k}{b_1b_4} = -\frac{b_1^2b}{b_1\frac{d}{a}b_1} = \frac{ab}{d} = c$ 

\*  $c_1c_2$  \*  $c_3c_4$  \*  $\frac{k}{c_1c_2} = -\frac{c_1^2c}{c_1\frac{b}{a}c_1} = \frac{ac}{b} = d$ 

\*  $c_1c_3$  \*  $c_2c_4$  \*  $\frac{k}{c_1c_3} = -\frac{c_1^2c}{c_1\frac{c}{a}c_1} = a$ 

\*  $c_1c_4$  \*  $c_2c_3$  \*  $\frac{k}{c_1c_4} = -\frac{c_1^2c}{c_1\frac{d}{a}c_1} = \frac{ac}{d} = b$ 

\*  $d_1d_2$  \*  $d_3d_4$  \*  $\frac{k}{d_1d_2} = -\frac{d_1^2d}{d_1\frac{b}{a}d_1} = \frac{ad}{c} = b$ 

\*  $d_1d_3$  \*  $d_2d_3$  \*  $\frac{k}{d_1d_3} = -\frac{d_1^2d}{d_1\frac{c}{a}d_1} = \frac{ad}{c} = b$ 

\*  $d_1d_4$  \*  $d_2d_3$  \*  $\frac{k}{d_1d_4} = -\frac{d_1^2d}{d_1\frac{d}{a}d_1} = a$ ;

\*  $b_1b_2$ ,  $b_3b_4$ ;  $c_1c_3$ ,  $c_2c_4$ ;  $d_1d_4$ ,  $d_2d_3$  durch  $a$ 

\*  $a_1a_2$ ,  $a_3a_4$ ;  $c_1c_3$ ,  $c_2c_3$ ;  $d_1d_3$ ,  $d_2d_4$  \*  $b$ 

\*  $a_1a_3$ ,  $a_2a_4$ ;  $b_1b_4$ ,  $b_2b_3$ ;  $d_1d_2$ ,  $d_3d_4$  \*  $c$ 

Man kann sich dieses Verhalten schematisch wie folgt darstellen: Es geht

 $a_1a_1, a_2a_3; b_1b_2, b_2b_3; c_1c_2, c_2c_3$ 

$$a_1a_2$$
 durch  $b \mid b_2b_1$  durch  $a \mid c_3c_1$  durch  $a \mid d_4d_1$  durch  $a$ 
 $a_1a_3 \Rightarrow c \mid b_2b_3 \Rightarrow c \mid c_3c_2 \Rightarrow b \mid d_4d_2 \Rightarrow b$ 
 $a_1a_4 \Rightarrow d \mid b_2b_4 \Rightarrow d \mid c_3c_4 \Rightarrow d \mid d_4d_3 \Rightarrow c;$ 

man bemerkt, dass der zweite Index, je nachdem er 1, 2, 3, 4 ist, auf a, b, c, d respective hindeutet; mit Hilfe dieses Schemas ist man im Stande, sofort den dritten Schnittpunkt eines beliebigen  $a_x a_{\lambda}$  oder  $b_x b_{\lambda}$  u. s. w. anzugeben.

Verknüpfen wir  $a_1a_2$  mit irgend einem  $b_i$ , z. B. mit  $b_2$ , und ist x der vierte Quadrupelpunkt, so muss  $a_1a_2b_2x=a_1a_2a_3a_4$ , somit  $b_2$   $x=a_3a_4=a_1a_2$  sein; d. h.  $b_2$  x und  $a_1a_2$  müssen durch denselben Punkt von  $C_3$  gehen; nun geht  $a_1a_2$  dem obigen Schema zufolge durch b, kein  $b_2b_n$  aber läuft durch den Punkt b, somit führt  $a_1a_2b_2$  zu keinem Quadrupel. Verknüpft man dagegen  $a_1a_2$  mit einem  $c_i$ , z. B.  $c_3$ , und nennt den vierten Punkt x, so folgt aus  $a_1a_2c_3$   $x=a_1a_2a_3a_4$ , dass  $c_3$   $x=a_3a_4=a_1a_2$ ; nun läuft  $c_3c_2$  ebenso durch b wie  $a_1a_2$ , folglich ist  $x=c_2$  und  $a_1a_2c_3c_2$  das gesuchte Quadrupel.

Allgemein: Es seien  $e'e''e'''e^{IV}$  die Elemente irgend einer Verticalreihe; die Gerade e'e'' gehe durch m (wobei m einer der Punkte abcd ist); dann sei  $e_1$  irgend ein Element einer andern Verticalreihe und x das fehlende vierte zu  $e'e''e_1$ , so ist  $e'e''e_1x = e'e''e''e^{IV}$ , also  $e_1x = e'''e^{IV} = e'e''$ , d. h. es ist x so zu bestimmen, dass  $e_1x$  durch denselben Punkt geht wie e'e''.

Nun sind wir in der Lage, jedes Tripel zu einem Quadrupel der  $J^4$  zu vervollständigen. Wäre z. B.  $c_2\,c_3\,a_1$  zu ergänzen, so beachte man, dass  $c_2\,c_3$  durch b geht, und da  $a_1a_2$  auch durch b geht, so ist  $c_2\,c_3\,a_1a_2$  das Quadrupel. Soll  $c_1c_4\,b_2$  vervollständigt werden, so bemerke man, dass  $c_1c_4$  (wie  $c_2\,c_3$ ) durch b geht, und weil b der Tangentialpunkt zu  $b_2$  ist, so ist  $c_1c_4\,b_2\,b_3$  das Quadrupel u. s. w.

Jetzt lässt sich leicht zeigen, dass man auf dem eben entwickelten Wege noch 48 Quadrupel erhält. Wie ein Blick auf das obige Schema lehrt, liefert  $a_1a_2$  mit  $b_i$  kein Quadrupel, dagegen mit  $c_i$  und  $d_i$  je zwei (nämlich  $c_3c_2$  und  $c_1c_4$ , beziehungsweise  $d_4d_2$  und  $d_1d_3$ ), im Ganzen vier; überhaupt gibt jedes der sechs Paare  $a_{\mathbf{x}}a_{\lambda}$  zu vier Quadrupeln Anlass, daher stammen aus der ersten Colonne 6.4 = 24, aus allen vier

Colonnen 4.24 = 96 Combinationen, deren jede aber zweimal vorkommt, so dass wirklich 48 verschiedene Quadrupel der  $J_3^4$  entstehen. Nach dem Schema geordnet sind es die folgenden:

E. Weyr,

$$\begin{array}{c} a_1a_2c_1c_4; \ a_1a_2c_2c_3; \ a_1a_2d_1d_3; \ a_1a_2d_2d_4\\ a_3a_4c_1c_4; \ a_3a_4c_2c_3; \ a_3a_4d_1d_3; \ a_3a_4d_2d_4\\ a_1a_3b_2b_3; \ a_1a_3b_1b_4; \ a_1a_3d_1d_2; \ a_1a_3d_3d_4\\ a_2a_4b_2b_3; \ a_2a_4b_1b_4; \ a_2a_4d_1d_2; \ a_2a_4d_3d_4\\ a_1a_4b_1b_3; \ a_1a_4b_2b_4; \ a_1a_4c_1c_2; \ a_1a_4c_3c_4\\ a_2a_3b_1b_3; \ a_2a_3b_2b_4; \ a_2a_3c_1c_2; \ a_2a_3c_3c_4\\ b_1b_2c_1c_3; \ b_1b_2c_2c_4; \ b_1b_2d_1d_4; \ b_1b_2d_2d_3\\ b_3b_4c_1c_3; \ b_3b_4c_2c_4; \ b_3b_4d_1d_4; \ b_3b_4d_2d_3\\ \\ b_2b_4c_1c_2; \ b_2b_3c_3c_4\\ b_2b_3d_1d_2; \ b_2b_3d_3d_4\\ c_1c_3d_1d_4; \ c_1c_3d_2d_3\\ c_2c_4d_1d_4; \ c_2c_4d_2d_3\\ c_1c_4d_2d_4; \ c_1c_4d_1d_3\\ c_2c_3d_2d_4; \ c_2c_3d_1d_3\\ \end{array}$$

Im Ganzen gibt es also 68+48 = 116 Quadrupel der  $J_3^*$ , welche sich aus je vier von den 16 Elementen  $a_ib_ic_id_i$  zusammensetzen. (Siehe Schroeter, Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, 1890, S. 81 ff., die Configuration der 16 Wendeberührungspunkte einer  $R_4$  betreffend.)

# IV. Über eine allgemeine $J^n$ auf $C_3$ .

38. \*Wenn auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung  $C_3$  eine Involution  $J^n$  nten Grades (n-1)ter Stufe gegeben ist, so besteht für eine jede Elementengruppe die Gleichung  $x_1x_2...x_n = C$ . Man kann nun C immer in der Form  $C = k^{\mu}\alpha$  darstellen, wobei  $k = u_1u_2u_3$  die Gleichung der fundamentalen

 $J^3$  der geraden Tripel (oder einer beliebigen  $J^3$ ) und  $\alpha$  entweder = a, oder  $= \frac{1}{a}$  oder  $= \frac{a}{b}$  ist, wo a, b Punkte der  $C_3$  bedeuten.

Beweis. Für  $J^2$  hat man  $x_1x_2 = C$ , und wenn  $x_1x_2a = k$  so ist  $C = \frac{k}{a}$  (also  $\alpha = \frac{1}{a}$  und  $\mu = 1$ ); a ist das Centrum der  $J^2$ .

Für  $J^3$  ist  $x_1x_2x_3=C$ ; ein beliebiges aber festes Tripel dieser Involution gibt  $a_1a_2a_3=C$ ; ist nun  $a_2a_3b_1=k$ , so ist  $a_2a_3=\frac{k}{b_1}$  und somit  $C=\frac{a_1}{b_1}k$  (also  $\alpha=\frac{a_1}{b_1}$  und  $\mu=1$ ).

Für  $J^{\bullet}$  ist  $x_1x_2x_3x_{\bullet} = C$  und wenn  $x_1x_2x_3x_{\bullet} = ka$  gesetzt wird, so ist C = ka und es bedeutet a das Centrum der  $J^{\bullet}$  oder den Gegenpunkt aller Quadrupel<sup>1</sup> ( $\alpha = a$  und  $\mu = 1$ ).

Für  $J^5$  ist  $x_1x_2x_3x_4x_5=C$ ; wenn  $x_1x_2x_3x_4x_5a=k^2$ , so dass, wenn k die geraden Tripel charakterisirt, a den sechsten Schnittpunkt des durch  $x_1x_2x_3x_4x_5$  gelegten Kegelschnittes bedeutet (das Centrum der Involution  $J^5$ , 2) so ist  $C=\frac{k^2}{a}$  ( $\alpha=\frac{1}{a}$  und  $\mu=2$ ).

Für  $J^6$  ist  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = C$ ; für ein beliebiges aber festes Sextupel hat man  $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = C$  und wenn  $a_2a_3a_4a_5a_6b_1 = k^2$  ist, so folgt  $C = \frac{a_1}{b_1}k^2$  ( $\alpha = \frac{a_1}{b_1}$  und  $\mu = 2$ ).

Allgemein gilt Folgendes:

Wenn

$$\frac{n}{3} = \mu$$
  $\frac{n}{3} = \mu + \frac{1}{3}$   $\frac{n}{3} = \mu + \frac{2}{3}$ 

so ist

$$C = k^{\mu} \frac{a}{h}$$
  $C = k^{\mu} a$   $C = \frac{k^{\mu+1}}{a}$ .

Man ersieht hieraus, dass mit einer Involution  $J^n$  ein fester Punkt (a) der  $C_3$  verknüpft ist, sobald 3 nicht Theiler des Ord-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf Curven vom Geschlechte Eins. Sitzungsber. Bd. LXXXVIII, 2. Abth., Art. 10.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ibid., Art. 14.

nungsexponenten n ist, dagegen eine eindeutige Beziehung E(ab), sobald n durch 3 theilbar ist.

## V. Einer C<sub>3</sub> gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

39. In der Reihe der Punkte  $x_1x_2...x_nx_{n+1}$  auf einer  $C_3$  soll jeder Punkt der Tangentialpunkt des vorhergehenden sein. Hat die fundamentale  $J^3$  der geraden Tripel die Gleichung  $u_1u_2u_3=k$ , so bestehen zwischen jenen Punkten folgende Relationen:

$$x_1^2 x_2 \equiv k$$

$$x_2^2 x_3 \equiv k$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1}^2 x_n \equiv k$$

$$x_n^2 x_{n+1} \equiv k$$
(I)

Wir erheben diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen  $2^{n-1}$ ,  $2^{n-2}$ ... $2^{1}$ ,  $2^{0}$  und schreiben sie, die Fälle eines geraden und eines ungeraden n trennend, in folgender Anordnung:

a) Für ein gerades n.

$$x_{1}^{2^{n}}x_{2}^{2^{n-1}} = k^{2^{n-1}}$$

$$k^{2^{n-2}} = x_{2}^{2^{n-1}}x_{3}^{2^{n-2}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1}^{2^{1}}x_{n}^{2^{1}} = k^{2^{0}}$$

$$k^{2^{0}} = x_{n}^{2^{1}}x_{n+1}^{2^{0}}$$
(II a)

Aus dieser Darstellung erkennt man bald, dass das Resultat der Multiplication lautet:

$$x_1^{2^n}k^{2^{n-2}+2^{n-4}+\cdots+2^0} = x_{n+1}k^{2^{n-1}+2^{n-3}+\cdots+2^1}$$

Nun ist, weil n gerad,

$$2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^1=2\frac{(2^2)^{\frac{n}{2}}-1}{2^2-1}=\frac{2^{n+1}-2}{3}$$

$$2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^0=\frac{(2^2)^{\frac{n}{2}}-1}{2^2-1}=\frac{2^n-1}{3};$$

somit hat man für gerade n endgiltig

$$x_1^{2^n} = x_{n+1}k^{\frac{2^n-1}{3}}.$$
 (IIIa)

 $\beta$ ) Bei einem ungeraden n ordne man die Gleichungen wie folgt:

ihr Product ist

$$x_1^{2^n}x_{n+1}k^{2^{n-2}+2^{n-4}+\cdots+2^n} = k^{2^{n-1}+2^{n-3}+\cdots+2^n};$$

für ein ungerades n hat man aber

$$2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^0=\frac{(2^{2})^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^{2}-1}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$$

$$2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^1=2\frac{(2^2)^{\frac{n-1}{2}}-1}{2^2-1}=\frac{2^n-2}{3};$$

folglich lautet die obige Gleichung in reducirter Form

$$x_1^{2^n} x_{n+1} = k^{\frac{2^{n+1}}{3}}.$$
 (III<sup>9</sup>)

Man kann übrigens beide Fälle in einer Formel zusammenfassen, wenn man bemerkt, dass der Exponent von k der Werth von  $\frac{2^n-(-1)^n}{3}$  und der Exponent von  $x_{n+1}$  auf der rechten

Seite +1 oder -1 ist, je nachdem n gerad oder ungerad. Mithin hat man folgende allgemeine Relation zwischen einem beliebigen Punkte  $x_1$  einer  $C_3$  und seinem  $n^{\text{ten}}$  Tangentialpunkt  $x_{n+1}$ :

$$x_1^{2^n} = x^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$
 (III)

40. Wir wollen, bevor wir auf die geschlossenen Polygone eingehen, von dieser Formel Gebrauch machen, um zu zeigen, wie man aus den aufeinanderfolgenden Tangentialpunkten eines Punktes der  $C_3$  seine Tangentialpunkte verschiedener Ordnungen ableiten kann.

Es sei x der gegebene Punkt von  $C_3$ ,  $x_1$  sein erster,  $x_2$  sein zweiter,... $x_n$  sein  $n^{\text{ter}}$  Tangentialpunkt; dann ist vermöge der Formel (III)

$$x^{2^n} = x_n^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Hiernach ist speciell

$$x^{2}x_{1} = k$$

$$x^{4} = kx_{2}$$

$$x^{8}x_{3} = k^{3}$$

$$x^{16} = k^{5}x_{4}$$

$$x^{32}x_{5} = k^{11}$$

$$x^{64} = k^{21}x_{6} \text{ u. s. w.}$$
(2)

Bezeichnet man ferner mit  $y_1, y_2, ..., y_{\mu}$  den Tangentialpunkt 1., 2.,... $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von x, d. i. den Punkt, in welchem  $C_3$  von der  $C_1, C_2, ..., C_{\mu}$ , welche sie in x 2-, 5-,... $(3\mu-1)$ -punktig berührt, zum letztenmale geschnitten wird, so gelten für diese die Gleichungen

$$x^{2}y_{1} = k$$
 $x^{5}y_{2} = k^{2}$ 
 $x^{8}y_{3} = k^{3}$ 
 $x^{11}y_{4} = k^{4}$ 
 $x^{3\mu-1}y_{\mu} = k^{\mu}$ . (3)

Durch Verbindung der Gleichungen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) ergeben sich nun folgende Constructionen der Punkte  $y_1y_2...$ 

- 1. Es ist  $y_1 = x_1$ .
- 2. Aus  $x^5y_2 = k^2$  folgt  $x^4xy_2 = k^2$  und wegen  $x^4 = kx_2$  weiter  $xx_2y_2 = k$ , d. h.  $y_2$  ist der dritte Schnittpunkt von  $xx_2$ .
  - 3.  $x^8x_3 = k^3$  mit  $x^8y_3 = k^3$  verglichen zeigt, dass  $y_3 = x_3$ .

- 4.  $x^{11}y_4 = k^4$  gibt  $x^8x^2xy_4 = k^4$ , und da  $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$ ,  $x^2 = \frac{k}{x_1}$ , so folgt  $xy_4 = x_1x_3$ , d. h. man ziehe, um  $y_4$  zu erhalten, aus dem dritten Schnittpunkt von  $\overline{x_1x_3}$  eine Gerade nach dem gegebenen Punkte x.
- 5. Aus  $x^{14}y_5 = k^5$  folgt  $x^{16}y_5 = k^5x^2$ , oder da  $x^{16} = k^5x_4$  und  $x^2 = \frac{k}{x_1}$ , so ist  $x_1x_4y_5 = k$ , d. h.  $y_5$  ergibt sich als dritter Schnittpunkt von  $\overline{x_1x_4}$ .
- 6.  $x^{17}y_6 = k^6$  in der Form  $x^{16}xy_6 = k^6$  geschrieben gibt wegen  $x^{16} = k^5x_4$  die Relation  $xx_4y_6 = k$ , welche lehrt, dass sich  $y_6$  als dritter Schnitt von  $\overline{xx_4}$  ergibt.
- 7. Aus  $x^{20}y_7 = k^7$  folgt, wenn man beachtet, dass  $x^{16} = k^5x_4$  und  $x^4 = kx_2$  ist,  $x_2x_4y_7 = k$ , d. h.  $y_7$  ist der dritte Schnittpunkt von  $x_2x_4$ .
- 8. Schreibt man  $x^{23}y_8 = k^8$  in der Gestalt  $\frac{x^{16}x^8}{x}y_8 = k^8$  und bemerkt, dass  $x^{16} = k^5x_4$  und  $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$ , so folgt  $x_4y_8 = xx_3$ ; man hat also  $x_4$  aus dem dritten Schnittpunkt von  $\overline{xx_3}$  auf  $C_3$  zu projiciren, um  $y_8$  zu erhalten.
  - 9. Aus  $x^{26}y_9 = k^9$  oder  $x^{16}x^8x^2y_9 = k^9$  ergibt sich

$$k^5 x_4 \frac{k^3}{x_3} \frac{k}{x_1} y_9 = k^9$$

und daraus  $x_4y_9 = x_1x_3$ , d. h. der dritte Schnittpunkt von  $x_1x_3$  mit  $x_4$  verbunden gibt  $y_9$ .

- 10. Stellt man  $x^{29}y_{10} = k^{10}$  in der Form  $\frac{x^{32}}{x^3}y_{10} = k^{10}$  dar und beachtet, dass  $x^{32} = \frac{k^{11}}{x_5}$  und  $x^2 = \frac{k}{x_1}$ , so folgt  $x_1y_{10} = xx_5$ ; man hat also  $x_1$  mit dem dritten Schnittpunkt von  $\overline{xx_5}$  zu verbinden.
- 11. Die Vergleichung von  $x^{32}y_{11} = k^{11}$  und  $x^{32}x_5 = k^{11}$  gibt  $y_{11} = x_5$ ; die  $C_{11}$ , welche die  $C_3$  in x 32-punktig berührt, schneidet sie nochmals im fünften Tangentialpunkt.
- Auf ähnlichem Wege erhält man durch entsprechende
   Combination von (α), (β) die Gleichungen

$$xy_{12} = x_1x_5$$

$$x_2y_{13} = x_1x_5$$

$$xy_{14} = x_3x_5$$

$$x_2y_{15} = x_3x_5$$

$$x_4y_{16} = xx_5$$

$$x_4y_{17} = x_1x_5 \text{ u. s. w.,}$$

aus welchen die einfachen Constructionen für  $y_{12}, y_{13}, \dots y_{17}$  zu entnehmen sind.

41. Soll das n-Eck  $x_1x_2...x_{n+1}$  (Art. 39) geschlossen sein, so muss der n<sup>te</sup> Tangentialpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfallen, also  $x_{n+1} \equiv x_1$  sein; demnach ist ein Punkt x der  $C_3$ , von welchem aus sich ein geschlossenes der  $C_3$  gleichzeitig um- und eingeschriebenes n-Eck construiren lässt, charakterisirt durch die Gleichung

$$x^{2^{n-1}} = k^{\frac{2^n-1}{3}} \quad \text{für ein gerades } n \tag{IV}^{\alpha}$$

$$x^{2^{n+1}} = k^{\frac{2^{n}+1}{3}} \quad \text{für ein ungerades } n \qquad (IV^{\beta})$$

oder in Zusammenfassung beider Fälle durch die Gleichung

$$x^{2^{n}-(-1)^{n}} = k^{\frac{2^{n}-(-1)^{n}}{3}}.$$
 (IV)

Dies gibt den Satz: »Die Ecken der einer  $C_3$  gleichzeitig um- und eingeschriebenen n-Ecke sind die Hauptpunkte<sup>1</sup> einer Involution vom Grade  $2^n$ — $(-1)^n$ .«

Die fundamentale  $J^3$  hat die Gleichung x'x''x'''=k; die  $J^{3\mu}$ , welche Curven  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung auf  $C_3$  bestimmen, hat die Gleichung

$$x'x''x''' \dots x^{(3\mu-1)}x^{(3\mu-1)}x^{(3\mu)} = k^{\mu},$$

ihre Hauptpunkte fliessen aus der Gleichung

$$x^{3\mu}=k^{\mu}$$
;

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wir nennen die n-fachen Elemente einer  $J^n$  ihre Hauptelemente.

vergleicht man diese mit der oben abgeleiteten (IV), so erkennt man, dass erstere in letztere übergeht, wenn gesetzt wird  $\mu = 3^n - (-1)^n$ ; es sind also die Ecken der *n*-Ecke unter denjenigen Punkten, in welchen die  $C_3$  von Curven  $C_\mu$ , das sind Curven  $[2^n - (-1)^n]^{\text{ter}}$  Ordnung,  $3\mu$ -punktig geschnitten wird.

\*Jeder aus der Gleichung (IV) resultirende Punkt hat die Eigenschaft, dass sein  $n^{\text{ter}}$  Tangentialpunkt mit ihm identisch ist. « Denn nennen wir den letzteren  $x_{n+1}$ , so ist nach (III)

$$x^{2^n} = x_{n+1}^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

nach Voraussetzung aber

$$x^{2^{n-(-1)^n}} = k^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}};$$

daraus folgt durch Division

$$x^{(-1)^n} = x_{n+1}^{(-1)^n},$$

d. h.  $x_{n+1} \equiv x$ , was bewiesen werden sollte.

Unter den  $[2^n-(-1)^n]^2$  Hauptpunkten der Involution  $J^{\mu}$ , aus welchen die Ecken der um- und eingeschriebenen n-Ecke hervorgehen, befinden sich immer auch die neun Inflexionspunkte; denn ist  $x^3=k$ , so ist auch  $x^{3[2^n-(-1)^n]}=k^{2^n-(-1)^n}$ , somit

$$x^{2n-(-1)n} = k^{\frac{2n-(-1)n}{3}}$$

der Gleichung (IV) entsprechend. Scheidet man diese neun Punkte aus, da sie als Ecken nicht auftreten können, so verbleiben noch

$$N_n = [2^n - (-1)^n]^2 - 9$$

Punkte.

Wenn nun n eine Primzahl ist, so ergibt sich als Anzahl der um- und eingeschriebenen n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9}{n}, \tag{V}$$

welche, da ja n ungerad ist, auch geschrieben werden kann

$$\xi_n = \frac{8(2^{n-1}-1)(2^{n-2}+1)}{n}.$$

Wenn n nicht Primzahl, sondern aus den Primfactoren  $n_1, n_2, \ldots n_r$ , deren keiner = 2, zusammengesetzt ist derart, dass  $n = n_1 n_2 \ldots n_r$ , so befinden sich unter den  $N_n$  Punkten auch die Gruppen derjenigen, welche  $n_1$ -,  $n_2$ -,  $\ldots n_r$ -Ecke ergeben; somit ist dann die Anzahl der n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - n_1 \zeta_{n_1} - \dots - n_r \zeta_{n_r}}{n}$$

oder in kürzerer Schreibung

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - \sum_{i=1}^r n_i \zeta_{n_i}}{n}.$$

Diese Formel bleibt auch aufrecht, wenn  $n = 2n_1n_2...n_r$ , weil es Zweiecke nicht gibt.

Ganz allgemein gilt der Satz: »Sind  $t_1, t_2, t_3, \ldots$  die sämmtlichen von 2 und untereinander verschiedenen Theiler von n, so ist die Anzahl der einer  $C_3$  gleichzeitig um- und eingeschriebenen n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9 - \sum_i t_i \zeta_{t_i}}{n}.$$
 (VI)

Anmerkung. Als Zweiecke erhält man bloss die neun Inflexionspunkte. Denn soll  $x_1^2x_2 = k$  und  $x_2^2x_1 = k$  sein, so hat man  $x_1^2x_2 = x_2^2x_1$  und daraus  $x_1 = x_2$ ; dies in  $x_1^2x_2 = k$  gesetzt gibt  $x_1^3 = k$ , durch welche Gleichung aber die neun Inflexionspunkte definirt sind.

Nachstehend sind die Gleichungen (IV) und die Werthe  $\zeta_n$  für  $n=3,4,\ldots 20$  zusammengestellt.<sup>1</sup>

¹ Siehe auch Picquet, »Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques«, Journal de l'École polytechnique, cah. 54.

_
ger
J
=
두
ñ
Anzahl
⋖
80
ng

Anzahl der Polygone	$24 = \frac{9^2 - 9}{3}$	$54 = \frac{15^2 - 9}{4}$	$216 = \frac{33^{2} - 9}{5}$	$648 = \frac{63^{2} - 9 - 3.24}{6}$	$2376 = \frac{129^2 - 9}{7}$	$8100 = \frac{255^2 - 9 - 4.54}{8}$	$29232 = \frac{513^{2} - 9 - 3.24}{9}$	$104544 = \frac{1023^2 - 9 - 5.216}{10}$	$381672 = \frac{2049^2 - 9}{11}$
Charakt. Gleichung	$x^9 = k^3$	$x^{15}=k^5$	$x^{33} = k^{11}$	$x^{63} = k^{21}$	$x^{219}=k^{43}$	$x^{255}=k^{85}$	$x^{513} = k^{171}$	$x^{1023} = k^{341}$	$x^{2049} = k^{663}$
Eckenzahl	က	4	က	9	2	<b>∞</b>	Ô	10	11

 $4095^{2}-9-3.24-4.54-6.648$ 

Anzahl der Polygone

Eckenzahl Charakt. Gleichung

$$x^{4095} = k^{1365}$$

12

1397070 =

$$5163480 = \frac{8193^2 - 9}{13}$$

 $x^{8193} = k^{2731}$ 

33

$$19170432 = \frac{16383^{2} - 9 - 7.2376}{19170432}$$

$$71587080 = \frac{32769^{2} - 9 - 3.24 - 5.216}{15}$$

$$71587080 = \frac{15}{15}$$

$$268423200 = \frac{65535^{*} - 9 - 4.54 - 8.8100}{16}$$

 $x^{65535} = k^{21845}$ 

16

1,32769 = A 10923

5

 $x^{16383} = k^{5461}$ 

 $\pm$ 

$$1010595960 = \frac{131073^2 - 9}{17}$$

$$1010595960 = \frac{131073^2 - 9}{17}$$

 $x^{131073} = k^{43691}$ 

$$3817704744 = \frac{262143^{2} - 9 - 3.24 - 6.648 - 9.29232}{10}$$

 $x^{262143} = k^{87381}$ 

38

$$x^{524289} = k^{174763}$$
 $x^{1048575} = k^{349525}$ 

19

20

$$54975424194 = \frac{1048575^{2} - 9 - 4.54 - 5.216 - 10.104544}{90}$$

5242892—9

14467313448 = -

#### A. Dreiecke.

42. Es sei  $x_1x_2x_3$  (in kurzer Bezeichnung (x)) ein der  $C_3$  um- und eingeschriebenes Dreieck derart, dass  $x_2$  der Tangentialpunkt von  $x_1$ ,  $x_3$  der Tangentialpunkt von  $x_2$  und  $x_1$  der Tangentialpunkt von  $x_3$  ist. In der  $E(x_1x_2)$  entspricht, wie man unmittelbar erkennt, dem  $x_2$  der Punkt  $x_3$  und diesem wieder  $x_1$ , es ist dies also eine der vier  $E_3$  (siehe Artikel 35). Daher bestehen die Gleichungen  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_1}{x_2}$  oder

$$x_1^2 = x_2 x_3$$
  $x_2^2 = x_3 x_1$   $x_3^2 = x_1 x_2$ 

aus welchen sich

$$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_1 x_2 x_3$$

ergibt.

Es sei nun  $i_1$  ein Inflexionspunkt und u der ihm in der  $E(x_1x_2)$  entsprechende Punkt; dann ist  $i_1x_2=ux_1$ , also  $u=\frac{x_2}{x_1}i_1$  und  $u^3=\frac{x_3^2}{x_1^3}i_1^3=i_1^3$ , d. h. es ist u wieder ein Wendepunkt; er möge mit  $i_2$  bezeichnet werden und der ihm in derselben E-Beziehung entsprechende, welcher nothwendig wieder ein Wendepunkt sein wird, mit  $i_3$ , so ist

$$i_2 = \frac{x_2}{x_1} i_1$$
  $i_3 = \frac{x_2}{x_1} i_2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1$ .

Daraus folgt aber  $i_1 i_2 i_3 = i_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} i_1 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 i_1^3 = i_1^3 = k$ , mithin liegen die drei Wendepunkte  $i_1 i_2 i_3$  in einer Geraden. Geht man jetzt von einem weiteren Inflexionspunkte  $i_4$  aus, so führt die  $E(x_1 x_2)$  wieder zu einem Tripel  $i_4 i_5 i_6$  und von  $i_7$  gelangt man ebenso zu  $i_7 i_8 i_9$ , wobei

$$\begin{split} i_5 &= \frac{x_2}{x_1} i_4 \qquad i_6 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_4 \\ i_8 &= \frac{x_2}{x_1} i_7 \qquad i_9 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_7. \end{split}$$

Das betrachtete Dreieck  $x_1x_2x_3$  ist so in bestimmter Weise mit dem Wendepunktsdreiseit, dessen Seiten  $(i_1i_2i_3)\equiv D_{123}$ ,  $(i_4i_5i_6)\equiv D_{456},\ (i_7i_8i_9)\equiv D_{789}$  sind, verknüpft. Im Hinblick auf das Tableau der Wendepunkte

$$i_1$$
  $i_2$   $i_3$ 
 $i_4$   $i_5$   $i_6$ 
 $i_7$   $i_8$   $i_9$ 

wollen wir  $D_{123}D_{456}D_{789}$  als das horizontale,  $D_{147}D_{258}D_{369}$  als das verticale,  $D_{159}D_{267}D_{348}$  als das positive und  $D_{357}D_{681}D_{924}$  als das negative Wendepunktsdreiseit bezeichnen.

43. Wenn man das Dreieck (x) aus  $i_1$  auf  $C_3$  projicirt, so ergibt sich ein neues Dreieck  $(x^{(1)})$ , welches zu demselben Wendepunktsdreiseit gehört, weil ja das Tripel  $i_1i_2i_3$  durch diese Projection in  $i_1i_3i_2$  übergeht. Die Projectionen von (x) aus  $i_2$ ,  $i_3$  seien  $(x^{(2)})$ ,  $(x^{(3)})$  respective, so gehören die Dreiecke (x),  $(x^{(1)})$ ,  $(x^{(2)})$ ,  $(x^{(3)})$  alle demselben Wendepunktsdreiseit zu; es wird sich aber sogleich zeigen, dass sie nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Man hat nämlich

$$x_{1}^{(1)} = \frac{k}{i_{1}x_{1}} = \frac{i_{1}^{3}}{i_{1}x_{1}} = \frac{i_{1}^{2}}{x_{1}}$$

$$x_{2}^{(1)} = \frac{k}{i_{1}x_{2}} = \frac{k}{i_{1}\frac{i_{2}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{k}{i_{2}x_{1}} = \frac{i_{2}^{2}}{x_{1}}$$

$$x_{3}^{(1)} = \frac{k}{i_{1}x_{3}} = \frac{k}{i_{1}\frac{i_{3}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{k}{i_{3}x_{1}} = \frac{i_{3}^{2}}{x_{1}}$$

ferner

$$x_{1}^{(2)} = \frac{k}{i_{2}x_{1}} = \frac{i_{2}^{2}}{x_{1}} = x_{2}^{(1)}$$

$$x_{2}^{(2)} = \frac{k}{i_{2}x_{2}} = \frac{k}{i_{2}\frac{i_{2}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{ki_{1}}{i_{2}^{2}x_{1}} = \frac{i_{1}i_{2}}{x_{1}} = \frac{i_{3}^{2}}{x_{1}} = x_{3}^{(1)}$$

$$x_{3}^{(2)} = \frac{k}{i_{2}x_{3}} = \frac{k}{i_{2}\frac{i_{3}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{ki_{1}}{i_{2}i_{3}(x_{1})} = \frac{i_{1}^{2}}{x_{1}} = x_{1}^{(1)}$$

endlich

$$x_{1}^{(3)} = \frac{k}{i_{3}x_{1}} = \frac{i_{3}^{3}}{i_{3}x_{1}} = \frac{i_{3}^{2}}{x_{1}} = x_{3}^{(1)}$$

$$x_{2}^{(3)} = \frac{k}{i_{3}x_{2}} = \frac{k}{i_{3}\frac{i_{2}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{ki_{1}}{i_{2}i_{3}x_{1}} = \frac{i_{1}^{2}}{x_{1}} = x_{1}^{(1)}$$

$$x_{3}^{(3)} = \frac{k}{i_{3}x_{3}} = \frac{k}{i_{3}\frac{i_{3}}{i_{1}}x_{1}} = \frac{ki_{1}}{i_{3}^{2}x_{1}} = \frac{i_{2}^{2}}{x_{1}} = x_{2}^{(1)};$$

hierbei ist von den Relationen  $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k = i_1 i_2 i_3$  Gebrauch gemacht worden.

Durch Projection von (x) aus  $i_1 i_2 i_3$  erhalten wir also nur ein Dreieck  $(x^{(1)}) \equiv (x')$  mit den Ecken

$$x'_1 = \frac{i_1^2}{x_1}$$
  $x'_2 = \frac{i_2^2}{x_1}$   $x'_3 = \frac{i_3^2}{x_1}$  (1)

und zwar gehen die Geraden

$$x_1x'_1, x_2x'_2, x_3x'_3$$
 durch  $i_1$   
 $x_1x'_2, x_2x'_3, x_3x'_1 \rightarrow i_2$   
 $x_1x'_3, x_2x'_1, x_3x'_2 \rightarrow i_3$ 

Die beiden Dreiecke (x) und (x') erscheinen hiernach durch die Wendepunktsgerade  $D_{123}$  mit einander verknüpft.

In gleicher Weise liefert die Projection von (x) aus  $i_4i_5i_6$  ein mit der Wendepunktsgeraden  $D_{456}$  verknüpftes Dreieck (x'') mit den Ecken

$$x_1'' = \frac{i_{\frac{1}{4}}^2}{x_1} \qquad x_2'' = \frac{i_{\frac{5}{5}}^2}{x_1} \qquad x_3'' = \frac{i_{\frac{6}{6}}^2}{x_1} \tag{2}$$

und es gehen die Geraden

$$x_1 x_1'', x_2 x_2'', x_3 x_3'' \text{ durch } i_4$$
 $x_1 x_2'', x_2 x_3'', x_3 x_1'' \Rightarrow i_5$ 
 $x_1 x_3'', x_2 x_1'', x_3 x_2'' \Rightarrow i_6$ 

Endlich ist mit (x) durch  $D_{789}$  ein viertes Dreieck (x''') verbunden, dessen Ecken

$$x_1''' = \frac{i_1^2}{x_1} \qquad x_2''' = \frac{i_8^2}{x_1} \qquad x_3''' = \frac{i_9^2}{x_1}$$
 (3)

sind; dabei gehen die Geraden

$$x_1 x_1''', x_2 x_2''', x_3 x_3''' \text{ durch } i_7$$
  
 $x_1 x_2''', x_2 x_3''', x_3 x_1''' \rightarrow i_8$   
 $x_1 x_3''', x_2 x_1''', x_3 x_2''' \rightarrow i_9$ 

Wir legen nun das Dreieck (x') zu Grunde und leiten aus demselben in der nämlichen Art Dreiecke ab; mit  $D_{123}$  combinirt ergibt (x') wieder das Dreieck (x), dagegen liefert es mit  $D_{456}$  ein neues Dreieck  $(\xi)$ , dessen Ecken sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k}{i_4 x_1'} = \frac{i_4^2}{x_1'} = \frac{i_4^2}{\frac{i_1^2}{x_1}} = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2} \\ \xi_2 &= \frac{k}{i_4 x_2'} = \frac{i_4^2}{x_2'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} \\ \xi_3 &= \frac{k}{i_4 x_2'} = \frac{i_4^2}{x_2'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} \end{aligned}$$

also

$$\xi_1 = \frac{i_1^2 x_1}{i_1^2}$$
  $\xi_2 = \frac{i_2^2 x_1}{i_2^2}$   $\xi_3 = \frac{i_4^2 x_1}{i_3^2}$  (4)

und es gehen die Geraden

$$\xi_1 x_1', \xi_2 x_2', \xi_3 x_3' \text{ durch } i_4$$
  
 $\xi_1 x_2', \xi_2 x_3', \xi_3 x_1' * i_5$   
 $\xi_1 x_3', \xi_2 x_1', \xi_3 x_2' * i_6$ 

wie man durch Combination der Werthe (4) und (1) unter Berücksichtigung der zwischen den *i* bestehenden Relationen leicht erkennt.

Durch Verbindung von (x') mit  $D_{789}$  erhält man das Dreieck  $(\xi')$  mit den Ecken

$$\xi_1' = \frac{i_7^2 x_1}{i_1^2}$$
  $\xi_2' = \frac{i_7^2 x_1}{i_2^2}$   $\xi_3' = \frac{i_7^2 x_1}{i_3^2}$ , (5)

und es gehen die Geraden

$$\xi'_1 x'_1, \; \xi'_2 x'_2, \; \xi'_3 x'_3 \; \text{durch} \; i_7$$
 $\xi'_1 x'_2, \; \xi'_2 x'_3, \; \xi'_3 x'_1 \; * i_8$ 
 $\xi'_1 x'_3, \; \xi'_2 x'_1, \; \xi'_3 x'_2 \; * i_9$ 

Wir haben jetzt sechs Dreiecke (x), (x'), (x''), (x'''),  $(\xi)$ ,  $(\xi')$ , welche in Bezug auf das horizontale Wendepunktsdreiseit eine geschlossene Gruppe bilden in dem Sinne, dass aus irgend einem derselben unter Zugrundelegung irgend einer Seite des genannten Dreiseits wieder ein Dreieck dieser Gruppe sich ableitet. Wenn z. B.  $(\xi)$  mit  $D_{789}$  combinirt wird, so hat das abgeleitete Dreieck laut (3) die Ecken

$$\frac{i^2_7}{\xi_1}, \qquad \frac{i^2_8}{\xi^2} \qquad \frac{i^2_9}{\xi^3}$$

da aber  $\xi_1=\frac{i_4^2x_1}{i_1^2}$ , so ist die erste Ecke  $\frac{i_1^2i_2^2}{i_4^2x_1}=\frac{i_4^2}{x_1}=x_1''$  (weil  $i_1i_4i_7=i_4^3$ ), mithin ist ( $\xi$ ) mit (x'') durch  $D_{789}$  verbunden. Man überzeugt sich durch einfache Rechnung, dass verknüpft sind

durch 
$$D_{123}$$
 die Dreieckspaare  $(x)(x'); (\xi)(x'''); (\xi')(x'')$ 

\*  $D_{456}$  \* \*  $(x)(x''); (\xi)(x'); (\xi')(x'')$ 

\*  $D_{789}$  \* \*  $(x)(x'''); (\xi)(x''); (\xi')(x'')$ 

Es vertheilen sich also die 24 einer  $C_3$  um- und eingeschriebenen Dreiecke in Gruppen zu je 6 auf die 4 Wendepunktsdreiseite.

44. Um weitere Beziehungen zwischen den sechs Dreiecken einer Gruppe kennen zu lernen, möge eine andere Bezeichnung eingeführt werden. Es sei die Ecke  $x'_1$  des ersten Dreiecks (x') gegeben, so ist

$$x'_1 = \frac{i_1 x'_1}{i_1}$$
  $x'_2 = \frac{i_2 x'_1}{i_1}$   $x'_3 = \frac{i_3 x'_1}{i_1}$  (6)

Aus (x') leiten wir mittels  $D_{123}$  das Dreieck  $(\xi')$  ab, so ist vermöge (1)

$$\xi_1' = \frac{i_1^2}{x_1'} \qquad \xi_2' = \frac{i_2^2}{x_1'} \qquad \xi_3' = \frac{i_3^2}{x_1'}; \tag{7}$$

durch Vermittlung von  $D_{456}$  ergibt sich aus (x') das Dreieck  $(\xi'')$ , wobei nach (2)

$$\xi_1'' = \frac{i_{\frac{1}{4}}^2}{x_1'} \qquad \xi_2'' = \frac{i_{\frac{5}{5}}^2}{x_1'} \qquad \xi_3'' = \frac{i_{\frac{6}{6}}^2}{x_1'},$$
 (8)

endlich erhält man aus (x') mit Hilfe von  $D_{789}$  das Dreieck  $(\xi''')$ , für welches nach (3)

$$\xi_1''' = \frac{i_7^2}{x_1'} \qquad \xi_2''' = \frac{i_8^2}{x_1'} \qquad \xi_3''' = \frac{i_9^2}{x_1'}$$
 (9)

Legt man jetzt ( $\xi'$ ) zu Grunde, so gibt  $D_{123}$  wieder (x'), dagegen  $D_{456}$  ein neues Dreieck (x''), für welches laut (4)

$$x_1'' = \frac{i_{\frac{1}{4}}^2 x_1'}{i_{\frac{1}{4}}^2} \qquad x_2'' = \frac{i_{\frac{1}{4}}^2 x_1'}{i_{\frac{1}{2}}^2} \qquad x_3'' = \frac{i_{\frac{1}{4}}^2 x_1'}{i_{\frac{1}{3}}^2} \tag{10}$$

und  $D_{789}$  liefert (x'''), wobei nach (5)

$$x_{1}^{\prime\prime\prime} = \frac{i_{1}^{2} x_{1}^{\prime}}{i_{1}^{2}} \qquad x_{2}^{\prime\prime\prime} = \frac{i_{7}^{2} x_{1}^{\prime}}{i_{2}^{2}} \qquad x_{3}^{\prime\prime\prime} = \frac{i_{7}^{2} x_{1}^{\prime}}{i_{2}^{2}}$$
(11)

Es gehen nun die Geraden

1 Man kann diesen Ecken auch folgende Darstellung geben. Es ist  $i_1^2 i_1^4 i_7^2 = i_1^6$ , daraus  $\frac{i_4^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_1}$  u. s. w.; in gleicher Weise folgt aus  $i_1^2 i_4^2 i_7^2 = i_1^6$ , dass  $\frac{i_7^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_4^2} = \frac{i_1^2}{i_4^2} = \frac{i_1^2}{i_4^2} = \frac{i_1^2}{i_4^2} = \frac{i_1^2}{i_1^2} = \frac{$ 

$$x'_{1} = \frac{i_{1}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x'_{2} = \frac{i_{3}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x''_{3} = \frac{i_{3}x'_{1}}{i_{1}}$$

$$x'''_{1} = \frac{i_{7}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x'''_{2} = \frac{i_{8}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x'''_{3} = \frac{i_{9}x'_{1}}{i_{1}}$$

$$x'''_{1} = \frac{i_{4}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x'''_{2} = \frac{i_{5}x'_{1}}{i_{1}} \qquad x'''_{3} = \frac{i_{6}x'_{1}}{i_{1}}$$

$$x_1'\xi_1''', x_2'\xi_2''', x_3'\xi_3'''$$
 durch  $i_1$   $x_1'''\xi_1', x_2'''\xi_2', x_3'''\xi_3'$  durch  $i_2$   $x_1''\xi_2'', x_2'\xi_3'', x_3'\xi_1'''$   $i_3$   $i_4$   $i_5$   $i_6$   $i_7$   $i_8$   $i_9$   $i_$ 

Gepaart sind die Dreiecke

$$\begin{array}{lll} (x')(\xi'); & (x'')(\xi'''); & (x''')(\xi'') \text{ durch } D_{123} \\ (x')(\xi''); & (x'')(\xi'); & (x''')(\xi''') & & D_{456} \\ (x')(\xi'''); & (x'')(\xi''); & (x''')(\xi') & & & D_{789} \end{array}$$

Die sechs Dreiecke erscheinen so in zwei Tripel geordnet, (x'), (x''), (x''') und  $(\xi'), (\xi''), (\xi''')$ , derart, dass keine zwei Dreiecke desselben Tripels mit einander verknüpft sind, dagegen jedes Dreieck des einen Tripels mit jedem Dreieck des andern. Dass die Ecken zweier gepaarten Dreiecke auf einer  $C_2$  liegen, ist leicht zu erkennen; denn man hat beispielsweise für das erste Paar nach (6) und (7)

$$x_1'x_2'x_3'\xi_1'\xi_2'\xi_3' = \frac{i_1i_2i_3x_1'^3}{i_1^3} \cdot \frac{i_1^2i_2^2i_3^2}{x_1'^3} = i_2^3i_3^3 = k^2;$$

solcher  $C_2$  erhält man 3.3 = 9. Es lässt sich ferner der Satz nachweisen: »Wenn man die Ecken zweier Dreiecke aus der Terne (x')(x'')(x''') mit einander verbindet, so schneiden die neun Geraden die  $C_3$  in den Ecken des dritten Dreiecks. Selbstverständlich gilt der Satz auch für die andere Terne. Es ist nämlich der dritte Schnitt von

$$x'_{1}x''_{1} \dots \frac{k}{x'_{1}x''_{1}} = \frac{ki_{1}^{2}}{i_{4}^{2}x'_{1}^{2}} = \frac{ki_{1}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}x'_{1}^{2}} = \frac{i_{1}i_{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{3}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{x'''_{1}}{i_{4}^{2}} = x'''_{2}$$

$$x'_{1}x''_{2} \dots \frac{k}{x'_{1}x''_{2}} = \frac{ki_{2}^{2}}{i_{4}^{2}x'_{1}^{2}} = \frac{ki_{2}^{2}x'_{1}}{i_{3}^{2}x'_{1}^{2}} = \frac{i_{2}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{1}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{1}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{1}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{2}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{2}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = \frac{i_{2}^{2}x'_{1}}{i_{4}^{2}} = x'''_{3}$$

$$(12)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Dabei wird Gebrauch gemacht von der Bemerkung, dass  $x_1^2 x_2^i = x_1^{i_2} x_1^i = k$ , also  $x^{i_3} = \frac{i_1}{i_2} k$  und von den Beziehungen zwischen den *i*-Punkten.

$$x_{2}'x_{1}'' \dots \frac{k}{x_{2}'x_{1}''} = \frac{ki_{1}^{3}}{i_{4}^{2}i_{2}x_{1}'^{2}} = \frac{ki_{2}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}x_{1}'^{3}} = \frac{i_{2}^{3}x_{1}'}{i_{4}^{2}i_{1}} = \frac{i_{1}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}} = x_{1}'''$$

$$x_{2}'x_{2}'' \dots \frac{k}{x_{2}'x_{2}''} = \frac{ki_{1}i_{2}^{2}}{i_{4}^{2}i_{2}x_{1}'^{2}} = \frac{i_{2}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}} = x_{3}'''$$

$$x_{2}'x_{3}'' \dots \frac{k}{x_{2}'x_{3}''} = x_{2}'''$$

$$x_{3}'x_{1}'' \dots \frac{k}{x_{3}'x_{1}''} = \frac{ki_{1}^{3}}{i_{4}^{2}i_{3}x_{1}'^{2}} = \frac{ki_{2}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}x_{1}'^{3}} = \frac{i_{2}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}i_{1}} = \frac{i_{2}^{2}x_{1}'}{i_{4}^{2}} = x_{3}'''$$

$$x_{3}'x_{2}'' \dots \frac{k}{x_{3}'x_{2}''} = \frac{ki_{2}^{2}i_{1}}{i_{4}^{2}i_{3}x_{1}'^{2}} = \frac{ki_{2}^{2}i_{1}x_{1}'}{i_{4}^{2}i_{3}} = \frac{i_{2}^{3}x_{1}'}{i_{4}^{2}i_{3}} = \frac{i_{2}^{3}x_{1}'}{i_{4}^{2}} = x_{2}'''$$

$$x_{3}'x_{3}'' \dots \frac{k}{x_{3}'x_{2}''} = x_{1}'''.$$
(12)

Es liegen also je in einer Geraden die Punktetripel

$$x_1'x_1''x_2'''; x_1'x_2''x_1'''; x_1'x_3''x_3''' x_2'x_1''x_1'''; x_2'x_2''x_3'''; x_2'x_3''x_2'' x_3'x_1''x_3'''; x_3'x_2''x_2'''; x_3'x_3'x_1'' .$$

Man findet ebenso, dass je in einer Geraden liegen die Punkte

Die neun x, neun  $\xi$  und neun i bilden also eine solche Configuration, dass je drei x, drei  $\xi$  und drei i auf einer Geraden liegen (das gibt 3.12 = 36 Gerade) und dass je ein x, ein  $\xi$  und ein i einer Geraden angehören (das gibt 9.9 = 81 Gerade); im Ganzen sind also die 27 Punkte auf 117 Geraden zu je dreien vertheilt. Offenbar bilden die neun x, neun  $\xi$  und neun i drei connexe Gruppen.

45. Die vier cyclischen  $E_3$  sind gegeben durch die Verhältnisse  $\frac{i_2}{i_1}$ ,  $\frac{i_4}{i_1}$ ,  $\frac{i_5}{i_1}$ ,  $\frac{i_6}{i_1}$ , so zwar, dass die einem Punkte z in ihnen entsprechenden Punkte der Reihe nach  $\frac{i_2}{i_1}z$ ,  $\frac{i_4}{i_1}z$ ,  $\frac{i_5}{i_1}z$ ,

 $\frac{i_6}{i_1}z$ . Man erkennt leicht, dass der  $E(i_1i_2)$  folgende Tripel angehören:

 $x'_1 x'_2 x'_3; \ x''_1 x''_2 x''_3; \ x'''_1 x'''_2 x'''_3$   $\xi'_3 \xi'_2 \xi'_1; \ \xi''_3 \xi''_2 \xi''_1; \ \xi'''_3 \xi'''_2 \xi'''_1$   $i_1 i_2 i_3; \ i_4 i_5 i_6; \ i_7 i_8 i_9.$ 

Betrachten wir nun die  $E(i_1i_4)$ , so bemerken wir, dass dieselbe zunächst die Tripel  $i_1i_4i_7$ ,  $i_2i_5i_8$ ,  $i_3i_6i_9$  enthält. Der dem  $x_1'$  entsprechende Punkt ist  $\frac{i_4x_1'}{i_1} \equiv x_1'''$  (s. Fussnote S. 410) und diesem wieder entspricht  $\frac{i_4^2x_1'}{i_1'} \equiv x_1'''$ ; man findet so das folgende Tableau der Tripel in  $E(i_1i_4)$ :

$$x'_1x'''_1x''_1; x'_2x'''_2x'''_2; x'_3x'''_3x''_3$$
  
 $\xi'_1\xi'''_1\xi''_1; \xi'_2\xi''_2\xi''_2; \xi'_3\xi''_3\xi''_3$   
 $i_1i_4i_7; i_2i_5i_8; i_3i_6i_9.$ 

Ebenso erkennt man, dass der  $E(i_1i_6)$  angehören die Tripel

$$x'_1x'''_3x'''_2; x''_1x'_3x''_2; x''_1x''_3x'_2$$
  
 $\xi'_1\xi''''_3\xi''_2; \xi''_1\xi'_3\xi''_2; \xi'''_1\xi''_3\xi'_2$   
 $i_1i_8i_8$   $i_2i_8i_9$   $i_3i_5i_7$ .

Endlich kommen in der  $E(i_1i_5)$  die Tripel vor:

$$x_1'x_2'''x_3''; x_1''x_2'x_3''; x_1'''x_2''x_3'$$
  
 $\xi_1'\xi_2'''\xi_3''; \xi_1''\xi_2'\xi_3''; \xi_1'''\xi_2''\xi_3'$   
 $i_1i_5i_6; i_2i_6i_7; i_3i_6i_8.$ 

46. Es entsteht die Frage, welche von den gefundenen Relationen bestehen bleiben, wenn der Ausgangspunkt  $x_1'$  ein beliebiger Punkt der Curve ist. Aus ihm ergeben sich durch Projection aus den neun i die neun  $\xi$ , für welche die Gleichungen (7), (8), (9) geltend bleiben; ebenso bleiben die Gleichungen (6), (10) und (11) und die darauffolgenden Tableaux aufrecht; dagegen gelten die Gleichungen (12) und die sich daran anschliessenden Bemerkungen nur, wenn  $x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2}k$ . Die Betrachtungen des Art. 45 haben allgemeine Geltung.

47. Aus den Gleichungen (6) bis (12) findet man, dass

$$x_1^{\prime 3} = x_2^{\prime 3} = x_3^{\prime 3} = \frac{i_1}{i_2} k,$$
  $x_1^{\prime \prime 3} = x_2^{\prime \prime 3} = x_3^{\prime \prime 3} = x_1^{\prime \prime 3} = \frac{i_1}{i_2} k,$   $x_1^{\prime \prime \prime 3} = x_2^{\prime \prime \prime 3} = x_3^{\prime \prime \prime 3} = x_1^{\prime \prime 3} = \frac{i_1}{i_2} k$ 

und

$$\xi_{1}^{\prime 3} = \xi_{2}^{\prime 3} = \xi_{3}^{\prime 3} = \frac{i_{2}}{i_{1}}k, \qquad \xi_{1}^{\prime \prime 3} = \xi_{2}^{\prime \prime 3} = \xi_{3}^{\prime \prime 3} = \frac{i_{2}}{i_{1}}k,$$
$$\xi_{1}^{\prime \prime \prime 3} = \xi_{2}^{\prime \prime \prime 3} = \xi_{3}^{\prime \prime \prime 3} = \frac{i_{2}}{i_{1}}k,$$

also allgemein

$$x^3 = \frac{i_1}{i_2} k, \qquad \xi^3 = \frac{i_2}{i_1} k.$$

Es sind hiernach die neun x die Wurzeln der Gleichung  $x^3=\frac{i_1}{i_2}\,k$ , d. h. die dreifachen Elemente jener  $J^3$ , deren Gleichung lautet  $u_1u_2u_3=\frac{i_1}{i_2}\,k$ , wenn k die Involution der geraden Tripel charakterisirt. Ebenso sind die neun  $\xi$  die dreifachen Elemente der Involution  $v_1v_2v_3=\frac{i_2}{i_1}\,k$ . Diese beiden  $J^3$  sind residual, weil  $u_1u_2u_3v_1v_2v_3=k^2$  ist. Wir erhalten noch drei Paare solcher  $J^3$ , entsprechend den Quotienten  $\frac{i_1}{i_4}$ ,  $\frac{i_4}{i_1}$ ;  $\frac{i_1}{i_5}$ ,  $\frac{i_5}{i_1}$ . Im Ganzen also haben wir acht  $J^3$  in residuale Paare geordnet; es sind dies offenbar diejenigen acht  $J^3$ , welche mit der fundamentalen  $u_1w_2w_3=k$  zusammen aus der  $J^9$  abgeleitet werden können, deren Gleichung lautet:  $z_1z_2\dots z_9=k^3$ .

Wenn man aus drei Inflexionspunkten ein Tripel bildet, so ist durch dasselbe eine der neun  $J^3$  bestimmt; liegen die drei i in gerader Linie, so ist die  $J^3$  die Fundamentale x'x''x'''=k; liegen sie nicht in einer Geraden, so erhält man eine der obigen acht  $J^3$ ; denn sind i'i''i''' die ausgewählten drei Inflexionspunkte und liegen sie nicht in einer Geraden, so wird beispiels-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Sitzungsber., Bd. LXXXVIII, Abth. II a, S. 438.

weise  $i_0$  mit i''i'' in einer Geraden enthalten sein und man hat  $i'i''i''' = \frac{i' \cdot i''i'''i_0}{i_0} = \frac{i'}{i_0}k$ , w. z. b. w.

Es entsteht die Frage: Wann sind die durch zwei *i*-Tripel bestimmten  $J^3$  residual? Wir können annehmen, dass die beiden Tripel ein Elementenpaar i'i'' gemein haben; sind dann  $ii_0$  die nichtgemeinsamen Elemente, so muss, damit die  $J^3$  residual seien,  $i'i''i.i'i''i_0 = k^2 = i''^2i''^2j^2$  (dabei bedeutet j den mit i'i'' in einer Geraden liegenden Wendepunkt), also  $ii_0 = j^2$ , d. h. i und  $i_0$  müssen mit j in einer Geraden liegen. So sind z. B.  $i_1i_2i_4$  und  $i_1i_2i_8$  zwei Tripel, welche residuale  $J^3$  bestimmen.

Wir haben hiernach folgende vier Paare von Tripeln mit dem gemeinsamen Elementenpaar  $i_1i_2$ , welche die vier Paare residualer  $J^3$  bestimmen:

Anmerkung I. Dem Tripel  $i_1i_2i_3$  entspricht die fundamentale  $J^3(k)$ .

Anmerkung II. Jedes Paar i'i'' kann auf vier verschiedene Arten durch ein anderes Paar und einmal durch ein Quadrat ersetzt werden, z. B.  $i_1i_2=i_4i_8=i_5i_7=i_6i_9=i_3^2$ . Die neun Punkte i lassen sich auf neun verschiedene Arten in 12 Tripel einer  $J^3$  ordnen. Statt des Tripels  $i_1i_2i_1=i_1^2i_2$  kann beispielsweise auch  $i_2i_4i_7$  (weil  $i_1^2=i_4i_7$ ) und statt  $i_1i_2i_2=i_1i_2^2$  auch  $i_1i_5i_8$  (weil  $i_2^2=i_5i_8$ ) geschrieben werden.

Durch jedes der obigen (oder ein ihm äquivalentes) Tripel gehen nun neun  $C_2$ , welche die  $C_3$  osculiren, und die neun Osculationspunkte sind die neun x-Punkte; dem Nebentripel entsprechen in gleicher Weise die neun  $\xi$ -Punkte; dies gibt die 24 Dreiecke und ihre Gruppirung.

Es ist (Artikel 44)

$$x'_{1}x'_{2}x'_{3} = x'_{1}^{3} = \frac{i_{1}}{i_{2}} k$$

$$x''_{1}x''_{2}x''_{3} = x'_{1}^{3} = \frac{i_{1}}{i_{2}} k$$

$$x'''_{1}x'''_{2}x'''_{3} = x'_{3}^{3} = \frac{i_{1}}{i_{2}} k,$$

diese drei Dreiecke gehören als Tripel der  $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$  an.

Weiter ist

$$\xi_1'\xi_2'\xi_3' = \frac{(i_1i_2i_3)^2}{x_3'^3} = \frac{k^2}{\frac{i_1}{i_0}k} = \frac{i_2}{i_1}k$$

und ebenso

$$\xi_1''\xi_2''\xi_3''=\xi_1'''\xi_2'''\xi_3'''=\frac{i_2}{i_1}k,$$

so dass diese Tripel der residualen  $J^3\left(\frac{i_2}{i_1}k\right)$  entsprechen; es liegen also je eines der x- und der  $\xi$ -Tripel auf einer  $C_2$ .

Es ist  $\xi_2'$  der Tangentialpunkt von  $\xi_1'$ , daher  $\xi_1'^2 \xi_2' = k$ ; dagegen ist

$$\xi_1' \xi_2'^2 = \frac{i_1^2 i_2^4}{x_1'^3} = \frac{i_1^2 i_2^4}{\frac{i_1}{i_2} k} = \frac{i_1 i_2^6}{i_2 k} = \frac{i_1}{i_2} k,$$

also ist  $\xi_1'\xi_2'\xi_2'$  auch eine Gruppe der  $J^3\left(\frac{i_1}{i_2}k\right)$  und wird daher mit irgend einem Tripel der residualen  $J^3\left(\frac{i_2}{i_1}k\right)$ , also wieder mit einem  $\xi$ -Tripel in einer  $C_2$  liegen. Das heisst: »Der Kegelschnitt, welcher durch ein  $\xi$ -Tripel und ein Elementenpaar eines zweiten  $\xi$ -Tripels hindurchgeht, berührt  $C_3$  in jenem Punkte des Paares, welcher der Tangentialpunkt des andern ist. « Dasselbe gilt von seinem x-Tripel und einem x-Paar.

Betrachten wir jetzt zwei Tripel, welche zwei verschiedenen nicht residualen  $J^3$  angehören, z. B.

$$x_1'x_2'x_3'$$
 aus der  $J^3\left(\frac{i_1}{i_2},k\right)$ 

und

$$y_1'y_2'y_3'$$
 aus der  $J^3\left(\frac{i_1}{i_k}k\right)$ ;

so ist  $x^3 = \frac{i_1}{i_2} k$ ,  $y^3 = \frac{i_1}{i_4} k$ . Der restliche Schnitt von  $\overline{xy}$  mit  $C_3$  sei z, so hat man  $z = \frac{k}{xy}$ , somit  $z^3 = \frac{k^3}{x^3y^3} = \frac{i_2i_4}{i_1^2} k = \frac{i_1i_5}{i_1^2} k$ , also  $z^3 = \frac{i_5}{i_1}$ ; d. h. durch Verbindung der Punkte zweier Tripel, deren eines  $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$ , das andere  $J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right)$  angehört, ergibt sich ein Tripel der  $J^3\left(\frac{i_5}{i_5} k\right)$ .

48. Um eine Übersicht über die acht Involutionen  $J^3$  zu gewinnen, wollen wir eine neue Bezeichnung derselben einführen, welche sich auf die Bemerkung gründet, dass man alle neun  $J^3$  erhält (die fundamentale mitgezählt), wenn man einen Inflexionspunkt z. B.  $i_1$  als Doppelelement mit jedem der i zu einem Tripel verbindet, also von den Tripeln  $i_1^2i_1$ ,  $i_1^2i_2$ , ...  $i_1^2i_9$  ausgeht; diese Involutionen sollen der Reihe nach mit  $J^3(i_1^2i_1)$ ,  $J^3(i_1^2i_2)$ ... oder kürzer, mit Weglassung des  $i_1^2$ , durch  $J^3(i_1)$ ,  $J^3(i_2)$ , ...  $J^3(i_9)$  bezeichnet werden.

Die erste,  $J^3(i_1)$ , ist die fundamentale Involution der geraden Tripel, weil  $i_1^3 = k$ . Für die übrigen hat man folgende Ansätze:

$$J^{3}(i_{2}) \dots u_{1}u_{2}u_{3} = i_{1}^{2}i_{2} = i_{1}^{3}\frac{i_{2}}{i_{1}} = \frac{i_{2}}{i_{1}}k \text{ also } J^{3}(i_{2}) = J^{3}\left(\frac{i_{2}}{i_{1}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{3}) \dots = i_{1}^{2}i_{3} = \frac{i_{3}}{i_{1}}k = \frac{i_{1}}{i_{2}}k \Rightarrow J^{3}(i_{3}) = J^{3}\left(\frac{i_{1}}{i_{2}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{4}) \dots = i_{1}^{2}i_{4} = i_{1}^{3}\frac{i_{4}}{i_{1}} = \frac{i_{4}}{i_{1}}k \Rightarrow J^{3}(i_{4}) = J^{3}\left(\frac{i_{4}}{i_{1}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{5}) \dots = i_{1}^{2}i_{5} = i_{1}^{3}\frac{i_{5}}{i_{1}} = \frac{i_{5}}{i_{1}}k \Rightarrow J^{3}(i_{5}) = J^{3}\left(\frac{i_{5}}{i_{1}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{6}) \dots = i_{1}^{2}i_{6} = i_{1}^{3}\frac{i_{6}}{i_{1}} = \frac{i_{6}}{i_{1}}k \Rightarrow J^{3}(i_{6}) = J^{3}\left(\frac{i_{6}}{i_{1}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{7}) \dots = i_{1}^{2}i_{7} = \frac{i_{7}}{i_{1}}k = \frac{i_{1}}{i_{4}}k \Rightarrow J^{3}(i_{7}) = J^{3}\left(\frac{i_{1}}{i_{4}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{8}) \dots = i_{1}^{2}i_{8} = \frac{i_{8}}{i_{1}}k = \frac{i_{1}}{i_{6}}k \Rightarrow J^{3}(i_{9}) = J^{3}\left(\frac{i_{1}}{i_{6}}k\right)$$

$$J^{3}(i_{9}) \dots = i_{1}^{2}i_{9} = \frac{i_{9}}{i_{4}}k = \frac{i_{1}}{i_{5}}k \Rightarrow J^{3}(i_{9}) = J^{3}\left(\frac{i_{1}}{i_{6}}k\right)$$

Die vier Paare residualer  $J^3$  sind also

$$\begin{array}{lll} J^3(i_5), & J^3(i_{\emptyset}) \\ J^3(i_6), & J^3(i_8) \\ J^3(i_4), & J^3(i_7) \\ J^3(i_2), & J^3(i_3). \end{array}$$

Man kann dies in folgender Weise ausdrücken: Zu einer  $J^3(i_m)$  ist eine  $J^3(i_n)$  dann residual, wenn  $i_m i_n$  mit  $i_1$  in gerader Linie liegen. Die  $J^3(i_1)$  ist sich selbst residual. Die Tripel der x gehören der  $J^3(i_3)$ , jene der  $\xi$  der  $J^3(i_2)$  an.

Der am Schlusse des vorigen Artikels erörterte Zusammenhang lässt sich jetzt in folgendem Satze aussprechen: »Wird ein Tripel, welches der  $J^3(i_m)$  angehört, mit einem Tripel der  $J^3(i_n)$  verbunden, und ist  $i_p$  der mit  $i_m$  und  $i_n$  in gerader Linie liegende Inflexionspunkt, so schneiden die neun Geraden die  $C_3$  in einem Tripel der  $J^3(i_p)$ «.

Denn ist 
$$x^3 = i_1^2 i_m$$
,  $y^3 = i_1^2 i_n$  und  $z = \frac{k}{xy}$ , so ist 
$$z^3 = \frac{k^3}{i_1^4 i_m i_n} = \frac{k^2}{i_1 i_m i_n} = \frac{k^2 i_p}{i_1 i_m i_n i_p} = \frac{k i_p}{i_1} = \frac{i_1^3 i_p}{i_1} = i^2 i_p$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Man kann dieses Ergebniss noch kürzer ausdrücken, wenn man die Tripel, welche der  $J^3(i_r)$  angehören, kurzweg mit  $(x_r)$  bezeichnet, nämlich wie folgt: »Aus einem Tripel  $(x_m)$  und einem Tripel  $(x_n)$  folgt ein Tripel  $(x_p)$ , wenn  $i_m i_n i_p$  in einer Geraden liegen.«

Selbstverständlich kann man aus den  $(x_m)$  und  $(x_n)$  alle drei Tripel  $(x_p)$  ableiten. Wird jedoch m=n, so erhält man das eine Tripel  $(x_p)$  dreimal.

Sind  $J^3(i_m)$ ,  $J^3(i_n)$  zwei residuale Involutionen, so ist  $i_p = i_1$  und demzufolge sind die drei Tripel  $(x_p)$  auf drei Inflexionspunkte reducirt, welche in gerader Linie, und zwar auf einer Seite desjenigen Wendepunktsdreiseits liegen, durch welches  $(x_m)$  und  $(x_n)$  verknüpft sind. Man erkennt übrigens leicht, dass die zu residualen Involutionen gehörigen Tripel  $(x_m)(x_n)$  durch jenes Dreiseit verknüpft sind, in welchem  $\overline{i_m i_n}$  eine Seite ist. So sind demnach verknüpft

die sechs Dreiecke  $(x_2)$  und  $(x_3)$  durch das horizontale Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke  $(x_4)$  und  $(x_7)$  durch das verticale Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke  $(x_5)$  und  $(x_9)$  durch das positive Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke  $(x_6)$  und  $(x_8)$  durch das negative Wendepunktsdreiseit.

### B. Vierecke.

49. Es sei (siehe Artikel 40)  $x_1$  ein Punkt auf  $C_3$ , welcher der Gleichung  $x^{15} = k^5 \tag{1}$ 

genügt; dann bildet er einen Eckpunkt eines der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Vierecks, dessen Eckpunkte sind:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{k}{x_2^2} = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k}{x_3^2} = \frac{k^2}{x_1^8}.$$
 (2)

Der dritte Schnittpunkt der Diagonale  $x_1x_3$  mit  $C_3$  ist

$$\eta_1 = \frac{k}{x_1 x_3} = \frac{k^2}{x_1^5}, \text{ woraus } \eta_1^3 = \frac{k^6}{x_1^{15}} = k;$$
(3)

der dritte Schnittpunkt der Diagonale  $x_2x_4$ 

$$\eta_2 = \frac{k}{x_2 x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3 x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1,$$
(4)

d. h. \*die beiden Diagonalen eines der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Vierecks schneiden sich auf der Curve und zwar in einem Inflexionspunkte derselben. Hieraus kann schon der Schluss gezogen werden, dass sich die 54 Vierecke in Gruppen zu je sechs auf die neun Inflexionspunkte vertheilen werden.

50. Es seien  $y_1y_2y_3y_4$  die Tangentialpunkte  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von  $x_1x_2x_3x_4$ , d. h. die letzten Schnitte der die  $C_3$  in den Punkten  $x_1x_2x_3x_4$  respective  $(3\mu-1)$ -punktig berührenden  $C_{\mu}$ , so bilden  $y_1y_2y_3y_4$  wieder ein um- und eingeschriebenes Viereck.

Für  $\mu = 1$  ist  $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$ , es entsteht also das ursprüngliche Viereck.

Für  $\mu=2$  ist  $y_1=\frac{k^2}{v_1^5}=\eta_1$ , somit fällt  $y_1$  und mit ihm auch  $y_2\,y_3\,y_4$  in einen Inflexionspunkt, und zwar in denjenigen, in welchem sich die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks schneiden.

Für 
$$\mu = 3$$
 hat man  $y_1 = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4$ , für 
$$\mu = 4 \dots y_1 = \frac{k^4}{x_1^{11}} = \frac{k^4 x_1^4}{x_1^{15}} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

für

$$\mu = 5 \dots y_1 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1}{x_1^{15}} = x_1,$$

in allen diesen Fällen kommt man also auf das nämliche Viereck zurück.

Allgemein ist der Tangentialpunkt  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von  $x_1$ 

$$y_1 = \frac{k^{\mu}}{x_1^{3\mu-1}};$$

bringt man die Zahl  $\mu$  auf die Form  $\mu = 5\nu + r$ , so dass r den Rest bedeutet, welchen sie bei der Division durch fünf zurücklässt, so ist

$$y_1 = \frac{k^{5v+r}}{x_1^{15v+3r-1}} = \left(\frac{k_5}{x_1^{15}}\right)^v \frac{k^r}{x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}};$$

ertheilt man r der Reihe nach die möglichen Werthe 0, 1, 2, 3, 4, so ergibt sich, wie oben entwickelt wurde,

für 
$$r = 0$$
  $y_1 = x_1$   
\*  $r = 1$   $y_1 = x_2$   
\*  $r = 2$   $y_1 = \eta_1$   
\*  $r = 3$   $y_1 = x_4$   
\*  $r = 4$   $y_1 = x_3$ .

Man kommt auf diesem Wege immer entweder wieder in das ursprüngliche Viereck zurück oder in dem ihm entsprechenden Inflexionspunkt; neue Vierecke lassen sich also in dieser Weise nicht ableiten. Das Ergebniss aber kann man folgendermassen aussprechen: »Die im Punkte  $x_1$  die  $C_3$  (3 $\mu$ -1)-

punktig berührende  $C_{\mu}$  trifft sie zum letztenmale in  $x_1, x_2, \eta_1, x_4, x_3$ , je nachdem der bei der Division  $\frac{\mu}{5}$  verbleibende Rest 0, 1, 2, 3, 4 ist.«

Die Gruppe der sechs zu einem Wendepunkt gehörigen Vierecke lässt sich ergänzen, sobald zwei dieser Vierecke bekannt sind, und zwar auf Grund folgenden Satzes: »Sind  $x_1x_2x_3x_4$  und  $x_1'x_2'x_3'x_4'$  zwei zu einem i gehörige Vierecke, so erhält man die Ecken der vier andern als dritte Schnitte der Geraden  $x_m'x_1, x_m'x_2, x_m'x_3, x_m'x_4$  (m = 1, 2, 3, 4). « Denn, ist  $\xi_1$  der dritte Schnittpunkt von  $x_m'x_1$ , so ist

$$\xi_1 = \frac{k}{x'_m x_1},$$

daher

$$\xi_1^{15} = \frac{k^{15}}{x_m^{115}x_1^{15}} = \frac{k^{15}}{k^{10}} = k^5,$$

also  $\xi_1$  thatsächlich Ecke eines Vierecks und der zugehörige Inflexionspunkt nach (3)

$$\eta' = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{x_m'^{15} x_1^{15}}{k^3};$$

weil aber die beiden gegebenen Vierecke zu demselben Inflexionspunkte gehören, so ist  $\frac{x_m'^5}{k^2} = \frac{x_1^5}{k^2}$ , daher weiter

$$\eta' = k \left(\frac{x_1^5}{k^2}\right)^2 = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3 x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1$$
, w. z. b. w.

51. Ist i der dem Viereck  $x_1x_2x_3x_4$  adjungirte Inflexionspunkt, so findet man auf Grund der Gleichungen (3) und (2), dass

$$i = \frac{k^2}{x_1^3} = \frac{k^2}{x_2^5} = \frac{k^2}{x_2^5} = \frac{k^2}{x_2^5},$$

so dass also

$$x_1^5 = x_2^5 = x_3^5 = x_4^5 = \frac{k^2}{i} = \frac{(i^3)^2}{i} = i^5;$$

demnach sind die 24 Ecken der mit i verknüpften 6 Vierecke die weiteren 24 fünffachen Elemente jener  $J^5$ , welche i zum fünffachen Punkte hat.

Wird das Viereck, welches wir jetzt kurz (x) nennen, aus einem zweiten Inflexionspunkt  $i_1$  auf die  $C_3$  projicirt, so entsteht ein neues Viereck (x'), und zwar ist wegen  $x_{\lambda}x'_{\lambda}i_{1} = k$ 

$$x'_{\lambda} = \frac{k}{x_{\lambda} i_{1}} = \frac{i_{1}^{3}}{x_{\lambda} i_{1}} = \frac{i_{1}^{2}}{x_{\lambda}},$$

so dass  $\frac{i_1^2}{x_1}$ ,  $\frac{i_1^2}{x_2}$ ,  $\frac{i_1^2}{x_3}$ ,  $\frac{i_1^2}{x_4}$  die Ecken eines der andern 54 Vierecke darstellen.

Wir projiciren nun (x') aufs Neue aus einem dritten Wendepunkt  $i_2$  nach (x''), wobei allgemein  $x_{\lambda}'' = \frac{i_2^2}{x_{\lambda}'} = \frac{i_2^2 x_{\lambda}}{i_1^2}$ , dann (x'') weiter aus  $i_3$  nach (x'''), wobei  $x_{\lambda}''' = \frac{i_3^3}{x_{\lambda}''} = \frac{i_1^2 i_3^2}{i_2^2 x_{\lambda}}$  und stellen uns nun die Frage, wann (x''') wieder mit dem ursprünglichen Inflexionspunkt i verknüpft ist. Die hiefür nothwendige Bedingung lautet  $x_1''' x_3''' = x_1 x_3$ , also nach Einsetzung der Werthe für  $x_1''', x_3'''$ 

$$\frac{i_1^4 i_3^4}{i_2^4 x_1 x_2} = x_1 x_3,$$

oder wegen  $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k$  weiter

$$\frac{k i_1 i_3}{i_2} = (x_1 x_3)^2 = \left(\frac{k}{i}\right)^2 = \frac{k i^3}{i^2} = k i,$$

woraus  $i_1i_3=ii_2$ , d. h. die Geraden  $ii_2$  und  $i_1i_3$  müssen sich auf der  $C_3$  schneiden.

52. Es sei  $i_1$  der dem Viereck  $x_1x_2x_3x_4$  adjungirte Inflexionspunkt, so dass  $x_1^5 = i_1^5$  ist. In der durch  $i_1x_1$  bestimmten eindeutigen Beziehung  $E(i_1x_1)$  ist die Reihe der einander entsprechenden Punkte (siehe Abschnitt II)

$$i_{1}; \quad x_{1}; \quad \frac{x_{1}^{2}}{i_{1}} = \frac{x_{1}^{10}}{i_{1}x_{1}^{8}} = \frac{i_{1}^{10}}{i_{1}x_{1}^{8}} = \frac{k^{3}}{x_{1}^{8}} = x_{4};$$

$$\frac{x_{1}^{3}}{i_{1}^{2}} = \frac{x_{1}^{5}}{i_{1}^{2}x_{1}^{2}} = \frac{i_{1}^{3}}{x_{1}^{2}} = \frac{k}{x_{1}^{2}} = x_{2}; \quad \frac{x_{1}^{4}}{i_{1}^{3}} = \frac{x_{1}^{4}}{k} = x_{3}; \quad \frac{x_{1}^{5}}{i_{1}^{4}} = i_{1};$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende dieser vier Punkte Tangentialpunkt des vorangehenden und der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

es ist also  $i_1x_1x_2x_3$  ein fünfgliedriger Cyklus der  $E(i_1x_1)$ ; seine Elemente können auf Grund der eben geführten Rechnung in der Form

$$i_1, x_1, \frac{i^9}{x_1^8}, \frac{i_1^3}{x_1^2}, \frac{x_1^8}{i_1^3}$$

dargestellt werden.

Wir projiciren nun  $x_1$  aus  $i_2$  auf  $C_3$  und den sich ergebenden Punkt u aus  $i_3$ , wodurch  $y_1$  erhalten werden möge; dabei setzen wir voraus, dass  $i_1i_2i_3$  in einer Geraden liegen. Zunächst ist

$$u = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^3}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{i_3^3}$$

und dann

$$y_1 = \frac{k}{i_3 u} = \frac{i_3^2}{u} = \frac{i_3^2}{i_2^2} x_1 = \frac{i_2}{i_3} x_1;$$

da  $y_1^5 = \frac{i_2^5}{i_3^5} x_1^5 = \frac{(i_1 i_2)^5}{i_3^5} = \frac{i_3^{10}}{i_3^5} = i_3^5$ , so ist  $y_1$  Eckpunkt eines zu  $i_3$  gehörigen Vierecks, und zu demselben Wendepunkt gehört auch das von u aus construirte Viereck, weil

$$u^5 = \frac{(i_2^2)^5}{x_1^5} = \frac{(i_1 i_3)^5}{i_1^5} = i_3^5$$

ist. Wir erhalten also den Satz: »Die Projection eines zu  $i_1$  gehörigen Vierecks aus  $i_1$  ist wieder ein zu  $i_1$  gehöriges Vier-

eck (nämlich das ursprüngliche); die Projection desselben Vierecks aus  $i_2$  ist ein zu  $i_3$  gehöriges Viereck, wenn  $i_1i_2i_3$  in einer Geraden liegen. «

Die Betrachtung des Wendepunktschemas

ergibt nun, wenn man von diesem Satze Gebrauch

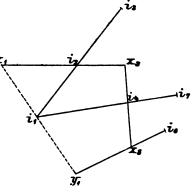


Fig. 5.

macht, folgenden Sachverhalt: Ist  $x_1$  ein zu  $i_1$  gehöriger Eckpunkt, so ist seine Projection aus  $i_2$  ein zu  $i_3$  gehöriger Eckpunkt

 $x_3$ ; wird dieser aus  $i_4$  projicirt, so ergibt sich ein zu  $i_8$  gehöriger Eckpunkt  $x_8$ , welcher aus  $i_6$  projicirt wieder einen zu  $i_1$  gehörigen Eckpunkt  $y_1$  ergibt (siehe die schematische Figur 5).

Es ist die Frage von Interesse, in welcher Beziehung dieser letzte Punkt zum Ausgangspunkt  $x_i$  steht. Man hat

$$x_3 = \frac{i_2^2}{x_1}; \quad x_8 = \frac{i_4^2}{x_3} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} = \frac{i_2}{i_4} x_1;$$
$$y_1 = \frac{i_6^2}{x_8} = \frac{i_6^2 i_4}{i_2 x_1} = \frac{i_2 i_4 i_7}{i_2 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1};$$

es ist also  $y_1$  die Gegenecke zu  $x_1$  in dem ursprünglichen Vierecke.

### C. Fünfecke.

53. Es sei  $x_1$  ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{33} = k^{11} \tag{1}$$

genügt; dann kann er zum Ausgangspunkte für die Construction eines der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Fünfecks genommen werden, und zwar sind die Ecken des letzteren

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k^3}{x_1^8}, \quad x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5}.$$
 (2)

Bezeichnet man die dritten Schnittpunkte der Diagonalen  $x_1x_3$ ,  $x_2x_4$ ,  $x_3x_5$ ,  $x_4x_1$ ,  $x_5x_2$  der Reihe nach mit  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$  (Fig. 6), so ist

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \frac{k}{x_1 x_3} = \frac{k^2}{x_1^5} \\
\xi_2 &= \frac{k}{x_2 x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} \\
\xi_3 &= \frac{k}{x_3 x_5} = \frac{k^7}{x_1^{20}} \\
\xi_4 &= \frac{k}{x_4 x_1} = \frac{x_1^7}{k^2} \\
\xi_5 &= \frac{k}{x_2 x_2} = \frac{k^5}{x_1^{14}}
\end{aligned} \tag{3}$$

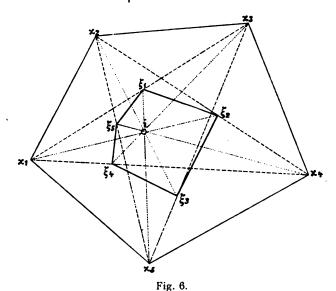
oder wenn man unter Beachtung von (1) auf  $\xi_i$  zurückführt

$$\xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{k}{\xi_1^2}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_1^4}{k}, \quad \xi_4 = \frac{k^3}{\xi_1^8}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_1^{16}}{k^5}; \quad (3^*)$$

weil überdies  $\xi_1^{33} = \frac{k^{66}}{x_1^{145}} = k^{11}$ , so ist  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$  wieder ein der  $C_3$  um- und eingeschriebenes Fünfeck.

Versucht man auf dieses den nämlichen Vorgang anzuwenden, so ergibt sich als erste Ecke

$$\xi_1' = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{x_1^5}\right)^5} = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{x_1^{33}}{k^8 x_1^8} = \frac{k^8}{x_1^8} = x_4,$$



d. h. man kommt wieder auf das ursprüngliche Fünfeck zurück, so dass sich auf dem angedeuteten Wege nur ein zweites

Fünfeck gewinnen lässt.

54. Der durch die Ecken eines der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Fünsecks gelegte Kegelschnitt schneidet die Curve zum sechstenmale in einem Inflexionspunkte.«

Erster Beweis. Wenn die sechs Punkte  $x_m$  (m=1,2,...6) der  $C_3$  auf einer  $C_2$  liegen, so liegen ihre Tangentialpunkte auch auf einer  $C_2$  (siehe Artikel 22); diese beiden Kegelschnitte müssen

aber als durch die fünf Punkte  $x_1x_2x_3x_4x_5$  gehend identisch sein und  $C_3$  weiter in einem Punkte schneiden, der sein eigener Tangentialpunkt, also ein Inflexionspunkt ist.

Zweiter Beweis. Auf Grund von (2) ist der sechste Schnittpunkt

$$x_6 = \frac{k^2}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \frac{k^4}{x_1^{11}},$$

also ist

$$x_6^3 = \frac{k^{12}}{x_5^{33}}$$

und mit Rücksicht auf (1)

$$x_6^3 = k$$
,

wodurch die Behauptung ebenfalls erwiesen ist.

Für das aus dem Fünfeck (x) abgeleitete Fünfeck  $(\xi)$  ist der sechste Schnittpunkt der ihm umschriebenen  $C_2$ 

$$\xi_{8} = \frac{k^{4}}{\xi_{1}^{11}} = \frac{k^{4}}{\left(\frac{k^{2}}{x_{1}^{5}}\right)^{11}} = \frac{x_{1}^{55}}{k^{18}} = \frac{x_{1}^{66}}{k^{18}x_{1}^{11}} = \frac{k^{4}}{x_{1}^{11}} = x_{6};$$

es geht hienach der dem abgeleiteten Fünfeck umschriebene Kegelschnitt durch denselben Inflexionspunkt, welchen das ursprüngliche Fünfeck ergeben hat.

55. Aus dem Bisherigen ist der Schluss zu ziehen, dass die 216 Fünfecke in Gruppen von je 24 unter einander gepaarten Fünfecken auf die 9 Inflexionspunkte sich vertheilen werden, und es handelt sich darum, die 24 Fünfecke einer solchen Gruppe zu finden. Zunächst könnte der Versuch hiezu auf Grund der folgenden Sätze unternommen werden.

Satz I. • Wenn  $x_2$  der Tangentialpunkt von  $x_1$  und  $y_2y_1$  die Tangentialpunkte  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von  $x_2x_1$  sind, so ist auch  $y_2$  der Tangentialpunkt von  $y_1$ .

Denn nach Annahme ist

$$x_1^2 x_2 \equiv k$$
  $x_1^{3\mu-1} y_1 \equiv k^{\mu}$   $x_2^{3\mu-1} y_2 \equiv k^{\mu}$ ,

quadrirt man die zweite Gleichung und multiplicirt sie mit der dritten, so ergibt sich

$$(x_1^2x_2)^{3\mu-1}y_1^2y_2=k^{3\mu}$$

und daraus wegen der ersten Gleichung thatsächlich

$$y_1^2 y_2 = k$$
.

Allgemeiner noch ist

Satz II. \*Wenn  $x_2$  der Tangentialpunkt v<sup>ter</sup> Ordnung von  $x_1$  und  $y_2y_1$  respective die Tangentialpunkte  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von  $x_2x_1$  sind, so ist auch  $y_2$  der Tangentialpunkt v<sup>ter</sup> Ordnung von  $y_1$ «.

Laut Annahme ist nämlich

$$x_1^{3\nu-1}x_2 = k^{\nu}$$
  $x_1^{3\mu-1}y_1 = k^{\mu}$   $x_2^{3\mu-1}y_2 = k^{\mu}$ ;

erhebt man die zweite Gleichung in die Potenz 3v-1 und multiplicirt dann mit der dritten, so kommt

$$(x_1^{3\nu-1}x_2)^{3\mu-1}y_1^{3\nu-1}y_2 = k^{3\mu\nu}$$

und dies gibt vermöge der ersten Gleichung

$$y_1^{3\nu-1}y_2 = k^{\nu}$$
, w. z. b. w.

Aus dem ersten dieser Sätze folgt weiter:

Satz III. »Ist  $x_1x_2...x_n$  ein der  $C_3$  um- und eingeschriebenes n-Eck und sind  $y_1y_2...y_n$  die Tangentialpunkte  $\mu$ ter Ordnung seiner Ecken, so ist  $y_1y_2...y_n$  auch ein um- und eingeschriebenes n-Eck«. Dazu muss jedoch bemerkt werden, dass sich dieses letztere, wenn p ein Theiler von n ist, auch auf ein p-Eck reduciren, beziehungsweise dass es in einen Inflexionspunkt übergehen kann. Das n-Eck  $y_1y_2...y_n$  soll als »n-Eck der Tangentialpunkte  $\mu$ ter Ordnung« bezeichnet werden.

Wir suchen nun die auf diesem Wege aus einem gegebenen n-Eck sich ergebenden abgeleiteten n-Ecke und führen diese Betrachtung für n=3 und n=5 durch.

Es sei also  $x_1x_2x_3$  ein der  $C_3$  um- und eingeschriebenes Dreieck, daher

$$x_1 = x_1$$
,  $x_2 = \frac{k}{x_1^2}$ ,  $x_3 = \frac{x_1^4}{k}$  und  $x_1^9 = k^3$ .

Für  $\mu = 1$  ergibt sich selbstverständlich immer das nämliche Polygon; für  $\mu = \mu$  ist

$$y_1 = \frac{k^{\mu}}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^{\mu}x_1}{x_1^{3\mu}};$$

ist nun  $\mu$  durch 3 theilbar, also  $\mu = 3\nu$ , so hat man

$$y_1 = \frac{k^{3\nu}x_1}{(x_1^3)^{3\nu}} = \frac{k^{3\nu}x_1}{k^{3\nu}} = x_1;$$

ist dagegen  $\mu$  nicht theilbar durch 3, also  $\mu = 3\nu \pm 1$ , so ist

$$y_{1} = \frac{k^{3 \times \pm 1} x_{1}}{x_{1}^{9 \times} x_{1}^{\pm 3}} = \frac{k^{3 \times \pm 1} x_{1}}{k^{3 \times} x_{1}^{\pm 3}} = k^{\pm 1} x_{1}^{1 \mp 3},$$

also entweder  $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$  oder  $y_1 = \frac{x_1^4}{k} = x_3$ . Aus einem Dreiecke kann daher in dieser Art ein neues Dreieck nicht abgeleitet werden.

An zweiter Stelle sei  $x_1$  eine Ecke eines um- und eingeschriebenen Fünfecks und  $y_1$  ihr Tangentialpunkt  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung. Dann ist

$$x_1^{33} = k^{11}$$
 und  $y_1 = \frac{k^{\mu}}{x_1^{3\mu-1}}$ ;

bringt man  $\mu$  auf die Form  $\mu = 11v + r$ , so wird

$$y_1 = \frac{k^{11} + 3}{x_1^{33} + 3r - 1} = \frac{k^{11} + r}{k^{11} x_1^{3} r - 1} = \frac{k^r}{x_1^{3} r - 1},$$

worin der Reihe nach r = 0, 1, 2...10 zu setzen ist. Man erhält

Aus einem Fünfeck lässt sich also durch die Tangentialpunkte höherer Ordnungen nur ein zweites ableiten, und zwar ist es dasselbe, welches wir gleich eingangs aus den dritten Schnittpunkten der Diagonalen gebildet haben. Insbesondere entsteht aus dem Punkte  $x_1$ 

für r = 0, 1, 3, 6, 10 respective  $x_1 x_2 x_4 x_5 x_3$ 

- r = 4 der adjungirte Inflexionspunkt
- \* r = 2, 5, 7, 8, 9 respective  $\xi_1 \xi_5 \xi_3 \xi_2 \xi_4$ .

56. Die beiden Fünfecke  $x_1x_2x_3x_4x_5$  und  $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5$  liegen perspectivisch in Bezug auf den Inflexionspunkt, mit welchem sie verknüpft sind.

Dem Artikel 54 zufolge ist nämlich dieser Inflexionspunkt

$$i = \frac{k^4}{x_1^{11}}; \tag{4}$$

demnach ist, wenn wir die Projection von  $x_m$  aus i auf  $C_3$  mit  $x_m'$  bezeichnen,

$$x'_{1} = \frac{k}{ix_{1}} = \frac{x_{1}^{10}}{k^{3}} = \xi_{2}$$

$$x'_{2} = \frac{k}{ix_{2}} = \frac{x_{1}^{13}}{k^{4}} = \frac{k^{7}}{x_{1}^{20}} = \xi_{3}$$

$$x'_{3} = \frac{k}{ix_{3}} = \frac{x_{1}^{7}}{k^{2}} = \xi_{4}$$

$$x_{4}' = \frac{k}{ix_{4}} = \frac{x_{1}^{19}}{k^{6}} = \frac{k^{5}}{x_{1}^{14}} = \xi_{5}$$
$$x_{5}' = \frac{k}{ix_{5}} = \frac{k^{2}}{x_{5}^{3}} = \xi_{1}.$$

Dadurch ist die perspectivische Lage erwiesen, und zwar gehen durch i die Geraden  $x_1\xi_2$ ,  $x_2\xi_3$ ,  $x_3\xi_4$ ,  $x_4\xi_5$ ,  $x_5\xi_1$ .

Mit Hilfe der Gleichung (4) und der aus ihr resultirenden

$$i^{11} = \frac{k^{44}}{x_1^{121}} = \frac{x_1^{132}}{x_1^{121}} = x_1^{11} \quad (= x_2^{11} = \dots = x_5^{11})$$
 (5)

lassen sich sämmtliche Punkte x und  $\xi$  durch i und  $x_1$  darstellen; man erhält, von den Gleichungen (2) und (3) Gebrauch machend:

$$x_{1} = x_{1}$$

$$\xi_{1} = \frac{k^{2}}{x_{1}^{3}} = \frac{k^{4}}{k^{2}x_{1}^{3}} = \frac{ix_{1}^{11}}{i^{6}x_{1}^{3}} = \frac{i^{6}}{x_{1}^{5}}$$

$$x_{2} = \frac{k}{x_{1}^{2}} = \frac{k^{4}}{k^{3}x_{1}^{2}} = \frac{ix_{1}^{11}}{i^{9}x_{1}^{2}} = \frac{i^{3}}{x_{1}^{2}}$$

$$\xi_{2} = \frac{x_{1}^{10}}{k^{3}} = \frac{kx_{1}^{10}}{k^{4}} = \frac{kx_{1}^{10}}{ix_{11}^{11}} = \frac{i^{2}}{x_{1}}$$

$$x_{3} = \frac{x_{1}^{4}}{k} = \frac{k^{3}x_{1}^{4}}{k^{4}} = \frac{i^{9}x_{1}^{4}}{ix_{1}^{11}} = \frac{x_{1}^{4}}{i^{3}}$$

$$\xi_{3} = \frac{k^{7}}{x_{1}^{20}} = \frac{k^{3}ix_{1}^{11}}{x_{1}^{20}} = \frac{i^{11}x_{1}^{11}}{ix_{1}^{20}} = \frac{x_{1}^{2}}{i}$$

$$x_{4} = \frac{k^{3}}{x_{1}^{8}} = \frac{k^{4}}{kx_{1}^{8}} = \frac{ix_{1}^{11}}{i^{3}x_{1}^{8}} = \frac{x_{1}^{3}}{i^{2}}$$

$$\xi_{4} = \frac{x_{1}^{7}}{k^{2}} = \frac{k^{2}x_{1}^{7}}{ix_{1}^{11}} = \frac{i^{5}}{x_{1}^{4}}$$

$$x_{5} = \frac{x_{1}^{16}}{k^{5}} = \frac{x_{1}^{16}}{kix_{1}^{11}} = \frac{x_{1}^{5}}{i^{4}}$$

$$\xi_{5} = \frac{k^{5}}{x_{1}^{14}} = \frac{kix_{1}^{11}}{x_{1}^{44}} = \frac{i^{4}}{x_{1}^{3}}$$

Auf Grund dieser Darstellung erkennt man nun leicht, dass die eilf Punkte i, x und  $\xi$  einen eilfgliedrigen Cyklus in der E-Beziehung  $E(ix_1)$  bilden; in der That ist in  $E(ix_1)$  die Reihenfolge der Punkte, in welcher jeder folgende dem vorangehenden entspricht, die nachstehende:

Den 12 existirenden  $E_{ii}$  entsprechen, von i ausgehend, 12 solche Gruppen, von denen jede i und zwei in Bezug auf

dieses perspectivische Fünsecke enthält, so dass man thatsächlich zu den 2.12 = 24 mit *i* verknüpsten Fünsecken gelangt.

### D. Sechsecke.

57. Es sei x, ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{63} = k^{21} \tag{1}$$

genügt; dann lässt sich von ihm aus ein der  $C_3$  um- und eingeschriebenes Sechseck (oder Dreieck, weil die Gleichung (1) eine Folgerung der Gleichung  $x^9 = k^3$  ist) construiren, dessen aufeinanderfolgende Ecken sind:

$$x_1 = x_1, x_2 = \frac{k}{x_1^2}, x_3 = \frac{x_1^4}{k}, x_4 = \frac{k^3}{x_1^8},$$

$$x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5}, x_6 = \frac{k^{11}}{x_1^{32}}.$$
(2)

Bestimmt man die dritten Schnitte der Diagonalen  $x_1x_3$ ,  $x_2x_4$ ,  $x_3x_5$ ,  $x_4x_6$ ,  $x_5x_1$ ,  $x_6x_2$  mit  $C_3$ , so ergibt sich ein neues um- und eingeschriebenes Sechseck ( $\xi$ ), dessen Ecken sind: <sup>1</sup>

$$\xi_{1} = \frac{k}{x_{1}x_{3}} = \frac{k^{2}}{x_{1}^{5}}, \quad \xi_{2} = \frac{x_{1}^{10}}{k^{3}}, \quad \xi_{3} = \frac{k^{7}}{x_{1}^{20}}, \quad \xi_{4} = \frac{x_{1}^{40}}{k^{18}},$$

$$\xi_{5} = \frac{k^{6}}{x_{1}^{17}}, \quad \xi_{6} = \frac{x_{1}^{34}}{k^{11}}.$$

$$(3)$$

Verfährt man mit diesem Sechseck in derselben Weise, so kommt ein drittes, ( $\xi'$ ), zu Stande, nämlich

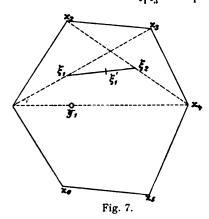
$$\xi_{1}' = \frac{k}{\xi_{1}} \frac{x_{1}^{25}}{k^{8}}, \qquad \xi_{2}' = \frac{x_{1}^{13}}{k^{4}}, \qquad \xi_{3}' = \frac{k^{9}}{x_{1}^{26}}, \\ \xi_{4}' = \frac{k^{4}}{x_{1}^{11}}, \qquad \xi_{5}' = \frac{x_{1}^{22}}{k^{7}}, \qquad \xi_{8}' = \frac{x_{1}^{19}}{k^{6}}.$$

$$(4)$$

Wiederholt man denselben Vorgang auch mit diesem, so ergibt sich als erster Punkt

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende Punkt Tangentialpunkt des vorangehenden, der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

$$\xi_1'' = \frac{k}{\xi_1'\xi_2'} = \frac{k^{21}}{x_1^{62}} = \frac{k^{21}x_1}{x_1^{63}} = x_1;$$



man kommt mithin wieder auf das ursprüngliche Sechseck zurück. Es lassen sich also aus jedem Sechsecke noch zwei andere ableiten, so dass sich die der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Sechsecke zu dreien gruppiren (siehe Fig. 7).

Die dritten Schnittpunkte der Diagonalen  $x_1x_4$ ,  $x_2x_5$ ,

 $x_3x_6$  seien der Reihe nach  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ; dann ist

$$y_1 = \frac{k}{x_1 x_4} = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_2 = \frac{k}{x_2 x_3} = \frac{k^5}{x_1^{14}}, \qquad y_3 = \frac{k}{x_3 x_6} = \frac{x_1^{24}}{k^9};$$

man überzeugt sich aber durch leichte Rechnung, bei welcher auf die Gleichung (1) Rücksicht zu nehmen ist, dass

$$y_1^2 y_2 = k$$
,  $y_2^2 y_3 = k$ ,  $y_3^2 y_1 = k$ ;

mithin liegen die drei Punkte  $y_1y_2y_3$  derart, dass sie die Ecken eines der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Dreiecks bilden.

Die analogen Punkte für das Sechseck (ξ) sind

$$\eta_1 = \frac{\xi_1^7}{k^2} = \frac{k^{12}}{x_3^{35}} = \frac{k^{12}x_1^{28}}{x_1^{63}} = \frac{x_1^{28}}{k^9} = y_3, \qquad \eta_2 = y_2, \qquad \eta_3 = y_1;$$

und für das Sechseck  $(\xi')$ 

$$\eta_1' = \frac{\xi_1'^{17}}{k^2} = \frac{k^5}{x_1^{14}} = y_2, \qquad \eta_2' = y_3, \qquad \eta_3' = y_1.$$

- ightharpoonup Es gehören also die drei Sechsecke eines Tripels (x) ( $\xi$ ) ( $\xi'$ ) zu einem und demselben der  $C_3$  um- und eingeschriebenen Dreiecke.«
- 58. Der Tangentialpunkt  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung von  $x_1$  heisse  $z_1$ , und es werde  $\mu$  auf die Form  $\mu = 21\nu + r$  gebracht; dann ist wegen (1)

$$z_1 = \frac{k^{\mu}}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^{21\nu+r}}{x^{63\nu}x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}},$$

worin der Reihe nach r=0, 1, 2, ... 20 zu setzen ist. Diese Substitutionen führen zu dem folgenden Tableau:

$r = z_1 =$
11 $\dots x_6$
$12 \ldots y_3$
$13 \ldots \xi_1'$
$14 \ldots \xi_5'$
$15 \ldots \xi_a$
$16 \ldots x_5$
$17 \ldots \xi_2'$
$18 \ldots \xi_2$
$19 \ldots y_1$
$x_3$

Es ist also

für 
$$r = 0$$
, 1, 3, 11, 16,  $20 cdots z_1 \equiv x_1 x_2 x_4 x_6 x_5 x_3$   
\*  $r = 2$ , 6, 7, 8, 10,  $18 cdots z_1 \equiv \xi_1 \xi_5 \xi_3 \xi_4 \xi_6 \xi_2$   
\*  $r = 4$ , 9, 13, 14, 15,  $17 cdots z_1 \equiv \xi_4' \xi_3' \xi_1' \xi_5' \xi_6' \xi_2'$   
\*  $r = 5$ , 12, 19  $cdots z_1 \equiv y_2 y_3 y_1$ .

Man erhält demnach durch Benützung der Tangentialpunkte beliebig hoher Ordnung immer nur dieselben drei Sechsecke und das mit ihnen verknüpfte Dreieck.

59. Ausser den Sechsecken der eben betrachteten Art, welche mit Dreiecken associirt sind, gibt es noch Sechsecke einer zweiten Art, welche zu Inflexionspunkten gehören. Es sind dies solche, deren Ecken nicht allein der Gleichung (1), sondern auch der engeren

$$x^{21} = x^7 \tag{5}$$

genügen, von welcher (1) eine Folgerung ist. Findet nämlich diese Gleichung statt, so ist

$$y_1 = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_2 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1^7}{x_1^{21}} = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_3 = \frac{x_1^{28}}{k^9} = \frac{x_1^7}{k^2},$$

also

$$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{x_1^7}{k^2} = y$$

und

$$y^3 = \frac{x_1^{21}}{k^6} = k,$$

d. h. das Dreieck  $y_1 y_2 y_3$  reducirt sich in diesem Falle auf einen Inflexionspunkt *i*. Aber auch die drei oben gefundenen Sechsecke (x),  $(\xi)$ ,  $(\xi')$  fallen in eines zusammen, da

$$\xi_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^2 x_1^{16}}{x_1^{21}} = \frac{x_1^{16}}{k^5} = x_5$$
  
$$\xi_1' = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{k^7 x_1^3}{k^8} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

und dieses eine Sechseck ist in Beziehung auf den Punkt *i* perspectivisch; denn man hat

$$x_{1}ix_{4} = x_{1} \cdot \frac{x_{1}^{7}}{k^{2}} \cdot \frac{k^{3}}{x_{1}^{8}} = k$$

$$x_{2}ix_{5} = \frac{k}{x_{1}^{2}} \cdot \frac{x_{1}^{7}}{k^{2}} \cdot \frac{x_{1}^{16}}{k^{5}} = k$$

$$x_{3}ix_{6} = \frac{x_{1}^{4}}{k} \cdot \frac{x_{1}^{7}}{k^{2}} \cdot \frac{k^{11}}{x_{1}^{32}} = k.$$

Die zu einem Inflexionspunkt i gehörigen Sechsecke ergeben sich durch Vervollständigung des siebenelementigen Cyklus in der  $E(ix_1)$ :

$$i, x_1, \frac{x_1^3}{i} = x_5, \frac{x_1^3}{i^2} = x_6, \frac{x_1^4}{i^3} = x_3, \frac{x_1^5}{i^4} = x_2, \frac{x_1^5}{i^5} = x_4;$$

solcher siebengliedrigen Cyklen ergeben sich 7+1=8, so dass jeder Inflexionspunkt zu acht Sechsecken der zweiten Art Veranlassung gibt.

# VI. Einer Raumcurve R<sub>4</sub> vierter Ordnung erster Species gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

60. In der Reihe der Punkte  $x_1x_2...x_nx_{n+1}$  auf einer  $R_k$  sei jeder Punkt der Schnittpunkt der Schmiegungsebene des vorangehenden Punktes. Wird die Involution  $J_3^k$  der ebenen Quadrupel durch die Gleichung xx'x''x''' = k charakterisirt, so bestehen zwischen obigen Punkten die Relationen

$$x_1^3 x_2 = k$$

$$x_2^3 x_3 = k$$

$$\vdots$$

$$x_n^3 x_{n+1} = k.$$

Erhebt man diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen  $3^{n-1}$ ,  $3^{n-2}$ ,... $3^{0}$ , so wird

für gerade 
$$n$$
:

 $x_1^{3n}x_2^{3n-1} = k^{3n-1}$ 
 $x_1^{3n-2} = x_2^{3n-1}x_3^{3n-2}$ 
 $x_1^{3n}x_2^{3n-1} = k^{3n-1}$ 
 durch Multiplication dieser Gleichungssysteme erhält man

für gerade 
$$n$$
:  $x_1^{3^n} k^{3^{n-2}+3^{n-4}+\cdots+3^n} = x_{n+1} k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\cdots+3^n}$  für ungerade  $n$ :  $x_1^{3^n} x_{n+1} k^{3^{n-2}+3^{n+4}+\cdots+3^n} = k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\cdots+3^n}$ 

und nach Summirung der geometrischen Progressionen

für gerade 
$$n$$
:  $x_1^{3^n} = x_{n+1} k^{\frac{3^{n-1}}{4}}$  für ungerade  $n$ :  $x_{n+1} x_1^{3^n} = k^{\frac{3^{n+1}}{4}}$ ;

beide Gleichungen lassen sich in die eine zusammenfassen:

$$x_1^{3^n} = (x_{n+1})^{(-1)^n} k^{\frac{3^{n-(-1)^n}}{4}}.$$
 (1)

Sollen die Punkte ein geschlossenes Polygon, ein n-Eck bilden, so muss der letzte mit dem ersten zusammenfallen, also  $x_{n+1} \equiv x_1$  sein; demnach hat ein Punkt auf  $R_4$ , von welchem ausgehend sich derselben ein n-Eck um- und einschreiben lässt, der Gleichung

$$x^{3n-(-1)^n} = k^{\frac{3n-(-1)^n}{4}} \tag{2}$$

zu genügen.

Hiernach lauten die charakteristischen Gleichungen für Zwei-, Drei-,...Siebenecke... wie folgt:

$$n = 2$$
  $x^8 = k^2$   
 $= 3$   $x^{28} = k^7$   
 $= 4$   $x^{80} = k^{20}$   
 $= 5$   $x^{244} = k^{61}$   
 $= 6$   $x^{728} = k^{182}$   
 $= 7$   $x^{2188} = k^{547}$  U. S. W.

Da sich unter den  $[3^n - (-1)^n]^2$  Lösungen der Gleichung (2) (siehe Artikel 41) auch die 16 Wendeberührungspunkte als Wurzeln der Gleichung  $x^4 = k$  befinden, so bleiben nach Ausscheidung dieser, da sie als Ecken nicht auftreten können, noch

$$N_n = [3^n - (-1)^n]^2 - 16$$

Punkte übrig; daher ist die Anzahl der einer  $R_{4}$  um- und eingeschriebenen n-Ecke, sofern n eine Primzahl bedeutet,

$$\xi_n = \frac{[3^n - (-1)^n]^2 - 16}{n}; \tag{3}$$

hat dagegen n die von einander verschiedenen Theiler  $t_1, t_2, \ldots$  (mit Einschluss von 2), so gilt die Formel

$$\zeta_n = \frac{[3^n - (-1)^n]^2 - 16 - \sum_i t_i \zeta_{t_i}}{n}$$
 (4)

Für die oben angeführten speciellen Werthe von n gibt diese Formel:

Eckenzahl Anzahl der Polygone
$$2 24 = \frac{8^2 - 16}{2}$$

$$3 256 = \frac{28^2 - 16}{3}$$

$$4 1584 = \frac{80^2 - 16 - 2.24}{4}$$

$$5 11904 = \frac{244^2 - 16}{5}$$

$$6 88192 = \frac{728^2 - 16 - 2.24 - 3.256}{6}$$

$$7 683904 = \frac{2188^2 - 16}{7}, \text{ u. s. w.}$$

## VII. Die Küpper'schen Sätze über die Steiner'schen Polygone. 1

61. Auf  $C_3$  sei eine Reihe fester Fundamentalpunkte abcde... gegeben; man ziehe von dem beliebigen Punkte 0 der  $C_3$  ausgehend nach einander die Geraden 0a1, 1b2, 2c3, 3d4,... derart, dass die Punkte 1, 2, 3, 4,...,...,+ $\delta$ ,... ebenso wie 0 auf  $C_3$  liegen. [ $\delta$  möge als Abstand des Punktes  $\nu + \delta$  von dem Punkte  $\nu$  bezeichnet werden; hiernach hat der Punkt  $\nu - \delta$  von  $\nu$  den Abstand  $-\delta$ ; unter \*Abstand der Punkte 2k und 2l+1 soll immer der Abstand des unpaaren von dem paaren, also die Differenz 2l+1-2k=2(l-k)+1 verstanden sein.]

Auf Grund des Entstehungsgesetzes obiger Punktreihe gelten die Gleichungen

$$0a1 = 1b2 = 2c3 = 3d4 = \ldots = k$$
.

Wir betrachten nun die Punkte  $\nu$  und  $\nu+\delta$  (wobei  $\delta$  eine ungerade Zahl sein soll) und nennen die zwischenliegenden Fundamentalpunkte  $a_1 a_2 \dots a_{\delta}$ ; dann ist

$$va_1(v+1) = (v+1)a_2(v+2) = (v+2)a_3(v+3) = \dots = (v+\delta-1)a_\delta(v+\delta) = k;$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Mathem. Annalen, Bd. XXIV.

daraus folgt

$$v(v+1) = \frac{k}{a_1}$$

$$\frac{k}{a_2} = (v+1)(v+2)$$

$$(v+2)(v+3) = \frac{k}{a_3}$$

$$\dots$$

$$(v+\delta-1)(v+\delta) = \frac{k}{a_2}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$\nu(\nu+\delta) = \frac{a_2 a_4 \dots a_{\delta-1}}{a_1 a_3 \dots a_{\delta}} k;$$

bezeichnet man den dritten Schnittpunkt der Geraden  $\overline{\nu(\nu+\delta)}$  mit  $C_3$  durch f, so ist

$$f = \frac{k}{\nu(\nu+\delta)} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{\delta}}{a_2 a_4 \dots a_{\delta-1}};$$

d. h. \*die Gerade, welche einen bestimmten Punkt  $\nu$  mit dem um eine bestimmte ungerade Zahl  $+\delta$  von ihm entfernten Punkte verbindet, trifft die  $C_3$  in einem festen Punkte, dessen Lage nämlich von der Wahl des Ausgangspunktes 0, also von der Punktreihe, in der man sich gerade befindet, unabhängig ist.\*

62. Es seien nur zwei von einander verschiedene Fundamentalpunkte a, b gegeben, welche abwechselnd der obigen Vorschrift gemäss benutzt werden, so dass die Reihe abcd... übergeht in abab... Man hat dann die Gleichungen

$$0a1 = 1b2 = 2a3 = 3b4 = \dots$$
  
=  $2\nu a(2\nu + 1) = \dots = (2\mu - 1)b \cdot 2\mu = \dots = k$ ,

aus welchen sich ergibt

Über einen symbolischen Calcul.

$$1 = \frac{k}{a0} \qquad 2 = \frac{k}{b1} = \frac{a0}{b}$$

$$3 = \frac{k}{a2} = \frac{kb}{a^20} \qquad 4 = \frac{k}{b3} = \frac{a^20}{b^2}$$

$$5 = \frac{k}{a4} = \frac{kb^2}{a^30} \qquad 6 = \frac{k}{b5} = \frac{a^30}{b^3}$$

also in zusammenfassender Darstellung:

$$1 = \frac{k}{a0}$$

$$2 = \frac{a}{b}0.$$

$$3 = \frac{b}{a}\frac{k}{a0}$$

$$4 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 0$$

$$5 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{k}{a0}$$

$$6 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 0$$

$$2\nu + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \frac{k}{a0}$$

$$2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} 0.$$

Auf Grund der allgemeinen Endformeln dieser zwei Reihen lässt sich nun der folgende Satz beweisen: Die Gerade, welche zwei Punkte verbindet, deren Abstand eine bestimmte ungerade Zahl ist, geht durch einen festen, d. i. von der Lage des Ausgangspunktes 0 unabhängigen Punkt der  $C_3$ «.

Die beiden Punkte mögen mit  $\mu$ ,  $\mu'$  bezeichnet werden. Zunächst sei  $\mu$  gerad, etwa  $\mu=2\nu$ ; dann ist  $\mu'=2\nu+\delta$  und daher

$$\mu = 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} 0$$

$$\mu' = \left[2\nu + (\delta - 1)\right] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu + \frac{\delta - 1}{2}} \frac{k}{a \cdot 0};$$

somit hat man

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b-1}{2}} \frac{k}{a};$$

wird der dritte Schnittpunkt von  $\mu\mu'$  mit  $C_3$  durch f bezeichnet, so ist

$$f = \frac{k}{\mu \mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} a,$$

also f thatsächlich ein Punkt, dessen Lage nur von a, b und  $\delta$  abhängt.

Ist hingegen  $\mu$  ungerad  $= 2\nu - \delta$ , so ist  $\mu' = 2\nu$ , der Abstand beider Punkte  $\mu - \mu' = -\delta$  negativ. Es ist dann

$$\mu = [2\nu - (\delta + 1)] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu - \frac{\delta + 1}{2}} \frac{k}{a \cdot 0}$$

$$\mu' = 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} 0,$$

folglich

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b+1}{2}} \frac{k}{a}$$

und der dritte Schnittpunkt f' von  $\overline{\mu}\underline{\mu}'$  mit  $C_3$ 

$$f' = \frac{k}{\mu \, \mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{b+1}{2}} a$$

wieder ein fester Punkt. Die Gerade  $\overline{ff'}$  schneide  $C_3$  weiter in c, so ist

$$= \frac{k}{ff'} = \frac{k}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}a^2} = \frac{k}{ab}.$$

Da dieser Punkt von & nicht mehr abhängt — es ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte — so gelangt man zu dem Satze:

»Die Punkte f, welche als Schnittpunkte der  $C_3$  mit den Verbindungslinien von je einem paaren und unpaaren Punkte in allen denkbaren Reihen auftreten, liegen zu je zweien auf den Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel c auf  $C_3$  liegt.«

Soll sich das Polygon schliessen, nachdem jeder Fundamentalpunkt n-mal durchlaufen wurde, so muss  $2n\equiv 0$  werden, also

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n 0 = 0,$$

d. h.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n=1$  oder  $a^n=b^n$  sein; sind also die Fundamentalpunkte a,b Hauptpunkte einer Involution  $J_{n-1}^n$   $n^{\text{ten}}$  Grades, so schliesst sich das Steiner'sche Polygon zu einem 2n-Eck, von welchem Punkte der  $C_3$  man auch ausgehen mag.



### Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen

von

### Dr. Eduard Suchanek.

Schreibt man die ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe nach Einführung symbolischer Exponenten als sogenannte dyadische Producte, so bilden die letzteren lauter Specialisirungen des Gleichungssystems:

$$D_{1} = 1^{c_{1}}, \quad D_{2} = 1^{c_{1}} 0^{c_{2}} 1^{c_{3}}, \dots$$

$$D_{r} = 1^{c_{1}} 0^{c_{2}} 1^{c_{3}} \dots 0^{c_{2r-2}} 1^{c_{2r-1}} \dots$$

und begründen daher eine Eintheilung aller ungeraden Zahlen in solche erster, zweiter, ... $r^{ter}$  Ordnung, welche — unter  $s_k$  allgemein die Summe:

$$C_k + C_{k+1} + C_{k+2} + \ldots + C_{2r-1}$$

verstanden - bekanntlich auch durch die Ausdrücke:

$$D_1 = 2^{c_1} - 1$$
,  $D_2 = 2^{c_1 + c_2 + c_3} - 2^{c_2 + c_3} + 2^{c_3} - 1$ , ....  
 $D_r = 2^{s_1} - 2^{s_2} + 2^{s_3} - \dots + 2^{s_{2r-1}} - 1$ ,....

definirbar sind. Hiebei bedeuten  $c_1, c_2, \ldots, c_{2r-1}$  nunmehr Potenzexponenten, deren jeweilige Summen direct die An-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man vergleiche hierüber Dr. O. Simony's Abhandlung: Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung (Sitzb. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, 96. Bd., II. Abth., S. 191–286), auf welche sich auch alle folgenden Citate beziehen. Dieselbe Arbeit enthält bereits die dyadische Coordination der bis 2<sup>14</sup>=16384 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen.

zahlen:  $A_1, A_2, \ldots A_r$  der zur vollständigen dyadischen Aufschreibung der betreffenden Zahlen erster, zweiter,  $\ldots r^{\rm ter}$  Ordnung nöthigen Ziffern bestimmen. — Die Fortsetzung der Transcription von 3, 5, 7...in  $1^2$ , 101,  $1^3$ ...bis zu irgend einer Potenz von 2, etwa  $2^n$ , liefert dann im Ganzen  $2^{n-1}$ —1 dyadische Producte und zwar in unmittelbarem Zusammenhange mit der binomischen Entwicklung von  $2^{n-1}$  speciell n-1 Zahlen erster Ordnung, ferner:

$$\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{3}$$

Zahlen zweiter Ordnung und allgemein:

$$\binom{n-1}{2k-2} + \binom{n-1}{2k-1} = \binom{n}{2k-1}$$

Zahlen kter Ordnung, so dass für gerade Werthe von n im Ganzen noch n Zahlen die höchste überhaupt vorkommende Ordnungszahl  $\frac{1}{2}n$  besitzen, während für ungerade Werthe von n noch  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Zahlen die Ordnungszahl  $\frac{1}{2}(n-1)$  aufweisen und nur einer einzigen Zahl, nämlich:

$$2^{n-1} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 1 = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$$

die höchste überhaupt vertretene Ordnungszahl  $\frac{1}{2}(n+1)$  zukommt.

Die charakteristischen Exponenten:  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,... der verschiedenen ungeraden Zahlen vermitteln ihrerseits eigenthümliche Kriterien für deren Theilbarkeit durch 3, sobald man aus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,... nach dem Schema:

dem Schema: 
$$I = \frac{1}{c_1 + 1}$$

$$c_2 + 1$$

$$c_3 + \cdots$$
in inf.

Kettenbrüche bildet und dieselben in gemeine Brüche verwandelt, welche augenscheinlich insgesammt der Reihe der

aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von  $I: \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \dots \frac{Z_p}{N_p} \dots$  angehören. Es besitzen nämlich die auf solche Art abgeleiteten gemeinen Brüche gerade oder ungerade Nenner:  $N_p$ , je nachdem die erzeugenden Zahlen durch 3 theilbar sind oder nicht, in welch' letzterem Falle  $N_{p-1}$  für Zahlen von der Form 6l-1 gerade, hingegen für jene von der Gestalt 6l+1 ungerade ist. 1

Anderseits treten die den Nennern:  $N_{p-1}$ ,  $N_p$  zugehörigen Zähler:  $Z_{p-1}$ ,  $Z_p$  in eine bisher unbekannt gebliebene Beziehung zur jeweiligen Anzahl: A der dyadischen Ziffern der erzeugenden Zahl, welcher Zusammenhang sich zunächst für beliebige Zahlen zweiter Ordnung leicht mathematisch präcisiren lässt. — Indem wir hiebei gerade und ungerade Specialisirungen von  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $A_2$ ;  $Z_2$ ,  $Z_3$ ;  $N_2$ ,  $N_3$  durch Zuordnung der Buchstaben: g und u von einander sondern, ergibt sich auf Grundlage der Gleichungen:

$$Z_2 = c_2$$
,  $N_2 = c_1 c_2 + 1$ ;  
 $Z_3 = c_2 c_3 + 1$ ,  $N_3 = c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3$ 

das alle möglichen Fälle umfassende Schema:

$c_1$	<i>c</i> <sub>9</sub>	<i>c</i> <sub>3</sub>	$A_{2}$	$Z_2$	$Z_3$	$N_2$	$N_3$	$D_2$
g	g	g	g	g	11	11	g	31
,	g	tt	u	g	u	11	11	6l + 1
77	11	g	11	u	u	u	g	31
,	u	14	g	11	g	14	u	61 + 1
14	g	g	11	g	u	1t	и	6/+1
,,	g	u	g	g	11	16	g	31
n l	11	g	8	14	11	g	14	61-1
77	11	14	14	u	8	g	16	6l - 1

Hieraus entspringen folgende Wahrscheinlichkeitsschlüsse:

(I) Für jede durch 3 theilbare Zahl bleibt der Zähler:  $Z_p$  des ihren dyadischen Exponenten coordinirten Bruches ungerade, während dessen letzter Näherungsbruch einen geraden oder ungeraden Zähler:  $Z_{p-1}$  besitzt, je nachdem die dyadische Stellenzahl: A gerade oder ungerade ist.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Simony a. a. O. S. 227 - 230.

- (II) Für jede Zahl von der Form 6l-1 ist  $Z_p$  eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem A gerade oder ungerade ist, während  $Z_{p-1}$  ungerade bleibt.
- (III) Für jede Zahl von der Form 6l+1 ist  $Z_p$  zugleich mit A gerade oder ungerade, während  $Z_{p-1}$  ungerade oder gerade wird, je nachdem A eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

Da 2g-1 stets durch 3 theilbar ist, mithin

$$2^{n}-1=2(2^{n-1}-1)+1$$

ausnahmslos die Form 6l+1 besitzt, und dem zu  $D_1$  gehörigen Bruche;  $\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{c_1}$  im Einklange mit den Sätzen (I) und (III) die beiden fictiven Gleichungen:  $Z_0=0$ ,  $N_0=1$  coordinirt werden können, gelten die Schlüsse (I), (II), (III) offenbar auch für alle Zahlen dritter und höherer Ordnungen, sobald unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit für Zahlen  $r^{\text{ter}}$  Ordnung:  $D_r$  dieselben Schlüsse für Zahlen  $(r+1)^{\text{ter}}$  Ordnung:  $D_{r+1}$  resultiren. — Dass das Letztere in der That der Fall ist, lässt sich leicht zeigen, wenn wir hiebei die für alle Näherungsbrüche von I giltige Relation:

$$Z_{2r-1}N_{2r-2}-Z_{2r-2}N_{2r-1}=1$$

berücksichtigen. Vermöge dieser Beziehung kommen nämlich für  $\mathbb{Z}_{2r-2}, \ \mathbb{Z}_{2r-1}; \ N_{2r-2}, \ N_{2r-1}$  überhaupt nur sechs Zahlencombinationen:

$$g, u, u, g; u, u, u, g; u, u, g, u; u, g, g, u; u, g, u, u; g, u, u, u$$

in Betracht, welche den Zahlencharakter von  $A_r$  und  $D_r$ , sowie jenen von  $Z_{2r}$ ,  $Z_{2r+1}$ ;  $N_{2r}$ ,  $N_{2r+1}$ ;  $A_{r+1}$  und  $D_{r+1}$  unter Verwerthung der bekannten Formeln:

$$Z_p = c_p Z_{p-1} + Z_{p-2}, \quad N_p = c_p N_{p-1} + N_{p-2}$$

für jede der vier möglichen Zahlencombinationen von  $c_{2r}$ ,  $c_{2r+1}$  eindeutig feststellen lassen. Die diesbezüglichen Ergebnisse gestatten die nachstehende Gruppirung, welche die allgemeine Übertragbarkeit der Schlüsse (I), (II), (III) von  $D_r$  auf  $D_{r+1}$  klar ersichtlich macht:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wie in der Rubrik von  $D_r$  ist auch in jener von  $D_{r+1}$  jede der drei Zahlenformen: 3l, 6l-1 und 6l+1 achtmal vertreten.

$D_{r+1}$	31 61+1 31 61+1	31 61+1 31 61+1	$     \begin{array}{c c}       6l - 1 \\       6l - 1 \\       6l + 1 \\       3l     \end{array} $	6l - 1 6l - 1 6l + 1 3l	6l + 1 $3l$ $6l - 1$ $6l - 1$	6l + 1 $3l$ $6l - 1$ $6l - 1$
$A_{r+1}$	po = = po	= 50 50 =	50 2 2 50	= bo bo =	po = = po	= b0 b0 =
N2r+1	po = po =	po = po =	=== %	=== >0	= 50 = =	2 00 2 2
N2r	222	2222	po po = =	50 50 Z Z	2 2 50 5c	2 2 00 00
Z2r+1	2 2 2 bo	= b0 = =	n 8	bo = bc =	po	2 2 2 bo
Z2r	0000 22 22	# # bo bo	= = 50 50	2222	* * * *	po po 2 2
c2r+1	50 22 50 22	po = po =	00 2 00 2	bo = bo =	00 x 00 x	50 22 50 22
C2r	20 20 21 21	po po = =	po po 21 21	po po = =	po po = =	bo bo 2 2
$D_r$	31	31	61 — 1 "	6l - 1	6 <i>l</i> + 1 " " "	61 + 1
Ar	20 x x x	2 2 2 2	p0 = = =	3 2 2 2	<i>2</i> 0	2 2 2 2
N2r-1	<i>b</i> 0	po e e e	222		222	222
N2r-2	222	2 2 2 2	po e e s	20 e e e	2	222
$Z_{2r-1}$	2 2 2 2	2 2 2 2		<i>2</i> 0 ≈ ≈ €	po e e e	2 2 2 2
Z2r-2	perr	2 c c r		= c c t	2 2 2 2	<i>p</i> 0

Die hier entwickelten Eigenschaften von  $N_p$ ,  $N_{p-1}$ ,  $Z_p$ ,  $Z_{p-1}$  bilden zugleich einfache qualitative Kriterien für die Richtigkeit der Rechnung, falls man zu irgend welchen ungeraden Zahlen die coordinirten Brüche aufsucht, deren Nennern:  $N_p$  dann auch umgekehrt die erzeugenden Zahlen durch die Zähler:  $Z_p$  zugeordnet werden können.

Eine derartige Zuordnung, welche sich nach ihrem Ursprunge naturgemäss als dyadische bezeichnen lässt, ist hier auf alle bis 100.000 vorkommenden Primzahlen (Z) von den Formen 6l-1 und 6l+1 ausgedehnt worden, wobei auch gewisse topologisch-arithmetische Inductionsschlüsse in weiterem Umfange als bisher eine empirische Bestätigung gefunden haben.

Dieselben betreffen jene stabilen Knotengruppen, welche nach wiederholter Durchschneidung ringförmig geschlossener, von einer einzigen Randcurve begrenzter Streifen längs deren Mittellinien als integrirende Bestandtheile se cundärer transformirter Knotenverschlingungen auftreten und sich hinsichtlich ihrer Anordnung — unter U, V die Typensymbole zweier nur durch ihre Windungszahlen verschiedener einfacher Knoten, unter  $a_1, a_2 \ldots a_{2n-1}$  lauter positive ganze, der Einheit mindestens gleiche Zahlen verstanden — stets durch Ausdrücke von der Form:

$$P = V^{a_1} U^{a_2} V^{a_3} \dots U^{a_{2n-2}} V^{a_{2n-1}}$$

charakterisiren lassen. Falls nämlich schon der ursprünglich gegebene Streifen speciell mit einer solchen Knotenverbindung versehen war, wie sie in einem unverdrehten, bie gsamen Ringe durch einen nach u-Umläufen und t-Drehungen um je 360° längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufenden Schnitt erzeugt werden kann, bleiben die Anzahl und Anordnung der die Gruppe P constituirenden Knoten bei allen möglichen Drehungszahlen unverändert und bestimmen durch Vermittlung des der Gruppe P zugeordneten dyadischen Productes:

$$D_n = 1^{a_1} 0^{a_2} 1^{a_3} \dots 0^{a_{2n-2}} 1^{a_{2n-1}}$$

erfahrungsgemäss eine Primzahl von der Form 61-1 oder 61+1,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Simony a. a. O. S. 200 - 206, 213 und 225.

je nachdem die primäre Umlaufszahl: u ungerade oder gerade ist. Da anderseits die Verwandlung des aus der Exponentenreihe von  $D_n$  gebildeten Kettenbruches:

eten Kettenbruches:
$$K = \frac{1}{a_1 + 1}$$

$$a_2 + .$$

$$\vdots$$

$$a_{2n-1}$$

in einen gemeinen Bruch als Nenner des letzteren im ersten Falle direct die Zahl u, im zweiten u-1 liefert, erscheinen jene beiden Primzahlen einer und derselben ungeraden Zahl (N) zugleich dyadisch coordinirt. Ausserdem werden aber der letzteren durch die Reihe der relativen Primzahlen zu N als Zähler durchgängig noch weitere Primzahlen von den Formen 6l-1 und 6l+1 dyadisch zugeordnet, an welche Thatsache sich unmittelbar die Frage knüpft, ob jene mittelbar durch topologische Experimente gewonnenen Primzahlen vielleicht auch in arithmetischer Hinsicht specifische Merkmale besitzen?

Die vorliegende Arbeit liefert für alle bisher bekannt gewordenen stabilen Knotengruppen — 705 an der Zahl — die empirische Bestätigung, dass die denselben entsprechenden Primzahlen die kleinsten sind, welche sich den betreffenden Specialisirungen von Ndyadisch coordiniren lassen.

Hieraus entspringt die Folgerung, dass umgekehrt jede Primzahl von der zuletzt angegebenen Beschaffenheit eine stabile Knotengruppe charakterisirt, welche der Umlaufszahl N oder N+1 angehört, je nachdem jener Primzahl die Form 6l-1 oder 6l+1 zukommt. Es erscheint insoferne angemessen, derartige Primzahlen in der Folge durchwegs als topologische zu bezeichnen und in eine selbstständige aufsteigende Reihe zu bringen, aus welcher dann die Anzahlen:  $n_1, n_2, \ldots n_k$  aller überhaupt vorkommenden drei-, vier-,  $\ldots (k+2)$ -gliedrigen stabilen Knotengruppen P durch Abzählen der bei dyadischer Schreibweise drei-, vier-,  $\ldots (k+2)$ -gliedrigen topologischen Primzahlen zu gewinnen sind.

Auf solche Art ergibt sich das vorläufig bis  $n_{14}$  reichende Gleichungssystem:

 $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ ,  $n_4 = n_5 = 6$ ,  $n_6 = 9$ ,  $n_7 = 14$ ,  $n_8 = 33$ ,  $n_9 = 37$ ,  $n_{10} = 64$ ,  $n_{11} = 112$ ,  $n_{12} = 145$ ,  $n_{13} = 250$ ,  $n_{14} = 421$ , welches bis incl.  $n_{13}$  auch nach topologischen Untersuchungen der Wirklichkeit entspricht. Ebenso hat sich das bereits bei der topologischen Feststellung aller fünfzehngliedrigen stabilen Knotengruppen erhaltene Resultat, dass bis zur Umlaufszahl:  $n_1 = 2^{10}$  höchstens sie bzehngliedrige stabile Knotengruppen auftreten, deren zugehörige Primzählen nur für

$$u = 861, P = V^2UVU^2V^5UVUV^3,$$
  
 $u = 951, P = V^2U^3VUVU^2VU^4V^2$ 

gemäss den Gleichungen:

$$D_5 = 1^2 010^2 1^5 0101^3 = 108503$$
 ( $Z_9 = 332$ )  
 $D_5 = 1^2 0^3 1010^2 10^4 1^2 = 100931$  ( $Z_9 = 418$ )

über 100.000 liegen, nunmehr durch directe Bestimmung der den Primzahlen 16411 bis 99991 dyadisch coordinirten Zahlen als richtig herausgestellt. <sup>1</sup>

Die Einbeziehung weiterer Primzahlen erschien um so weniger nothwendig, als gemäss den einleitenden Bemerkungen schon die Reihe der ungeraden Zahlen bis 1024 neun Zahlen erster Ordnung, ferner je 120 Zahlen zweiter und vierter Ordnung, 252 Zahlen dritter und zehn Zahlen fünfter Ordnung, nämlich:

$$341 = 101010101$$
,  $597 = 10^{2}1010101$ ,  $661 = 1010^{2}10101$ ,  $677 = 101010^{2}101$ ,  $681 = 10101010^{2}1$ ,  $683 = 101010101^{2}$ ,  $685 = 10101010^{2}01$ ,  $693 = 10101^{2}0101$ ,  $725 = 101^{2}010101$ ,  $853 = 1^{2}01010101$ 

umfasst, welch' letzteren sich nach den Resultaten der vorliegenden Arbeit noch:

$$D_6 = 10^2 1^3 01^2 0^2 1010^2 1^2 = 161363 (Z_{11} = 1421)$$
  
 $D_7 = 1010^2 1010^4 10101^2 = 169003 (Z_{13} = 1296)$ 

mittelst der charakteristischen Exponenten aller dyadischen Coordinirten von 861, 951 und 2047 direct arithmetisch controlirt, wonach meinerseits weitere Proberechnungen überslüssig gewesen wären.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Anlässlich zweier am 20. und 23 September 1887 in der mathematischen Section der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wiesbaden abgehaltener topologischer Vorträge hat Dr. Simony, wie aus seinen diesbezüglichen mir zur Einsicht überlassenen Rechnungen hervorgeht, die zu 861 und 951 gehörigen topologischen Primzahlen, sowie jene von 2047, nämlich:

sowie die einzige dyadisch eilfzifferige Zahl sechster Ordnung:

$$\frac{1}{3}(2^{12}-1) = 1365 = 10101010101$$

mit ausnahmslos unter 100.000 gelegenen topologischen Primzahlen anschliessen. Sollte mithin zwischen den dyadischen Exponenten ungerader Zahlen und jenen ihrer coordinirten topologischen Primzahlen irgend ein mathematisch präcisirbarer Zusammenhang bestehen, so dürften die betreffenden Formeln durch die hier mitgetheilten empirischen Resultate bereits ausreichend controlirt werden können.

Vermöge der vollen Übereinstimmung zweier umfangreicher Reihen specieller Ergebnisse, welche scheinbar völlig heterogenen Forschungszweigen, der Lehre von den Primzahlen und jener von den möglichen Verschlingungen ringförmig geschlossener, aus gegenseitig undurchdringlichen Elementen bestehenden Gebilde angehören, gewinnt consequent die topologische Gliederung der Primzahlen in zwei Hauptgruppen von den Formen 6l-1 und 6l+1 ein hervorragendes Interesse, welches auch eine selbstständige Zählung der Glieder beider Gruppen rechtfertigt.

Im Hinblicke hierauf enthält die nachstehende Exponententabelle der von  $2^{14}$  bis 100.000 vorkommenden Primzahlen, welche behufs völliger Sicherung aller numerischer Angaben einerseits von dem Verfasser anderseits auf dessen Kosten von einem langjährigen Calculator des k. k. österr. Gradmessungs-Bureaus, Herrn J. Strobl, separat berechnet worden ist, die jeweiligen Anzahlen: z', z'' beider Zahlenformen bis zur nebenstehenden Zahl Z in gesonderter Numerirung, sowie schliesslich der neben jedem Bruchnenner: N angegebene Nenner:  $\overline{N}$  des letzten Näherungsbruches eine directe Controle der Form von Z ermöglicht.

×	H H O 10 1	H 20 20 20 P	000+0	0 0 0 0 H	<b>0.0.0.70.</b> H
	221 151 249 295 237	241 395 435 389 217	319 199 209 271 299	383 349 341 341 341	4 1 3 2 9 5 2 1 1 2 9 5 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1
×	157 29 110 214 52	109 166 269 143	131 108 96 175 220	231 107 197 275 218	162 173 184 128
Exponenten	9494, 2, 20 9494, 5 949393, 2 94939929	40204, 2 4020002, 2 40200000 40200202	462, 3, 2, 2 462, 50 46065, 2 460460	400203 400203 4002,30 4002,300	04002, 2002 0400203, 2 04003, 3, 2
Ex	*****	****	4 4	****	4 4 4 6 4
Z	16921 16927 16931 16937 16943	16963 16979 16981 16987 16987	17011 17021 17027 17029 17033	17041 17047 17053 17077 17093	17099 17107 17117 17123
-	964	965 966 967 968	969	971 972 973 974	975
ેસ	987 988 989	&	991 992 993	8	995
×	191 163 251 155	295 241 127 291 303	329 223 289 351	261 197 127 277 193	149 167 117 135
2	75 129 156 128 114	181 87 205 191	125 59 72 122 134	70 108 107 56	1 8 8 8 4 1 8 8 8 1
Exponenten	656462 6563636 6563666 656264	6562, 2 6562, 3 6562, 3 6562, 2 6662, 2	65 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	5, 2023 6, 204 6, 206 6, 3, 202 6, 4, 2, 3	65, 404 65, 55, 25, 20 65, 65, 20 64, 65, 20 64, 20
2	16651 16657 16661 16673 16691	16693 16699 16703 16729 16741	16747 16759 16763 16787 16811	16823 16829 16831 16843 16871	16879 16883 16889 16901
=;	951	953 954 955 956	957	989	196
`≀≀	974	977	978	982   982	984
>	83 107 125 85	55 97 123 137 93	143 159 125 147 191	221 167 197 151 221	125 211 137 115
<b>&gt;</b>	31 68 68 48 66	04077	4 6 8 1 8 4 8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	160 129 53 83	36 36 179
Exponenten	99, 202 8804 8804 88020 88000 88000	e8, 6 9704, 2 970300 970300	67, 2, 2, 3 67, 2628 664, 3 6628 6688, 2	66 0 2 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	96, 205 66, 300 66, 403 66, 5, 20
Z	16411 16417 16421 16427 16433	16447 16451 16453 16477 16481	16487 16493 16519 16529 16547	16553 16561 16567 16573 16603	16607 16619 16631 16633
1,2	940 941	942	945	946 947 948 949	1   %
72	1 9 6 1 6 2 6 2 6 2 6 2 6 2 6 2 6 2 6 2 6 2	963	965 966 967 968	8	970

z²         Z         Exponenten         N         z²         <						
2"         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         z'         Z         pomenten         N         z'         z'         Z         z'         Z         Exponenten           17159         at, a, 5, 3         60         191         100         17393         at, 6, 3         101         100         17679         334, 2, 3         334         101         101         101         64, 1, 2, 3         101         1769         334, 2, 3         103         347         100         1769         334, 2, 3         103         347         100         1769         334, 2, 3         103         347         100         1769         334, 2         1769         334, 2         1769         334, 2         1769         334, 2         1769         334, 2         1769         334, 2         1779         3349, 3         1779         3349         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3         1779         3344, 3	III-	253 253 265 265	2 4 2 3 3 4 2 3 4 2 3 4 5 5 3 3 4 5 5 3 3 4 5 5 3 3 5 5 5 5	24 665 403 403 403	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	305 305
2"         Z         Exponenten         N         z'         z <t< th=""><th>×</th><th>127 164 164 172</th><th>181 181 207 208</th><th>25.4 4 1.4 1 0 0 1 0 0 1</th><th>152 23 78 316</th><th>151 105 105 269 132</th></t<>	×	127 164 164 172	181 181 207 208	25.4 4 1.4 1 0 0 1 0 0 1	152 23 78 316	151 105 105 269 132
z./         Z         Exponenten         N         z'	Exponenten	6362, 20003 6362, 20202 6362, 5, 20 6362, 562 630005	3388383838383838383838383388833838833888388388838888	030000202, 2 030000002, 2 030002, 4 03000303	30005 30007 3002, 3, 4 3002003, 2	630020004 63003, 3, 3 6300302, 20 63004, 3, 2
z./*         Z         z/         z/         Z/         Z         z/         Z<	Z	17623 17627 17657 17659 17659		17737 17747 17749 17761		17839 17851 17863 17881 17891
z./*         Z         Exponenten         \overline{N}         X         z./*         Z         z./*         Z         x./*         Z         X         Z	1,12		1007			1015
z'/z         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten         N	,2	1020 1021 1021	5     5	102	1027 1028 1029	1     8
z'/1         Z         Exponenten         N         z'/2         z'/1         Z         Exponenten           977         17159         94, 3, 5, 3         60         191         1009         17393         94, 6, 39           977         17167         94, 2, 4, 4         49         207         1741         396522           978         1718         94, 2, 22, 3         103         347         993         1741         396622           978         17191         64, 2, 2, 2, 3         103         347         993         1741         396622           978         17207         64, 2, 2, 3, 2         215         379         993         1741         396622           980         17207         64, 2, 2, 3, 3         211         303         1747         396622           981         17207         64, 2, 2, 3, 2         215         379         994         17447         336620           982         17207         64, 2, 2, 2, 3         2         201         1747         336620           981         17207         64, 2, 2, 2, 3         2         101         1747         336620           982         17207         64, 2, 2, 2, 3         2	N	129 113 151 185 223	251 299 279 149 321	407 311 421 373 401	291 237 303 293 515	
z'/         Z         Exponenten         N         z'         z'/         Z           977         17159         94, 2, 5, 3         60         191         1009         17393           977         17189         94, 2, 3, 5         38         201         1010         991         17401           978         17189         94, 2, 222, 3         103         347         992         17419           978         17207         94, 2, 2, 23, 3         103         347         993         17419           980         17207         94, 2, 2, 23, 3         211         303         477         995         17443           981         17207         94, 2, 2, 23, 3         211         303         477         995         17477           981         17207         94, 2, 2, 23, 2         211         303         477         477           981         1723         94, 200         20         307         1011         1747           982         1729         94, 3, 30         20         307         1012         1747           983         1729         94, 3, 20         20         20         307         1012         17483	N	98 77 112 73 63	217 101 24 206	158 244 177 263 253	62 109 71 241 326	307 184 33 306
z'/         Z         Exponenten         N         z'/         z'/           977         17159         94, 2, 5, 3         60         191         1009         991           977         17183         94, 2, 4, 4         49         207         1000         991           978         17183         94, 2, 2, 2, 3         103         347         993           978         17207         94, 2, 2, 2, 3         103         347         993           980         17207         94, 2, 2, 2, 3         211         303         995           981         17207         94, 2, 2, 3, 3         211         303         905           982         1723         94, 2, 2, 3, 3         211         303         905           981         1723         94, 2, 2, 3, 2         211         303         905           982         1725         94, 2, 2, 2, 3         173         905         905           984         1729         94, 3, 202         143         303         905           985         17317         94, 300         27         359         905           986         1733         94, 3, 30         121         1001 <t< th=""><th>Exponenten</th><th>e4, 6, 3e e4, 7, 2e 3662e 38682</th><th></th><th>03030000 03030003 0303000, 2 0303002, 20</th><th>0303, 204 030205, 2 030203, 4 03020040</th><th>0302000000 030200400 0302006 030200</th></t<>	Exponenten	e4, 6, 3e e4, 7, 2e 3662e 38682		03030000 03030003 0303000, 2 0303002, 20	0303, 204 030205, 2 030203, 4 03020040	0302000000 030200400 0302006 030200
2" Z Exponenten N N z'  17159 94, 2, 3, 3 977 17167 94, 2, 4, 4 977 17167 94, 2, 3, 4 978 17191 94, 2, 20, 2, 3, 38 201 1010 979 17203 94, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	2		17443 17449 17467 17471	17483 17489 17491 17497 17509		17579 17581 17597 17599 17609
2" Z Exponenten N N N N 17159 94, 2, 3, 3 60 191 977 17167 94, 2, 4, 4 9 307 17167 94, 2, 4, 4 9 307 17167 94, 2, 2, 3, 5 3 60 191 978 17191 94, 2, 2, 2, 3 3 347 981 17207 94, 2, 2, 2, 3, 3 103 347 981 17207 94, 2, 2, 2, 3, 3 157 379 982 17203 94, 2, 2, 2, 3 2 11 303 981 17257 94, 2000000000000000000000000000000000000	12	991	995			
2" Z Exponenten N	,22			1014	1015	
2" Z Exponenten	×	191 207 201 385 347	379 341 303 307 409	365 313 297 339 359	35.9 35.9 35.9 35.9 35.9 35.9	209 135 197 233 207
2" Z Exponenten  "T7159 94, 3, 5, 3  977 17167 94, 2, 4, 4  17189 94, 2, 24, 3, 3  978 17191 94, 2, 22, 3, 3  979 17203 94, 2, 2, 2, 3, 3  979 17207 94, 2, 2, 2, 3, 3  981 17207 94, 2, 2, 2, 3, 3  982 17207 94, 2, 2, 2, 3  983 17293 94, 3, 2, 2  984 17291 94, 3, 20  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17321 94, 30002  17331 94, 30002  17331 94, 30002  17331 94, 30002  17331 94, 30002  17331 94, 30002  17331 96, 4, 3, 3	×	00 44 44 103		263 122 175 143 227	2 2 2 8 8 9 1 2 1 8 9 9 1 2 1 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	47 109 57 88 119
2", Z 977 17159 977 17169 978 17189 979 17189 980 17209 981 17239 982 17239 984 17299 985 17257 17321 17331 1	Exponenten		64, 2, 2, 2, 2 64, 2, 2, 203 64, 2, 2, 3, 20 64, 202, 4		64, 300020 64, 30004 64, 30400 64, 4, 3, 3	
	2		17203 17207 17209 17231 17239	17257 17291 17293 17299 17317	17321 17327 17333 17341 17351	
m 1 0 0	1,2	977		- •	• • • •	
2   99   99   100		998 1000		8	1004 1005 1006 1007	

1===					
×	317 367 257 143 197	293 217 129 195 107	47 109 167 209 201	197 223 215 287 287 451	363 405 431 389 259
N	4 6 6 1 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	113 121 104 112	43 66 89 143	112 173 119 88 279	256 149 164 225 179
Exponenten	63, 4, 2, 2, 26 63, 4020 63, 402, 30 63, 406 63, 5, 4, 2	63, 5, 202 63, 5030 63, 6, 40 63, 6220 63, 802	20 IO 0 208,3 207002 20692,2	226, 3 225, 2, 3 225, 4 2243, 3	22 4 4 6 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
7	18329 18341 18353 18367 18371	18379 18397 18401 18413 18427	18433 18443 18443 18451	18461 18481 18493 18503	1057 18521 1057 18523 1058 18531 1059 18553
1,2	1   1046	1047	1050 1051 1052 1053	1054 1055 1056	1057
12	1054 1055 1056 1057	1058	8	1061	1064
N	437 367 511 559 275	423 235 237 237 353	361 421 335 455 339	445 445 355 389 303	273 213 195 233 271
N	319 83 345 48	266 161 151 56 99	159 305 73 279 279	184 261 278 218 64	209 115 89 72 199
Exponenten	18121 63, 262, 2628 18127 63, 263, 2, 4 18131 63, 262662, 2 18133 63, 2626666	03, 203, 200 03, 205, 20 03, 3, 500 03, 3, 4, 4 03, 3, 300	63, 3, 203, 2 63, 3, 200020 63, 3, 2004 63, 3, 2, 2000 63, 3, 2, 3	63, 3002, 2003, 3003, 3003, 3003, 00	e3, 3e3, 3e e3, 3e5e e3, 4, 5, 2 e3, 4, 4, 3 e3, 4, 3e2e
2		18149 18169 18181 18191	18211 18217 18223 18229 18233	18251 18253 18257 18269 18287	18289 18301 18307 18311 18313
,,2	1033	1034	1037 1038 1039 1040	1 5	1043
,2	1044	1 2   1 2	1048	1049	1 1053
N	241 277 227 85 143	223 325 413 373 417	337 297 323 407 433	313 335 163 167 461	439 443 539 403 389
N	50 168 76 67	165 138 262 111 173	235 164 146 261 243	216 119 22 145 180	259 250 390 311
Exponenten	0300404 03005000 0300503 03, 2, 80	63, 2, 5 6 2 6 63, 2, 4 6 2, 2 63, 2, 3 6 2 6 6 63, 2, 3 6 2, 3 63, 2, 3, 2, 3, 2	63, 2, 3, 3, 20 63, 2, 3, 40 63, 2, 20, 2 63, 2, 20, 20 63, 2, 20, 20 63, 2, 20, 20	63, 2, 2, 4, 20 63, 2, 2, 402 63, 2, 2, 7 63, 2006 63, 2003	3, 2003, 2003, 2003, 2003, 2000, 2000, 2000, 300
7	17903 17909 17911 17921 17923	17929 17939 17957 17959	17977 17981 17987 17989 18013	18041 18043 18047 18049 18059	18061 18087 18089 18097
,,2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1021	1024	1027	1029
સ	1032	1035	1036	1039	1041

×	309		323 617 459 527 437	573 605 619 601 447	371 559 509 541 427	217 451 369 337 227
N	83 97 176	255	61 391 355 190 197	419 426 390 347 118	239 324 210 331 153	32 174 259 183 39
Exponenten	02000304 02002, 5, 3 02002, 4002		2002, 3, 5 2002, 2020 2002, 2, 2, 3 2002, 2, 3, 3 2002, 2, 302	020020020 02002002, 20 0200202, 200 0200202020	02003, 4000 0200300020 0200302, 2, 2 020030200	19391 e2ee3e6 19403 e2ee4, 2ee 19417 e2ee4e2, 2e 19421 e2ee4e3ee 19423 e2ee4e5
7	1079 19183 1080 19207		19231 19237 19249 19259	19273 19289 19309 19319	19333 19373 19379 19381 19387	19391 19403 19417 19421 19423
"2	1079	1081	1084 1085 1085 1086	1087	9801	1103 — 1104 — 1105 — 11093
22	1 0 0 1	11	1 1097	1099 1099 1099		1103
N	48 277 203 251 262 417	107 369 84 179	62 259 215 379 193 437 302 433 229 269	338 527 178 643 316 563 265 697 185 341	192 221 134 431 373 507 105 449 416 539	206 459 365 571 466 755 242 661 314 545
N	20 8 20 3 20 3	107	62 215 193 302 229	338 178 316 265 185	192 134 373 105 416	206 365 466 242 314
Exponenten	0202, 305 0202, 4, 40 0202, 4, 2000		18973 e2eee5, 4 18973 e2eee4, 3ee 18979 e2eee3e3, 2 19001 e2eee3, 3, 2e	19013 ezeeszees 19031 ezeeszees 19037 ezeeszees 19051 ezees, zees 19069 ezees, zees	19073 ezeeee66 19079 ezeeee4,3 19081 ezeeee3eze 19087 ezeeee3,4 19121 ezeeee2,3	19139 e20002, 4, 2 19141 e20002, 300 19157 e200020000 19163 e20002002 19181 e20003020
7	18911 18913 18917	18919	18959 18973 18979 19001 19009	19013 19031 19037 19051		19139 19141 19157 19163 19181
12	1069	1070	1071	1075	1076	1078
,2	1081	1083	1085	1086	8 8 1 8	1092 1093 1094 1095
N	447 481 200	276 397 283 483	275 437 64 305 79 301 101 217 228 385	310 437 56 295 250 653 138 511 220 399	339 529 458 741 227 521 413 573 346 599	212 517 152 545 263 689 374 611 218 521
N	125 178 246	276	275 64 79 101 228	310 56 250 138 220	339 458 227 413 346	152 152 263 374 218
Exponenten	020302003 020302, 202 020308040		0203, 3, 2000 0203, 304 0203, 403 020206, 2	020203, 2, 20 020203, 5 020202000 020202, 203 020202, 400	01010000000000000000000000000000000000	18839 esec, 2, 22 18839 esec, 2, 2ee3 18859 esec, 2eeeee 18869 esec, 2eceee
7	18583 18587 18503	18617	18661 18671 18679 18691 18701	18713 18719 18731 18743 18749	18757 18773 18787 18793 18797	18803 18839 18859 18869 18869
12	§	1901	1062 1063 1064	11111	1066	
*2	1065	1067	1069	1070 1071 1072 1073 1073	1075	1077 1078 1068 1080

-,2	",2	Z	Exponenten	2	×	.,2	"2	2	Exponenten	$ \overline{N} $	N	,2	",2	2	Exponenten	N	×
1106		19427		124 287		111	19961	19661	•2, 2, 2, 2, 3, 2•• •2, 2, 2, 3, 4•	338 577 249 307	338 577 249 307	1128		19913	02, 203, 2020 02, 203, 2, 4 02, 2030003	326 84	447 373 477
11		19441 19441 19447	2006, 30 200693	145 191		811	1110 19699	19697	02, 2, 2, 4, 30 02, 2, 2, 4, 30	167	242 317 167 409	1130			02, 204, 40	198	245
8 6 6 1 1	1097 1098	19457 19463 19469 19471	2 2 3 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	66 73 52 163 142 239 45 187 211 339		1 1 2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1 1 2 2 1 1 1 2 2 1 1 1 2 2 1	<u>                                    </u>	19709 19717 19727 19739	1111 19709 e2, 2, 2, 560 1111 19717 e2, 200500 19727 e2, 2004, 4 19739 e2, 2003, 202	126 100 100 166	126 235 207 319 78 329 200 539 166 559	1133	1 1 1 1	19961 19963 19973 19979 19991	19961 e2, 2e6, 2e 19963 e2, 2e6e2 19973 e2, 3, 5ee 19979 e2, 3, 5ee2 19991 e2, 3, 4ee3	144 77 136 116 96	211 221 209 295 341
	1099 1100 1101 1102 1103	1099 19483 1100 19489 1101 19501 1102 19507 1103 19531	2, 2, 5, 202 02, 2, 400 02, 2, 400 02, 2, 4, 2, 2, 02, 2, 3, 2, 2, 2	121 325 183 221 245 421 169 407 203 523		1   2   3	11311	9753 9759 9763 9777	III3 19753 22, 20020020 III3 19759 22, 200204 19763 22, 2002, 2, 2, 2 III4 19777 22, 2000050	437 254 247 416	437 603 105 481 254 613 247 291 416 531	1136	1125	19993 19997 20011 20021 20023	19993 e2, 3, 4, 2, 2e 19997 e2, 3, 4, 3ee 20011 e2, 3, 3eee2 20021 e2, 3, 3, 2eee	235 182 195 294 109	331 321 509 479 403
1 2 6 4	1 1 1 1	19541 19543 19553 19559	6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	368 595 141 509 244 299 134 457 182 443			1115 19801 1116 19813 1117 19819 1118 19841	19801 19813 19819 19841	IIIS 19801 e2, 200002, 20 IIIIG 19813 e2, 20002, 2000 IIII7 19819 e2, 20020002 IIII8 19841 e2, 202, 60	443 409 267 172 145	443 629 409 649 267 703 172 199 145 317	1138	1129	20029 20047 20051 20063 20071	02, 3, 3, 400 02, 3, 2002, 4 02, 3, 20002, 2 02, 3, 2005 02, 3, 2, 2, 3, 3	175 89 234 56 135	317 389 557 313 461
	1105	19577 19583 19597 19603 19609	92, 2, 3, 4, 20 92, 2, 3, 7 92, 2, 203, 200 92, 2, 2020, 2 92, 2, 2020, 2	230 333 24 175 291 493 243 575 373 527		1127	1119 19851 1120 19867 1121 19891 1121 19891	19853 19861 19867 1989	23, 202, 3, 200 23, 202, 202 23, 202, 2, 202 24, 20202, 30 25, 20202, 2, 2	300 240 340 390 390	509 647 593 441 579	111131	1130		2008g e2, 3, 2, 4, 2e 2010r e2, 300400 2010r e2, 300202 20113 e2, 300203 20117 e2, 3002000	227 233 187 305 364	329 361 479 387 587

N	257 271 409 397 515	343 385 281 247	377 363 321 427 449	541 577 465 529 381	367 419 369 327 341
$\overline{N}$	223 110 290 318	149 222 59 87	148 215 254 120 198	343 354 142 387 292	253 308 86 147 280
Exponenten	000402, 5 00040004 0004, 2, 2020 0004, 2, 2020	0004, 3, 3, 2 0004, 3020 0004, 304 0004, 502 0003, 3	•••3•4••2 •••3•4, 2•• •••3•3•3 •••3•2•3	000302,2000 0003003,2000 00030003,3	0003, 2, 302 0003, 2, 302 0003, 2, 3, 4 0003, 2, 2003 0003, 2, 2003
7	20639 20641 20663 20681 20693	20707 20717 20719 20731 20743	20747 20749 20753 20759	20773 20789 20807 20809 20849	1167 20857 20873 1168 20887 20897
,,2	11.59	1160	15111	1165	1168
,2	1166 1167 1168 1169	11,11	1171	1175	1178
N	217 239 337 321 251	273 257 183 211	65 67 193 167	241 275 123 271 251	359 233 267 215 421
$\bar{N}$	67 188 213 232 54	73 9 2 4 1 14 8 3 5 8 5	34 32 95	175 169 20 174	151 179 71 99 178
Exponenten	02, 5, 4, 3 02, 5, 2030 02, 5000000 02, 500002	02, 50203 02, 50302 02, 6, 2, 4 02, 602, 20 02, 60202	2, 10 •• •2, 12 •••10, 2 •••7, 202	•••6••2• •••6, 2••• •••6, 6 •••5•3••	0005, 3, 30 0005, 3, 30 0005, 303 000405, 2
7	20359 20369 20389 20393 20399	20407 20411 20431 20441	20477 20479 20483 20507 20509	20521 20533 20543 20549	20563 20593 20599 20611
,,2	1145	1148	1151	1152	1155
,2	1155	1158	1161	1163	1165
N	541 331 439 547 583	229 497 389 487 395	251 217 259 333 423	439 187 383 347 363	395 353 263 115
N	200 272 95 226 357	193 291 304 134 284	88 68 191 236 268	255 29 280 151 106	228 215 93 99 150
Exponenten	02, 30002, 202 02, 300004 02, 30002, 2, 2 02, 30002, 2, 2	02, 302, 50 02, 302, 2, 200 02, 302003 02, 3020003 02, 303002	02, 30502 02, 4, 5, 3 02, 4, 402 02, 4, 3, 2, 20 02, 4, 2020	02, 4, 20020 02, 4, 2, 6 02, 40020 02, 402, 3, 2	02, 4020200 02, 4030000 02, 40402 02, 5, 60
Z	20123 20129 20143 20147 20149	20161 20173 20177 20183 20201	20219 20231 20233 20249 20261	1139 20269 1140 20287 	20333 20341 20347 20353 20357
,,2	1134	1136	1138		1142
,2	1141	1144	1148	1151	1153

z²         z²<						
z''         Z         Exponenten         N         z'         Z         Exponenten         N         z'         Z         Exponenten         N         z'         Z         Exponenten         N         Z         z'         Z         Exponenten         N         Z         z'         Z         Exponenten         N         Z'         Z'         Z'         Z         Exponenten         N         Z'	7.	383 631 515 337 671	431 449 333 247	279 193 83 281	355 339 521 439	251 523 647 713 367
z''         Z         Exponenten         N         z'         z''         Z         Exponenten         N         z'         z''         Z         Exponenten           1166         access         3.0         access         1163         access         1169         access         acc	X	391 364 62 256	299 164 239 51	169 67 167 204	151 241 320 119 156	214 383 272 441 66
z'         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Z         D         Exponenten         N         N         Z         Z         Z         Z         Z         Exponenten         N         N         Z	Exponenten	3, 3, 4 2, 3, 2, 2, 2 2, 3, 2, 2, 2 2, 3, 2, 5	6 4 6 8 6 9 6 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	0002, 6000 0002, 702 0002, 10 00006, 200	5.2,2 6.2,2 6.2,2 6.2,4,2 6.2,4,2 6.3,4,3	« <b>:</b>
z'         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Z         Z         Z         Exponenten         N         N         Z <th>Z</th> <th>21391 21397 21401 21407</th> <th>21433 21467 21481 21481 21491</th> <th>21493 21499 21503 21517</th> <th>21523 21529 21557 21559 21559</th> <th>21569 21577 21587 21589 21599</th>	Z	21391 21397 21401 21407	21433 21467 21481 21481 21491	21493 21499 21503 21517	21523 21529 21557 21559 21559	21569 21577 21587 21589 21599
z'         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Z         Exponenten         N         N         z'         Z         Z         Z         Z         Exponenten         N         N         Z <th>12</th> <th>2 g      </th> <th>9611</th> <th>1199</th> <th>1202</th> <th>1205</th>	12	2 g	9611	1199	1202	1205
z'         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten           1169         20899         9993, 2003	,×		120		1213	1215
z'         Z         Exponenten         N         z'         z'         Z         Exponenten           1169         20899         9993, 2003	·	188 673 346 613 493 779 335 877 433 561	226 629 215 479 166 547 449 615 253 691	378 601 242 639 19 163 382 615 279 493	241 547 257 303 376 587 165 541	338 603 246 565 170 197 143 313 116 375
z''         Z         Exponenten         N         z'         z''         Z           1169         20899         999, 2083, 2083, 2084, 35         1194         21143         21143           20921         999, 383, 2082, 3         3024, 35         1194         1182         21157           20929         999, 3, 2082, 2         2023         1191         21163         21163           1170         20947         999, 3, 2082, 2         213         509         1193         21163           1171         20947         999, 3, 305         47         271         1184         21169           1172         20951         999, 3, 305         47         271         1186         21197           1173         20981         999, 3, 305         47         271         1186         21197           1173         20981         999, 3, 305         47         271         1186         21191           1174         21001         990, 305         50         26         26         26         1186         21121           1175         21010         990, 305         20         1186         21227         11189         21227           1176         21011 <th>  ·</th> <th></th> <th></th> <th>0002003, 2000 0002003 000200 0002, 2, 30000 0002, 2, 3, 300</th> <th>2, 203, 2</th> <th>. a</th>	·			0002003, 2000 0002003 000200 0002, 2, 30000 0002, 2, 3, 300	2, 203, 2	. a
1.00   20899   000.3, 20.3   1.94   1.93   1.94   1.95   1.94   1.95	7		21179 21187 21191 21193 21211	21221 21227 21247 21269	21283 21313 21317 21319 21323	
z"         Z         Exponenten         N         x²           1169         ao899         aoe3, aoe3, a         a19         499         1193           20903         aoe3, aoe3, a         a19         499         1193           20929         aoe3, aoe3, a         a19         499         1193           1170         aog49         aoe3, aoe3, a         a13         a23         1194           20939         aoe3, aoe3, aoe3, a         a13         a29         1195           1172         aog59         aoe3, aoe3, a         a13         s09         1195           1173         aog63         aoe3, aoe3, a         a13         s09         1196           1173         aog63         aoe3, aoe3, a         a15a         351         1196           1174         a1001         aoe24e2, a         a178         419         1198           1175         a101         aoe24e2, a         a178         419         1199           1175         a101         aoe24e2, a         a178         419         1199           1176         a101         aoe24e2, a         a178         487         1199           1177         a1021         aoe24e2, a	,,2	1182	1185	88   18	1190	
169   20899   0003, 2003, 2   219   20903   0003, 2003, 3   158   20903   0003, 3.03, 2   20903   0003, 3.03, 3.03   158   20903   0003, 3.03, 3.00   20903   2003, 3.00   20903   20903   2003, 3.00   20903   2090	,2	1193	1195	1198		1203 1204 1204
169   20899   2000, 2000, 3   158   20903   2000, 2000, 3   3   3   3   3   3   3   3   3   3	N			285 419 471 397 449		385 647 565 229 703
1169   20899   2083, 2083, 2   20903   2083, 2083, 2   1170   20929   2003, 3, 2   1171   20947   2003, 3, 2   1172   20959   2003, 3, 2   1173   20959   2003, 3, 2   1173   20963   2003, 3, 3   1174   21001   2024, 2   1175   21013   2024, 2   1176   21013   20224, 2   1177   21031   20224, 2   1177   21031   20224, 2   1178   21051   202224, 2   1178   21051   2022223222   1179   21051   2022223222222222222222222222222222222	×	158 302 191 202	113 152 196 196	211 178 293 282 167	347 194 347 265	314 374 232 199 297
1169   20899   209399   1170   209399   1171   209399   1171   20947   1173   20988   1174   21001   1176   21019   1177   21019   1177   21019   1177   21089   1177   21089   1178   21089   1178   21089   1178   21089   1178   21089   11881   11881   11881   11399   11881   11881   11399   11399   11881   11881   11399   11399   11399   11381   11399	Exponenten	2003, 2002, 203, 2 3, 50	3002, 305 4, 3, 2 500	•••2•5•2• •••2•4•2, 2 •••2•4, 2, 2 •••2•4, 2•2	00000000000000000000000000000000000000	00222, 2, 40 00222, 2020 00222, 3, 2, 2 002200 002200 002200 002200
11.69 11.70 11.72 11.73 11.73 11.75 11.75 11.75 11.75 11.75 11.75 11.75 11.75	Z					21089 21101 21107 21121 21139
	1,2	1111		1174		811
7.   1881 1185 1186 1186 1186 1188 1188 1189 1199	`~	1181		118	#   #	1191

N	282 727 401 683 344 613 75 419 287 755	349 455 380 623 173 377 395 537 364 617	111 475 271 733 467 805 436 565 482 781	152 523 188 461 18 157 131 149 208 321	95 303 172 439 213 503 59 313 218 495
N		380 380 173 395 364	111 271 467 436 484	152 188 188 131	95 172 213 59 218
Exponenten	00002, 202002 00002, 2003 00002, 2003 00002, 2005	000000, 1, 3, 30000000000000000000000000	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	0000003, 2, 3	1242 22279 00003, 5, 3 1243 22291 00003, 4002 1244 22303 00003, 302, 2 22307 00003, 3, 5
7	22091 22093 22109 22111	22129 22133 22147 22153	1238 22159 1239 22171 1240 22189 	22259 22259 22271 22273	22279 22283 22291 22303
1,2	1232 1233 1234	1235	1238	1   1   1   1	1243
,2	2   2   1	1245	1247	1249	1253
N	877 691 725 581 505	515 703 755 559 653	569 561 459 485 391	112 211 153 389 70 293 324 521 127 451	487 461 593 479 277
N	322 301 212 123 348	332 515 196 703 546 755 431 559 175 653	415 569 394 561 133 459 279 485 159 391	112 211 153 389 70 293 324 521 127 451	215 101 246 334 44
Exponenten	**************************************			2, 5 2 2 2 2 2 2 3 3 4 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	1230 22051 00002, 303, 2 1231 22053 00002, 3004 22057 00002, 3, 2, 2 22073 00002, 3, 3, 20 22079 00002, 3, 3, 20
2	21851 21859 21863 21871 21881	21893 21911 21929 21937 21943	21961 21977 21991 21997	22013 22027 22031 22037 22039	1230 22051 1231 22063 
,,2	2   2	1222	1224 1225 1226 1227	1228	1230
,2	1230	1233	1236	1237	1240
N	293 359 256 673 351 607 314 409 108 461	403 511 345 611 545 753 308 745 392 613	434 555 71 405 418 581 255 673 113 431	155 289 118 375 312 527 249 671 207 697	338 883 427 613 296 537 144 631 521 665
N	256 351 351 108 108	403 511 345 611 545 753 308 745 392 613	434 71 418 255 113	155 118 312 249 269	
Exponenten	3, 2, 40 3, 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4	22 22 33 22 23 34 24 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25	2000 2 2 2 2 3 3 2 2 2 3 3 2 2 3 3 2 2 3 3 3 2 2 3 3 3 2 2 3 3 3 3 2 3	2, 6 5, 3 4, 2 3, 2 2	21817 0000002, 3, 20 21817 0000002, 40 21839 00000002, 4 21839 21841 000000002, 4
Z	21611 21613 21613 21617 21617	21649 21661 21673 21683 21701	21713 21727 21737 21739	21757 21767 21773 21787	
1,2	1208	1209	1212	1215	227 1218 229 — 1219
,2	1218	1221	1   1   1	1225	1227 1228 1229

"2   '2	z	Exponenten	$\bar{N}$	N	12	,,2	7	Exponenten	N	N	12	,,2	7	Exponenten	n   N	N
1255 — 1256 — 1257 — 1245	22343 22343 22367 22369 6 22381	33 33 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	356 356 326 325 325 325	479 607 361 343 563	1268 1257 1269 1258 1270 1258		22619 22621 22637 22639	002, 400200 002, 400300 002, 4, 20200 002, 4, 204	174 283 262 71	174 473 223 397 262 453 71 333 164 399	1283 1284 1285 1285	1267	22853 22859 22861 22871 22877	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	23 23 24 23 24 25 34 65 34 65	0 593 18 743 19 697 16 709
1258 1259 — 1260 — 1261 —	22391 22397 22409 22433 7 22441	3333 35 44,322 4444	1 1 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 5 3 3 4 4 5 3 3 5 4 5 5 5 5	28 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	1272	1259	22669 22669 22669 22691	002, 4, 402 002, 3003, 200 002, 300003 002, 300003, 2	115 271 144 222 422	115 323 27 1 459 144 515 222 505 422 503	1287 1288 1289 1290	1   268	22901 22907 22921 22937 22943	02, 2003000 02, 2, 2, 3020 02, 2, 2, 3, 2, 002, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5	<u>ω μ ω 4</u>	70 607 62 457 55 483 08 577 70 379
1262 1263 1250 1250	2 22447 2 22453 2 22469 2 22483	64424 665,300 665,300	200 3 4 3 4 3 4 4 3 4 4 3 4 4 3 4 4 3 4 4 3 4	367 479 323 277 371	1274 I 1275 I	1 2 2 1	22699 22709 22717 22721	002, 30020002 002, 3002000 002, 30400 002, 3, 2, 5	261 378 217 212 134	261 683 378 617 217 395 212 251 134 441	1292	1270	22961 1269 22963 22973 1270 22993	02, 2, 20 02, 2, 20 02, 2, 20 02, 2, 20 02, 2, 30 02, 2, 30	3. 3. 3. 3. 4. 4. 3. 3. 3. 4. 4. 3. 3. 3. 4. 4. 4. 3. 3. 5. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4.	4 485 4 427 5 429 0 547
1264 — 1251 — 1264 — 1252 — 1253 — 1253	2 2 2 5 1 1 2 2 5 5 1 1 2 2 5 3 1 2 2 5 3 1 2 2 5 3 1 2 2 5 4 1 2 2 5 4 1 2 2 5 4 3 1 2 5 4 3 1 2 5 4	6, 2 64 2, 9, 2 2, 7, 2	175 38 47 116 137	279 185 99 195 153	1277	126   126	22739 22741 22751 22769	882, 3, 2882, 2 882, 3, 2885 882, 3, 285 882, 3, 4, 38	246 397 56 236 197	246 587 397 643 56 319 236 309 197 287	1295		1271 23011 1272 23017 	02, 2, 4, 3, 02, 2, 4, 02, 02, 2, 4, 02, 02, 2, 5, 2, 02, 02, 2, 5, 2, 02, 02, 2, 5, 2, 02, 02, 2, 5, 02, 02, 02, 02, 02, 02, 02, 02, 02, 02		171 395 301 419 248 431 142 349 219 361
1254 1266 — 1256 — 1267 —	1254 22549 1255 22567 22571 1256 22573	2, 6000 2, 503 2, 5000 2, 5000	175 2 3 3 3 3 2 6 5 3 3 4 6 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	281 305 391 359 527	1280 1281 1281	1 265	22783 22787 12807 22811	1265 22783 002, 3, 8 1266 22807 002, 205, 2 22811 002, 203, 202 22817 002, 203, 202	17 114 143 206 298	17 141 114 245 143 509 206 555 298 361	1296	1274	1296 — 23039 — 1274 23041 — 1275 23053 — 1276 23059	••2, 2, 9 ••2•8• ••2•6, 2• ••2••4•3•	12 103 213 256 189	12 113 103 115 213 359 256 323 189 445

n li	Exponenten	N	N	72	``z	Z	Exponenten	X	N	-22	"2	7	Exponenten	N	×
002004003		122 433		1310	<u>""</u>	23327	••2•2, 3, 5 ••2•2, 2•2•••	410	339	1324	11	23603	003, 4, 2, 2, 2 003, 4, 3, 20	164	395
00200300020	-	404 557		1312	$\frac{}{1}$	23339	00202, 200002			1	1301		<b>663, 363, 3</b>	113	369
••2••3••4 ••2••3, 3•2		184 509		1314	<u> </u>	23357	00202002020	438	599	<u>;  </u>	1302	23629	003, 302, 200	279	475
00200202, 200		394 671		Ī	1290	23371	00202002002	277	715	1327	-	23633	<b>ee</b> 3, 3 <b>ee</b> 63e	302	385
00200200202		265 721	_		Ī	23399	0020202, 2, 3	168	-	1328	Ī	23663		76	357
002002, 2, 2, 3		179 611		13.00 I	2	23417	0020204, 20	272	395	1329	1303	23009	963, 3, 39999 963, 3, 363	274	373
••2••2, 7		31 229				23447	00203, 2003	144	517	1	1304		ີ ຕົ	145	267
0020004000		317 491		1318	<u>``</u> 	23459	00203003, 2	210	479	1330	1	23687	<b>ee3, 264, 3</b>	108	347
••2•••2••••	-	498 803	_	Ī	1292	23473	0020302, 30	309	401	1	1305	23689	003, 203020	301	409
•	-	355 629	620			23497	••2•4, 2•2•	285	391		1306		003, 20002, 3	163	551
	• •	374 455	_	<u> </u>	_	23509	0030400000	299	485		1 5	23741	963, 200400	210	397
	••	293	200	1319	<u>`</u> 	<b>23531</b>	002050002	134	355	1	1307	<b>2</b> 3743	3, 2	<u>ي</u>	/27
••2•••••		555 767	_	1320	Ï	23537	<b>ee2e6, 3e</b>	148	195	1332	Ī	23747	<b>••3, 2, 2, 4, 2</b>		383
0020000302		231 643	. 243	Ĭ	1295	<b>3323</b> 9	<b>66266</b> , 2, 2	101		1333	Ī		<b>663, 2, 2, 2020</b>		493
0020002002, 2		307 733		1321		23549	••2•8••	89		1	1308	23761	<b>\$</b>	337	431
0020003, 2000		383 6	_	<u> </u>	1296	23557	••3, 7•••	109	167	1	1309	23767	003, 2,	149	24 I
002000304		88	421 1	1322	Ï	23561	••3, 6•2•	146	197	1	1310	23773	003, 2, 20300	259	463
002000502		126 359	159	ī	297	1297 23563	<b>ee</b> 3, 6 <b>ee</b> 2	95	241	1334	1	23789	003, 2, 30200	268	465
••5•••6••		145 271		1323	<u> </u>	23567	••3, 6, 4	44	183	1335	Ī	23801	003, 2, 5, 20	190	
00202, 70		140 159	. 65)	Ī	1298	23581	••3, 5, 3••	155	273	1336	Ī	23813		194	
00202, 4, 4		83 351			399	1299 23593	003, 400020	275		1337	1	23819		102	
•6262, 3, 2, 2e		350 505	_	<u>-</u>	300	1300 43599	993, 4994	٥/	က္သ		1,161	43047	36.364, 4	3	\$

1,2	Z	Exponenten	$\overline{N} \mid N$	'n	,,2	Z	Exponenten	N	N	`z	,,2	Z	Exponenten	N	×
	23831	••3••3••3	130 463		1328	24061	••3•7••	79	149	1359	1	24317	••4•6•	86	191
1312		003003, 2, 20	317 447	_	١		••4, 6, 3	26		1360	Ī	24329	••5, 4•2•	91	
1313			335 433	_	I	24077	004, 5, 200	150		1	1341		•	173	
1314	23869	003002, 400	221 401	1349	1	24083	004, 402, 2	132	311	1361	Ī	24359	005, 202, 3	94	317
Ī	23873	••3••••5•	230 271	1	1329	24091	004, 4, 202	123	331	1362	Ī	24371	005, 2, 2, 2, 2	142	343
			0,					ė				0,0			
Ī			140 402	<u> </u>			994, 394	101			1342	1342 24373	995, 2, 2000	C 7.7	
1315		00300002, 4	107 469		1331	24103	<b>684</b> , 3 <b>62</b> , 3	105	353		1343	1343 24379	005, 2, 302	101	
1316	23893	••3•••••••	453 733	1350	1	24107	004, 300002	172	449	1	1344	2439 I	005003, 3	85	279
1317		23899 0030000202	239 65 I	1	1332		004, 300200	239	411	1363	Ī	24407	68568663	98	355
1		0030002, 2000	380 603	1351			004, 3, 2, 30	230	297	1364	1	24413	005000300	172	307
1318	23911	0030002, 2, 3	157 537	1	1333	24121	004, 3, 3, 20	221	317	1365	1	244I9	00502, 3, 2	124	285
1319	23917	00300020200	339 587	1	1334	24133	004, 203000	243	379	1	1345	2442I	00502, 2000	211	335
1320	23929	0030004, 20	257 373	1352	1		004, 202020	292			1346		0050303	63	
1			370 597	1	1335		004, 200003	127	-	1366	1	24443	0050402	9/	
1321	•••	00302003, 2	211 481		_		004, 2, 20020	305	-	-	1347		••6, 2••••	179	289
1322		00302000020	397 549	1353	Ī	24179	004, 2, 3, 2, 2	158	385	1367	Ī	24473	656, 2, 2, 26	166	
1	23981	00302000200	338 583	1	1337	24181	004, 2, 30000	247	405		1348	1348 24481	••6••	127	155
1	23993	0030203, 20	288 415	1354	I	24197	00400400	202	313	1	1349	1349 24499	00002, 2, 2	101	245
1323	2400I	<b>ee3e3, 5e</b>	179 213		I	24203	<b>65469366</b> 2	162	415	1368	I	24509	••6•4••	88	
1324	24007	<b>66363, 3, 3</b>	111 367		1338	24223	004002, 5	51	275	1	1350	24517	007, 3000	109	171
			r												
1325		24019 00303002, 2	197 471	_	1339	1339 24229	***************************************	317	20 I	1369	Ī	24527	••7, 2, 4	32	
1345	_	24023 003030003	120 437	1356	1	24239	*********	82	379	1370	Ī	24533	••••••	130	
1346 -		24029 003030300	206 369		1340	24247	004000203	113	42I	1	1351	24547	<b>66</b> 8, 3, 2	53	123
1326	24043	24043 003040002	147 389	1357	Ī	24251	004000302	144	401	1371	1	24551	968, 2, 3	36	
1327	24049	1327 24049 00305, 30	165 217		1	24281	0040202, 20	272	387	1	1352	- 1352 24571	00100	23	

N	229 567 431 583 329	547 307 505 653 603	355 651 667 661 563	579 481 463 299 137	293 387 449 417 431
Ŋ	195 220 338 245 59	345 141 298 405 223	66 412 387 408 155	212 269 333 105	190 129 126 236 94
Exponenten	2, 302050 2, 3020200 2, 3020003 2, 3020002, 2	2, 3002, 2, 2000 2, 30005, 2 2, 30003, 200 2, 300020000 2, 30002	2, 300002200 2, 300000200 2, 300000020 2, 300200000	2, 3002222222233003300322330030033003003003	4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
Z	25153 25163 25169 25171 25183	25189 25219 25229 25237 25243	25253 25253 25261 25301 25303	25307 25309 25321 25339 25343	25357 25357 25367 25373 25373
,,2	1397 1398 1398 1379 1380	1381 1382 1383 1384	1385	1387	§
,2	1397	1 399	\$ 5   5   \$ 1   5	1 1 6 4 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1405 1406 1407 1408
N	343 503 563 481 501	335 293 287 405 325	443 383 477 317 355	393 199 197 83 235	337 319 249 403 401
N	2 1 2 3 9 8 1 3 9 8 8 1 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	202 89 158 256	187 292 298 259	150 150 9 174	95 181 206 120 145
Exponenten	2, 402, 3, 20 2, 40002002 2, 40000000 2, 40000003 2, 40000003	2, 400204 2, 4004, 20 2, 4, 2, 4, 3 2, 4, 2, 3002 2, 4, 2, 2030	2, 4, 2, 202, 2 2, 4, 2, 2, 300 2, 4, 2020000 2, 4, 3, 3, 3 2, 4, 3, 2020	2, 4, 3, 2, 200 2, 4, 4, 40 2, 4, 5, 30 2, 4, 9 2, 305020	2, 304003 2, 304, 300 2, 303040 2, 30302, 3 2, 303, 302
Z	1366 24889 1367 24907 1384 — 24917 1385 — 24913	24943 24953 24967 24971	24979 24989 25013 25031	25037 25057 25073 25087	1376 25111 1376 25117 395 25117 396 25127 1377 25147
,,2	1365 1367 1368	1369	1372	1373	1375 1395 1377 1377
,2	1384	1386 1387 1388	1389 1390 1391	1392 1393 1394	1395 1396
N	93 149 173 271	155 263 289 231 175	215 285 379 303 157	343 317 199 289 263	245 223 349 369 449
×	74 66 32 47 114	28 116 110 95	139 161 220 109	223 35 208 160	181 53 148 137 261
Exponenten	2, 8030 2, 703, 2 2, 7004 2, 7, 203 2, 60002, 2	2, 6005 2, 6, 2, 200 2, 6, 3, 2, 200 2, 6, 3, 2, 2	2, 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	2, 404.20 2, 404, 4 2, 403.02, 2 2, 403, 202 2, 40200200
Z	24593 24611 24623 24631 24631	24671 24677 24683 24691 24697	24709 24733 24749 24763	24781 24793 24799 24809	24841 24847 24851 24859 24877
1,2	1   133	1354 1355	1356 1357 1358	1359	1362 1363 383 1364 1365
12	1372	1376	1373	1381	1383

722	•	Z	Exponenten	i!!	N	N	-,2	",2	7	Exponenten	$\overline{N}$	N	*	","	2	Exponenten	×	×
1409		25409 25411	2, 3, 20050 2, 3, 2004,	. "	179 3	397	124	140 401	25657	2, 204, 3, 20	245 158		1433	11	25919 25931	25919 2, 20002, 6 25931 2, 200002002	50 319 312 805	319
14		25423	2, 3, 2002, 4		101		1422		25673	2, 20302020	342		113	1417	25933	25933 2, 2000002, 200 25939 2, 20000002, 2	343 817	755 817
<u></u> 		/446.4							43093	*, **3**3	,	-		3	43943	4, 4445 K, 4444 K, 444	4	/2/
1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2		25457 25457 25463	2, 3, 203, 30		278 278 108	363		66	25717 25717 25733	2, 203, 3000 2, 203, 3000 2, 20204000	307	503		1419 1420 1421	25969 25981	1420 25969 2, 200003, 30 1421 25981 2, 2000500	367 479	479 370
1413	1395	25469	4 4						25741	2, 20203, 200	317		1436	1436 —		25997 2, 2002, 3, 200 25999 2, 2002, 3, 4	346	587 451
1414 1396 1415 1397 1416 1397		25523 25537 25541 25561 25561	2, 3, 302, 2, 2, 3, 4, 50 2, 3, 4, 300 2, 3, 402, 20 2, 3, 50020		196 157 127 1245 245 200	475 187 381 349	1426 — 1409 1426 — 1410 1427 — 1428		25759 25763 25771 25793	2, 2020, 5 2, 2020003, 2 2, 20200003, 2 2, 202, 2, 50 2, 2, 2, 3, 3	258 303 244 154	381 587 793 289 507	1437	1423 1424 1425		1423 26017 2, 20020040 26021 2, 20020000 1424 26029 2, 20020000 1425 26041 2, 2002000	284 673 339 413 456 721 425 733 363 523	673 413 721 733 523
1414	139	25579 25583 25589 25601 25603	2, 3, 5000 2, 3, 504 2, 3, 6000 2, 200 2, 200		125 331 44 213 146 241 68 75 61 129		1   2   2   2   2   2   2   2   2   2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	25801 25819 25841 25847 25849	2, 202, 2, 202, 2, 202, 2, 202, 2, 202, 4, 30, 2, 202, 403	237 268 102 102	571 647 351 389 325	1   143	1426 1439 1428 1428 1428	26053 26083 26099 26107 26111	1427 26053 2, 2003, 3000 1427 26083 2, 2004, 3, 2 26099 2, 2005, 2, 2 1428 26107 2, 20062 2 26111 2, 2009	325 509 177 409 146 359 91 261	325 509 177 409 146 359 91 261 12 115
1400 1401 1402 1420		1400 25609 1401 25621 1402 25633 1403 25639	2, 26620 2, 2050000 2, 204040 2, 20402, 3 2, 2040002		155 2 2 2 3 2 1 3 3 2 1 1 3 3 3 2 1 1 8 6 4	209 355 233 379 485	1431	1415	1414 25867 1415 25873 	2, 20004002 2, 20003030 2, 20002040 2, 2000204	195 333 326 119 188	497 421 395 545 557		1429 1441 — 1430 1442 — 1431			101 77 243 224 395 388 535 323 417	101 113 77 243 224 395 388 535 323 417

		H M M A T	0.75.7	10.10.0.5.7	2000
×	173 479 479 451 469	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	319 353 517 343 461	415 505 459 577 313	367 367 149 157 479
×	242 186 186 265 130	311 232 176 324 199	366 366 356 356	228 329 359 159	139 139 188
Exponenten	2005, 6 200403000 200402002 200402, 200	2004002, 20 200400300 2004, 2, 3, 2 2004, 20020 2004, 20020	2004, 3, 30 200304, 3 200302, 2, 20 200302, 5 2003002, 3	2003, 2, 300 2003, 2, 300 2003, 2003 2003, 2003 2003, 300	2003, 30200 2003, 304 2003, 8 2002070 200204002
Z	26687 26693 26699 26701 26711	26713 26717 26723 26729 26731	26737 26759 26777 26783 26801	26813 26821 26833 26839 26849	26861 26863 26879 26881 26891
,,2	1452	1453	480 — 1455 481 — 481 — 483 — —	1456 1457 1458	1459 1460
,2	1473 1474 1475 1476	1477	1480 1481 1482 1483	1484 1 1 1 884	3   3   3
N	509 419 497 251 495	461 605 393 337 159	323 333 527 287 167	349 187 271 101 167	147 185 71 251 216 371 206 295 117 323
N	151 324 134 39 317	361 222 83 232 137	208 262 201 157 140	204 170 170 124	147 71 216 206 117
Exponenten	00 (4, 6, 6, 4, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,	2, 2, 3000000000000000000000000000000000	2, 2, 4, 400 2, 2, 4, 203 2, 2, 400 2, 3, 404 2, 2, 5, 50	2, 2, 5, 2, 20 2, 2, 505 2, 2, 6, 200 2009, 2	2005030 2005003 2005003 2005,3,20 2005,302
Z	26417 26417 26423 26431 26431	26449 26459 26479 26489	26501 26513 26539 26557 26551	26573 26591 26597 26627 26633	1449 26641 1450 26647 471 — 2669 1472 — 26681
,,2	1441	44   44	1447	11111	1449 1450 1451 1451
72	1459 1460	1461	1463 1464 1465	1466 1467 1468 1469	1471
N	176 487 234 275 152 497 374 637 251 683	309 379 227 553 186 343 370 503 237 607	462 745 179 641 254 687 455 743 380 547	356 557 373 637 390 499 206 475 223 589	274 451 107 231 202 477 314 443 56 297
N			179 179 254 455 380		
Exponenten	, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,	2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	2, 2, 20 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00	2, 2, 22, 3, 2 2, 2, 222, 2, 2 2, 2, 223, 3, 2 2, 2, 23, 3, 2	2, 2, 2, 24, 24, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,
Z	26171 26177 26183 26189 26189	26209 26227 26237 26249 26251	26261 26263 26267 26293 26297	26309 26317 26321 26339 26347	26357 26371 26387 26393 26399
,,2	1432	1433	1436	1438	
,2	1444 1444 1445 1446	1447 1448	1449 1450 1451	1452 1453 1454	1455 1456 1457 1458

8	329 753 703 445 627	401 467 607 673 359	391 251 471 233 257	85 193 325 441 519	347 495 671 539 601
N	279 208 495 79 382	124 343 256 417 66	214 37 172 188 53	126 231 320 199	269 304 415 380 221
Exponenten	20002005 200020003 200020003, 20 200020005	2000, 4, 3 2000, 302 2000, 202, 2 2000, 200, 2	200030400 2000306 200040202 20005, 40	202, 700 202, 5, 2, 20 202, 4002 202, 40002	202, 4, 2, 30 202, 4, 2000 202, 3000000 202, 3002, 20 202, 3002, 20
Z	27457 27479 27481 27487 27509	27527 27529 27539 27541	27581 27583 27611 27617 27631	27647 27653 27673 27689 27689	1524
1,2	1487 1488 1489 1514	1515 1490 1516 1491 1517 1491	518   1492 519   1493 520   1493	1494	1496 1497 1498
2	1513	1515	1518	1521	1524 — 1496 1525 — 1497 1525 — 1498
N	271 715 569 449 781	669 703 677 515 505	683 581 793 733 351	689 401 595 381 389	439 597 647 747 563
X	86 154 154 303	196 507 413 183 157	403 458 335 292	503 325 173 247	347 263 192 434 392
Exponenten	20006, 3 20003, 203 20003, 203 20003, 400	20002, 2, 2, 3 20002, 2002 20002, 3000 20002, 402 20002, 402	20000003, 200 200000003, 2 200000003, 2 20000003, 2	2000003, 40 2000003, 40 2000003, 2, 3 20002, 500	20002, 3030 20002, 203, 2 20002, 202, 3 20002, 20200 20002, 2, 3, 20
2	27143 27179 27191 27197 27211	27239 27241 27253 27259 27259	27277 27281 27283 27299 27329	27337 27361 27367 27397 27407	27409 27427 27431 27437 27449
,,2	1474	1475 1476 1477 1477	1479	1481 1483 1484 1484	1485
72	1501 1502 1503 1504	1505	1506	1	1510
N	461 541 665 531 503	583 663 565 733 795	475 367 517 649 613	683 727 577 277 523	619 329 425 495 319
N	273 152 482 116	178 485 129 462 302	364 168 380 181 269	282 445 207 233 334	259 57 184 311 83
Exponenten	200204, 200 200203003 2002020002 20020204 2002004, 2	20020003, 3 2002000202 20020002, 4 2002002, 200	2002, 2, 5, 2 2002, 2, 5, 2 2002, 2, 3020 2002, 2, 2003 2002, 2003, 2	2002, 202, 2, 2 2002, 202000 2002, 20302 2002, 3, 50 2002, 3, 300	2002, 3002, 2 2002, 305 2002, 4, 3, 2 2002, 4, 2000 2002, 503
	26893 26903 26921 26927 26947	26951 26953 26959 26959 26981	26993 27011 27017 27031 27043	27059 27061 27067 27073	27091 27103 27107 27109 27127
ัน	1461	1463	1465 1466	1467 1468 1469	500 1470 1471 1472 1473
-N	1489   490   491	1493 1493 1494	1495	86     86	%

, z	,, 	Z	Exponenten	≥	×	, z	","	2	Exponenten	N	N	,2	","	Z	Exponenten	N	N
1526	1499 1500	27743 27749 27751 27763 27767	202, 3005 202, 3, 2, 200 202, 3, 2, 2, 3 202, 3, 3, 2, 2 202, 3, 3, 2, 2	62 364 151 205 116	345 577 515 499 437	1540	1510	27953 27961 27967 27983	202002, 2, 30 202002, 5, 20 202002, 6 202002, 4	400 381 49 128 365	517 547 313 561 651	1551	1524	28219 28229 28277 28279 28283	203, 3, 3e2 203, 203000 203, 2, 3000 203, 2, 3000 203, 2, 402	155 302 308 111 136	429 471 505 419 383
1539	1501	27773 27779 27791 27793 1 27793	202, 3, 500 202, 205, 2 202, 203, 4 202, 20203 202, 202003	170 154 100 373 173	313 335 427 473 619	1542	1   12   12   12	28001 28019 28027 28031	2020003, 40 2020003, 2, 2 202000402 2020007	346 248 169 30	425 605 477 229 647	1555	1526	28289 28297 28307 28309 28319	20300202 20300202 20300202 20300202 203002	164 317 242 395 64	189 431 573 637 345
1533	1503	27803 27809 3 27817 27823 27827	202, 202, 202 202, 200040 202, 2000020 202, 200004 202, 20004	2 2 3 3 4 4 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	665 411 695 549 687	11112	1515	28057 28069 28081 28087 28097	20202, 3, 2, 2 202020200 2020202, 30 20202023 20203, 50	415 437 377 153 216	587 691 489 571 257	1557	1528	28349 28351 28387 28393 28403	20300000000000000000000000000000000000	320 173 307 148	401 259 399 427 363
1535	1505 1535 — 1506 1536 — 1507	27847 27851 27883 27893 7 27901	202, 2, 3, 3, 3, 202, 2, 2, 3, 3000, 2, 2, 4000, 2, 2, 2000, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	157 268 233 290 141	517 693 615 477 263	1546	1519	28109 28111 28123 28123	20203, 4, 2 20203, 2, 20 20203, 2, 4 202030202 2020503	175 320 93 197 74	391 547 413 539 285	1559	1531	28409 28411 28429 28433 28433	20305, 20 2030502 204, 4, 200 204, 3030 204, 3003	176 95 191 222 104	257 271 323 281 371
1537	1537 — 1508 1538 — 1509 1539 — 1	27917 27919 27941 3 27943 27943	202004, 20 202004, 4 20200202 20200203, 3 20200203, 3	280 4 43 87 30 2 5	473 367 591 523 789	1548 1549 1550	1523	28163 28181 28183 28201 28211	203, 7, 2 203, 40000 203, 4003 203, 30022 203, 3, 2, 2, 2	80 268 105 343 202	171 431 373 473 487	1562	1533	28447 28463 28477 28493 28499	204, 3, 5 204, 2004 204, 2, 400 204002, 200 2040002, 2	45 169 268 206	239 349 307 457 491

Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II.a.

	0 V 60 H H	r n a n a	<b>7 8 8 8 8</b>	ненен	H 0 0 N M
~	199 217 463 581 581	619 605 759	573 573 573 513 323	327 321 343 661	571 459 709 733
×	32 185 260 221 132	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	376 154 351 287 262	140 1115 101 65 419	253 416 76
Exponenten	3004, 6 30030050 300300300 3003, 20002 3003, 402	300203, 200 300203, 200 3002002, 202 30020002, 3	3002002, 30 300200203 3002, 20300 3002, 20300	3002, 3, 2, 3 3002, 502 300005, 3 300000, 5	3 • • • 2 , 3 • 2 3 • • • • 2 , 4 • • 3 • • • • • 5 3 • • • • • 5 3 • • • • • 5 3 • • • • • 5
Z	29759 29761 29789 29803 29819	29833 29837 29851 29863 29867	29873 29879 29881 29917 29921	29927 29947 29959 29983	30011 30013 30029 30047 30059
,,2	1691	1602 1603 1604	1630   1605   1605   1632   1606	16008	
/2	1625	1628	1631	1633	1635 1635 1637
N	409 331 669 403 619	643 349 185 175 357	443 505 299 595 327	193 369 221 325 287	239 347 333 433 341
×	272 273 226 171	236 284 151 230	261 213 55 227 179	6 6 8 9 8 8 4 E	0 1 1 2 4 5 4 5 4 5 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
Exponenten	3, 2, 2, 4, 200 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 2, 400 3, 2, 2, 2, 400 3, 2, 200	3, 2, 200202 3, 2, 202, 40 3, 2, 207 3, 2, 3, 60 3, 2, 3, 400	3, 2, 3, 3, 200 3, 2, 3, 202, 2 3, 2, 3, 2, 5 3, 2, 300000 3, 2, 300000 3, 2, 300400	0, p, 4, Co 0, p, 4, p 0, p 0, p, 5, p 0, p 0, p, C, p 0, p 0, p, C, p, p	3, 2, 6, 2, 2 3005,0000 3005, 202 3004,000 3004, 3, 20
2	29453 29473 29483 29501 29527	29531 29537 29567 29569	29581 29587 29599 29611 29629	29633 29641 29663 29669 29669	1599 29683 1621 29717 1623 29741 1624 297453
,,2	1583		1592 1593 1594 1595 1596	1597	8
-22	1612	1615	11111	1619	
×	359 487 383 437 387	697 529 391 445 199	419 703 649 585 663	491 657 613 603 559	461 373 441 241 235
×	255 309 84 158 175	431 155 300 118	436 240 257 257	149 254 359 166 393	1 1 2 7 8 8 8 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Exponenten	3, 204, 2, 20 3, 20302000 3, 203004 3, 203, 302 3, 20204, 2	3, 202000000 3, 202, 2, 2, 3 3, 202, 3, 30 3, 202, 303 3, 202, 7	3, 20003, 4 3, 20002, 202 3, 20000, 202 3, 20000, 2	3, 2002, 3, 3 3, 2002, 2, 200 3, 2002, 2, 200 3, 2002, 2, 200 3, 2002, 2, 20	3, 2003, 3, 2 3, 200304 3, 2004000 3, 200600 3, 2, 2, 6, 2
7	29209 29221 29231 29243 29243	29269 29287 29297 29303 29311	29327 29333 29339 29347 29363	29383 29387 29389 29399 29401	29411 29423 29429 29437 29443
1,2	1577	1580 1581 	1583	1584 1585 1586	1608 — 1609 — 1587 — 1588
<b>~</b>	1598	88	6   6   6   6   6   6   6   6   6   6		1608

,2	,,z	2	Exponenten	N	N	, <sub>x</sub>	72	7	Exponenten	N	N	,2	",2	Z	Exponenten	×	N
1638	1  5 5	30071 30089 30091	30000303 30002, 3020 30002, 3002	134 352 225	507 479 577	1627 1628 1629 1629		30307 30313 30319	302, 2, 2, 3, 2 302, 2, 20020 302, 2, 204 302, 2, 204	215 393 89	493 545 419	1660	1640 1641 1641	30577 30593 30631	30303, 30 304, 60 304002, 3	235 118 107 237	307 137 363 400
		30103	30002, 2003	167		1649	1	30341	302004000	264		1	1643	30643	30402, 2, 2	153	371
1640 1641 1641	1615	30109 30113 30119 30133	3002, 2, 30	305 316 178 407 338	541 603 665 487	1   1651	1631	30347 30367 30389 30391 30403	30202, 5 302002, 5 30200203 30202, 4, 2	212 67 406 149 179	543 663 555 399	1661	1645	30649 30661 30671 30677 30689	30403, 20 305, 300 305, 2, 4 3050000	199 169 204 112	287 265 223 331 139
1643 1643 1618 1619 1620		30139 30161 30169 30181 30187	3000302 30003003 3000302, 20 30004, 2000	189 324 335 277	527 415 477 441	1652	634	30427 30431 30449 30467 30469	3020202 3020205 30204, 30 303, 6, 2 303, 500	209 228 228 94 173	571 321 299 203 267	1 1 2 5 5 1	1646	30597 30703 30707 30713	36664 3664 367, 2, 2 368, 26	147 31 66 74 33	205 151 163 109 103
1645	1622	30197 30203 30211 30223 30241	30055000 300500 300,7,2 300,5,4 300,304	2 2 8 8 1 1 8 2 6 2 6 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	343 173 247 277	1655	1635	30491 30493 30497 30509 30517	303, 3, 202 303, 3, 202 303, 2040 303, 2040 303, 2020	162 211 230 298 317	437 373 279 513 517	1666	1650	30757 30763 30773 30781 30803	4, 500000 4, 500000 4, 5, 2000 4, 5, 400 4, 40000, 2	167 117 180 109 156	263 305 293 197 371
1624 1646 — 1647 —		30253 30259 30269 30271 30293	302, 30200 302, 3, 2, 2, 2 302, 3, 400 302, 3, 5 302, 200000	303 207 196 37 426	521 499 355 689	1658 1638 1659 1659 1639		30529 30539 30553 30557 30559	3030020 3030020 303002, 20 303003 303005	189 208 333 246 53	223 537 473 439 299	168 168 168	1652 1653 1654	30809 30817 30829 30839 30841	4, 4002, 20 4, 4, 2, 40 4, 4, 2020 4, 4, 303 4, 4, 4, 20	232 169 203 72 161	329 207 351 271 233

N	481 307 509 477 477	535 549 323 337 591	427 367 251 117 117 385	371 357 541 499 419	405 373 581 293 303
×	339 321 344 147	226 203 60 277 374	246 223 172 103 108	263 202 207 306 113	146 85 359 52 232
Exponenten	4002002, 20 4002005 4002, 2, 2000 4002, 20020 4002, 500	4 • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	400030200 400040000 40005, 20 402, 70 402, 3003	402, 3, 2, 2040, 3, 2000, 2, 2, 2000, 2, 2, 2000, 4, 2, 2, 2000, 4, 2000, 4	402, 2, 302 402002, 4 4020005. 402005.
2	31321 31327 31333 31337 31357	31387 31387 31391 31393 31397	31469 31477 31481 31489 31511	31513 31517 31531 31541 31543	31547 31567 31573 31583 31601
"2	1679 1680 1681 1681	168	168	1687 1688 1689	1691
,2	1     %	1697	1700	1703	1705
N	353 481 433 579 389	367 429 377 417 315	262 373 107 263 58 223 9 85	195 209 241 373 355	351 383 447 531 513
N	278 203 190 221 84	283 115 275 175	263 262 107 58	127 191 232 132	155 111 260 241 142
Exponenten	4, 2, 2, 2030 4, 2, 2, 202, 2 4, 2, 2003, 2 4, 2, 2000 4, 2, 2000 4, 2, 2000	4, 3, 3, 20, 3, 4, 4, 3, 3, 20, 20, 4, 4, 3, 2, 20, 20, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,	4, 2, 300, 200 4, 2, 302, 20 4, 2, 5, 2, 2 4, 2, 503 4, 2, 9	4065, 4 40403 40403 404, 202	4 0 0 3 0 3 2 2 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Z	31121 31123 31139 31147 31151	31153 31159 31177 31181 31183	31189 31193 31219 31223 31223	31237 31247 31249 31253 31259	31267 31271 31277 31307 31319
1,2	1667	1669 1671 1671	1673 1674 1675	1676	1678
,2	1683 1684 1685	1 686	1687	1689	1693
N	213 277 371 461 397	265 479 197 451 391	361 383 233 113	489 559 389 565 565	539 469 465 487 439
N	98 179 145 286	218 278 30 189 275	202 142 188 100 147	310 271 35 219	149 136 136 180
Exponenten	4, 305, 2 4, 304000 4, 303002 4, 3020000 4, 302003	4, 3 200 2 4 4 4 4 5, 2 2 0 2 2 2 5	4, 3, 20300 4, 3, 3, 2000 4, 3, 502 4, 2070 4, 205, 3	4, 2020 4, 2020 4, 202, 3, 20 4, 202, 6	4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 4, 2000 5, 2000
Z	30851 30853 30859 30869 30871	30893 30893 30911 30931 30937	30941 30949 30971 30977 30983	31013 31019 31033 31039 31051	1664 31063 1665 31069 1666 31079 1666 31081
"2	1655 1656 1656	1658 1659		1661 1662 1663	1664 1665 1666
,2	1671	1673	1675 1676 1677 1678	1689	1681

z , z	"2	2	Exponenten	N	N	,2	,,2	Z	Exponenten	N	N	<b>'</b> %	1,2	2	Exponenten	N	N
1708 1709 1710 16	1693	31627 31643 31643 31649 31657	4626363 463, 3962 463, 2, 262 463, 646 463, 666	00 143 148 196 196	341 367 401 239 397	1722 1703 1722 1704 1723 1705		31891 31907 31957 31963 31973	5, 2020, 2 5, 2003, 2 5, 2, 2000 5, 2, 2020 5, 2, 3, 2020	161 156 271 141	381 355 439 385 337	1736	1714	32173 32183 32189 32191 32203	5020020 5020203 502040 50206 503, 2002	22 86 132 123 127	395 321 241 155 329
1711	1695	31663 31667 31687 31699 31721	403004 40302, 2, 2 404, 3, 3 404002, 2	67 158 77 135 160	311 383 255 323 223	1724 1725 1726 1727	1706	31981 31991 32003 32027	5, 2, 30200 5, 2, 403 5006, 2 5004020 5003, 202	185 60 72 172 128	321 229 155 233 345	1738	1717	32233 32233 32237 32251 32251	5 6 3 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	214 163 134 47	347 227 233 135
17.13	1698	31723 31727 31729 31741	46564 465.34 466,36 4686 5,7,3	97 107 107 36	257 165 141 93 113	1728	17,0	32029 32051 32057 32059 32063	5003, 300 5002, 2, 2, 2 5002, 3, 2 5002, 302 5002, 6	167 162 118 123 28	295 391 313 341 179	1741	11211	32261 32297 32299 32309	0, 0 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 0 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0 0,	182 113 44 170	123 251 295 201
1715 1716 1716 1717 1718	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	31769 31771 31793 31799 31817	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	140 83 162 68 216	140 197 83 223 162 209 68 251 216 295	1731	1709	32077 32083 32083 32089 32099	566683 668 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	230 247 191 281	359 421 455 399 349	1744	1721	32327 32327 32327 32341	6, 2005 6, 2005 6, 2003, 3 6, 2003, 3	108 89 70 217 141	127 197 229 351 173
1720 1720 1730 1731 1731	101 101	31847 31849 31859 31873 31883	5, 3, 2, 2, 3 5, 3, 20, 20 5, 3, 3, 20, 20 5, 20, 3, 2, 2 5, 20, 50 5, 20, 5	90 233 122 107 134	307 323 297 123 343	1733 — 1734 1712 1735 —	1712	32117 32119 32141 32143 32159	5003000 500303 502, 3, 200 502, 3, 4 502, 2, 5	220 79 188 57 40	361 299 319 245 217	1746	1724	32359 32363 32369 32371 32377	6, 2, 2, 2, 3 6, 2, 2000 6, 2, 3, 30 6, 2, 3, 2, 2 6, 2, 4, 20	77 122 148 103 129	263 321 193 251 187

,,2   ,2	2	Exponenten	N	N	722	"2	Z	Exponenten	N	N	,2	1,2	2	Exponenten	N	N
1748	32381	6, 2, 500	48	155	1 5	1739	32611	702, 3, 2	77	177	1772		32909	e7e3, 2ee	114	193
1749		6002, 202		_			32633	704, 20	98	125	1	1754	32917	9702000	157	253
1728		6002, 300	145	257	Ī	1740	32647	8, 4, 3	33	107	1773	Ī	32933	010002000	164	259
1750 —	32423	600002, 3	98	162	Ī	1741	32653	8, 3, 200	83	141	1774	Ī	32939	.7.	112	293
1751	32420	600000200	102	331	1763	1	32687	80004	36	121	1	1755	32041	07000200	155	267
1752		60003, 20		_	-	1	32693	802000	96	157	1775	Ī	32957	0100400	94	171
1729		6000302		_		1742	32707	9, 4, 2	37	88	1776	Ī	32969	•7, 2, 2020	160	219
1730		602002, 2		289	Ī		32713	9, 2020	75	103	1	1756	32971	•7, 2, 2002	101	<b>261</b>
1731	32479	60205	27	155	1765		32717	9, 2, 200	99	II3	1	1757	32983	•7, 20003	67	243
1732	32401	6636662	8	251	1	1744	32719	9, 3, 4	10	8	1777		32087	<b>67</b> , 26262	03	251
1733		664, 30		143	Ī		32749	100200	43	7.5	1778	Ī	32993	•7, 3, 4	108	133
1734		66463			9941		32771	•13, 2	4	6	1779	1	32999	•7, 3, 2, 3	58	199
1753 —	32507	60502	48	_	Ī	1746	32779	911002	25	63		1758	33013	•7, 4••••	115	189
1754 —	32531	7, 302, 2	8	189	1767		32783	•11,4	12	49	1780	Ī	33023	€7,8	••	65
1735	32533	7, 300000	131	211	1768	1	32789	•100000	28	93	1781	Ī	33029	9695999	102	157
1755		7, 3, 2, 20	124	175	Ī	1747	32797	•10, 30e	45	79	1	1759	33037	€6€4, 2€€	125	211
1756 —	32561	7, 2, 2, 30	126	_	1769		32801	<b>9994</b>	54	65	Ī	1760	33049	e6e3, 2, 2e	171	24I
1736		ď		215	Ī	1748	32803	●9●3, 2	43	97	1782	Ī	33053	●6●3, 3●●	132	233
1737	32569	က်	611	171	1770	Ī	32831	9,6	10	19	1783	Ī	33071	-6-24	54	247
1757	32573	7, 2, 400	83	140	<u> </u>	1740	32833	•8•5•	0	69	1	1941	33073	•6e2, 2, 3•	185	239
1758	32579	7004. 2		151	Ī		32839	<b>88</b> €3, 3	36	127	1784	.	33083	e6e2, 3e2	100	277
1738		7002002	16	235	1771	Ï	32843	-802002	89	175	1	1762	3309 I	•6•••4, 2	107	237
1759	32603			229		1751	32869	<b>68, 2, 2000</b>	113	179	1785		33107	6600002, 2	160	381
		/**, 4		52.		1/34	32007	60, 363	۶ ا	185,	20/1		33113	2, 7	35	333

z" Z Exponenten	-	Exponente	E .	N.	N	-2	1,2	Z	Exponenten	N	N	-22	1,2	Z	Exponenten	N	N
1787     33119     969995     38     313       1788     33149     969599     98     181       1763     33151     9697     15     113       1789     33161     66,2,3929     186     253     1801	33119         6600005         38         213           33149         6600500         98         181           33151         66007         15         113           33161         66,2,3020         186         253	666666 38 213 666569 98 181 6667 15 113 66,2,3626 186 253	213 181 113 253				1774	33391 33403 33409 33413	0502, 204 0502, 402 0500060 05000400	67 107 133 206	315 301 153 319	1813 1813	1788	33617 33619 33623 33629	65, 200003, 205, 200003, 205, 200003	300 217 134 236	383 517 485 421
<b>e</b> 6, 2, 2, 2 <b>e</b> 2 126 <b>e</b> 6, 2, 2, 3 <b>ee</b> 163	33179 66, 2, 2, 262 126 341 33181 66, 2, 2, 366 163 289	06, 2, 2, 202     126     341       06, 2, 2, 300     163     289	341		1 1		1777		•5•••2•, 2 •5•••2, 3•	199		1815	1789			293	465
33191 e6, 2002, 3 33199 e6, 2004, 59 33203 e6, 202, 2, 2 140 33211 e6, 203, 2 140	33191 66, 2002, 3 96 325 33199 66, 2004 59 273 33203 66, 202, 2, 2 140 339 33211 66, 20302 103 287	96 325 59 273 140 339 103 287	325 273 339 287			* * *	1779		••••	324 185 112 79		1816	1790		65, 20204 65, 3, 3, 4 65, 3002, 3 65, 302, 30	70 63 113 232	331 271 383 301
1767     33223     66, 3, 3, 3     73     241       1768     33247     66, 365     29     167     1804       1793     33287     6566, 3     48     151     1805       1769     33289     656500     137     185	33227	66, 3, 3, 3 73 241 66, 365 29 167 656, 3 48 151 656522 137 185 65648999 191 307	241 167 151 185 307		188   88		1781	33493 33503 33521 33529 33533	550205 550205 5504, 30 5505, 20	329 46 190 157	23 24 24 24 29 29 29 29 20 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30	818	1792 1793 1794 1795	33721 33739 33749 33751	65, 363, 26 65, 4, 2662 65, 46669 65, 46663 65, 4636	213 137 230 87 149	307 355 373 317 267
1794     33311     6564,5     34     177     —       1795     33317     65636260     224     353     1807       1796     33329     6563, 2, 3, 3     210     271     1808       1771     33331     6563, 2, 2, 2     149     359     —       1772     33343     6563, 6     27     169     1809	33317	34 177 23 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	353 271 359 169				1783	33547 33563 33569 33577 33581	65, 2, 4002 65, 2, 3, 202 65, 2, 2040 65, 2, 20002 65, 2, 20002	129 148 212 321 272	329 399 257 443 475	1819 1820 1821 1822	1796	33767 33769 33773 33791 33797	95, 5, 2, 3 95, 50020 95, 50200 95, 10	173 142 142 100	235 241 247 61 153
1797     —     1773     33349     e5e2e4, a     128     283     1810       1798     —     33353     e5e2e3ee     276     377     1811       1799     —     33359     e5e2e2, 4     74     323     —       1800     —     33377     e5e2, 2, 4e     208     255     —	33347 eseze, 2 128 283 33349 eseze3ee 229 357 33353 eseze2e 276 377 33359 eseze2, 4 74 323 33377 esez, 2, 4e 208 255	65e2e4, 2 128 283 65e2e3ee 229 357 65e2e2, 4 74 323 65e2, 2, 4e 208 255	283 357 377 255				1810 — 1785 — 1786 — 1787	33587 33589 33599 33601 33613	65, 2, 2, 2, 2, 2 186 65, 2, 2, 2000 295 65, 2, 2, 6 65, 2005 65, 2005 179	186 32 179 181	449 481 205 211 479	. 1	1823 — 1797 1824 — 1798 1825 —	33811 33811 33827 33829 33851	0405030 040502, 2 040403, 2 04040200	158 117 134 233 122	199 275 303 367 337

N	z,, Z	Exponenten	2	×	,2	",2	2	Exponenten	Z	N	72	"2	2	Exponenten	N	N
1826	<del></del>	646365		197	1	1813	34159	040000204	101	477	1848	1	34403	04, 2, 2, 2, 3, 2	222	
1 027	1700 33871	040303, 3	011	359	<u> </u>	1815	34171	04000402 04002 4 3	157	443	849	6	34421	04, 2, 2, 30000	330	541
1		_		_		1	34211		240			Ī	34430	04, 2004. 3	124	•
1828	- 33893	_	306	485	Ī	1816	34213	04002002000	4x3		1821	Ī	34457			
- 0	-			_	0				- ;	1						Š
1829	33911	_		200			34217	0400200020	452	025	_	3	34409	04, 200002000 430	430	
_		646263662	105	_			34253	04003.2.200	306	523			34471	64, 20002, 3	260	641
<u><u></u></u>	1802 33937	040202030		_	1840 -	1	34259	04003002, 2	228		1853	Ì	34487	04, 200024	156	
1831	<b>-</b> 33941	•4•2•2••••	384	619	Ī	1818	34261	•4••3•••••	367	595	1854		34499		188	
	19060		367		1	- 6.0	2,000		9						8	
		_		-			70440	446636262	7 0			_	34301	94, 202, 3000	333	-
		_		_	_		34273	64664, 46	211		_	١	34511	04, 202, 2, 4	102	451
		_		_			34203	24004002	172			1631	34513	04, 2020030	305	407
-	_	_	-			_	34297	64000, 20	155		1		34519	64, 2020003	101	585
1833	34031	0402, 304	47	353	1842	<u> </u>	34301	0400700	46	177	Ī	1833	34537	64, 2030020	343	477
1806	06 34033	0402, 4, 30	230	313	Ī	1822	34303	04070	I	105	1	1834	34543	94. 20304	7,5	350
1	1807 34039	_			1843		34313	04, 2, 5020	202	273	1		34540	04, 204000	257	
<u></u>	1808 34057	_			•	1	34319	04, 2, 5, 4	9	251	1856	1	34583	04, 3, 3003	122	435
1834	- 34061	•4•••4, 2••		_	1	1823	34327	64, 2, 4003	109	387	1857	Ī	34589	04, 3, 3, 300	228	403
1809	09 34123	04000002002	281	725 1	1845 -	Ï	34337	64, 2, 3640	234	283	Ī	1836	34591	04, 3, 3, 5	53	281
1835	24127		21		<u> </u>	1824	24261	7000	2	204		1837	34603	,	222	Ş
<u> </u>	_	_					34361	64. 2. 3. 3. 20	288		888	١	34607	94, 3, 2004	3 6	
<u></u>	1811 34141	_		_		1		•4, 2, 3, 6	38	230	1850	Ī	34613	64. 3. 2. 2000	•	
<u></u>	1812 34147			567	1	1825 3		04, 2, 2050	217	255	1860	1	34631	•4, 3••3, 3		
1836 —	- 34157	04000020200	376	651	Ī	1826	34381	04, 2, 202, 200	347	26z	1861	Ī	34649	04, 30002, 20	364	

$ \overline{N} _N$	288 661 212 245 499 805 273 739 301 729	395 569 202 451 108 479 385 493 230 629	75 361 253 417 103 295 14 131 172 437	353 497
Exponenten	35171 636262, 3, 2 3361 6382, 2, 66 1859 35221 6382, 2, 26666 1860 35227 6382, 2, 2 2 2 1861 35251 6382, 2, 2 2 2	6362, 263, 26 6362, 3, 4, 2 6362, 3, 2, 4 6362, 3663 6362, 36262	0302, 404 0302, 5000 0302, 602 0302, 9	1867 35353 930004, 2, 20 1898 — 35363 93000393, 2
2	35171 35201 1859 35221 1860 35227 1861 35251	1862 35257 35267 1863 35281 35291	1864 35311 1865 35317 1866 35323 	35353
72	1891 — 1859 — 1859 — 1860 — 1861	1863 1863	1864 1865 1866	1867
ેસ		1893 1894 1895	1896 1896	
2	289 443 351 393 431	589 665 463 649 591	529 443 257 417 507	431 625 601
2	130 130 125 24 340	249 421 105 272 224	305 181 138 308 199	341 232 265 194
Exponenten	0304, 2, 40 0304, 2, 2, 3 0304, 402 03030400	63636262, 2 6363626266 6363, 2, 2, 4 6363, 2662, 2	0303, 30200 0303, 4, 2, 2 0303, 600 030204020	030203030 030203, 202 03020203, 2
2	34913 34919 34939 34949 34961	34963 34981 35023 35027 35027	35053 35059 35069 35081 35083	35089 35099 35107 35111
·*	1   36	1850 1851 1852	1853	1856
'n	1876 1877 1878 1878	1880	1882	188
2	575 569 337 379 163	309 203 261 433 417	349 301 275 363 269	41 159 49 103 80 253 07 287
2	211 216 258 100 100	199 68 814 313 171	125 192 83 140 150	41 180 107
Exponenten	64, 3000202 04. 3020002 04, 303, 30 04, 30303 04, 307	04, 4, 4000 04, 4, 3, 4 04, 4004 04, 40002 04, 402, 2, 2	94, 49392 94, 5, 399 94, 5, 3, 3 94, 5, 2992 94, 59399	64, 703 6369, 2 6366, 2, 20 6366, 202
Z	34651 34667 34673 34679 34687	34693 34703 34721 34729 34739	34747 34757 34759 34759	34807 34819 34841 34843
,,2	1838	1840	868 1842 869 1843 870	1844 1845 1846
ĸ	1862 1863 1864	1865 1866 1867	1868 1869 1870	1871

Exponenten $ \overline{N}  N$
547 1027
_

, 1	NOUHL	9 H 22 H 50	<b>8 1 0 0 8</b>	<b>ខ្</b> លី ខ្លី ខ្លី ខ្លី	465 411 379 509 635
N	4 (1) (1) (1) (1)	20 149 33 161 78 115 39 121 09 183	66 233 20 271 09 329 01 259 85 313	2 309 1 289 7 335 4 485	
N	167 96 217 212 220	120 33 78 39 109	120 209 201 85	112 158 131 77 204	2 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
Exponenten	63, 562, 2, 2 63, 56263 63, 563, 26 63, 6, 2626 63, 666666	63, 7, 4 63, 7, 4 63, 9, 2 2269, 3	226783 22663, 2 2266288 2265, 2, 38 2265, 293	0206, 302 020505 020504, 2 020502, 4	205, 20200 2205, 3, 2, 2 22040400 220403002
7	36787 36791 36793 36809 36821	36833 36847 36857 36871 36877	36887 36899 36901 36913 36919	36923 36929 36931 36943 36947	36973 36979 36997 37003
"2		1938	1941	1944	1946 1947 1948
,×	1964 1965 1966	1967	1969	1971	5
N	683 653 499 597	375 149 525 419 461	575 245 481 599 603	527 535 497 341 239	377 385 451 463
N	111 286 239 145 245	98 17 326 237 203	33 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	371 337 358 261 109	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
Exponenten	03, 302, 2, 4 03, 302002, 2 03, 3020202 03, 303, 2, 3 03, 3030002	e3, 3e4e3 e3, 3e8 e3, 4, 3eeee e3, 4, 3, 3ee	e3, 4, 200200 e3, 4, 2, 6 e3, 4003000 e3, 4002002 e3, 400002, 2	63, 400, 20 63, 402, 2000 63, 402, 30 63, 403, 30 63, 5, 5, 2	63, 5, 3, 200 63, 5, 2, 2, 20 63, 5, 2, 5 63, 500002 63, 500002
Z	36559 36563 36571 36583 36583	36599 36607 36629 36637 36643	36653 36671 36677 36683 36681	36697 36709 36713 36721	36749 36761 36767 36779
"2"	1925	1927 1928 1929	1       8	1931 1932 1933 1933	1
,2	1951	1953 1954	1955 1956 1957 1958	1959	1960 1961 1962 1963
2	567 689 667 571 353	409 335 121 513 293	577 537 571 631	605 429 223 595 505	851 573 543 483 521
×	362 266 279 401 61	248 87 108 319 56	366 421 249 455 236	369 296 30 351	325 124 419 265 158
Exponenten	03, 203, 3000 03, 203, 2002 03, 20302, 20 03, 20302, 20 03, 20305	e3, 2e5eee e3, 2e5e3 e3, 3, 8e e3, 3, 4eeee	e3, 3, 3e2eee e3, 3, 2 eee3e e3, 3, 2, 2, 3, 3 e3, 3, 2, 2 ee2e	63, 3, 2, 30000 63, 3, 2, 4, 20 63, 3, 2, 7 63, 3003, 20 63, 3002030	63, 30000004 63, 300004 63, 30004 63, 30004 63, 302, 3, 3
2	36293 36299 36307 36313 36319	36341 36343 36353 36373 36383	36389 36433 36451 36457 36467	36469 36473 36493 36493	36523 36527 36529 36541 36541
72	1911	1914	1916	9161	1 6 2 9   1 8 2 1
·N	1939	19   19   19	4     8	1946	181 8

,2	,×	2	Exponenten	×	N	,×		7	Exponenten	K	×	<b>,</b> ×	72	7	Exponenten	N	×
1975	1950		37019 e2e4e2, 2e2 37021 e2e4e2, 3ee	283 501	589	1987	18	37313	•2•3, 3, 5• •2•3, 3, 2•2•	260	309	11	1976	37549	1976 37549 020200000200	633	1091
1	1951		37039 02040004	107 493			1	37337	0203, 302, 20	418				37567		9	
<u> </u>	1952		37057 0204, 2, 50	229 271	271		1962	1965 37357	1965 37357 6263, 46266	301		<u> </u>	1977	37573	1977 37573 626262, 366	521	815
1977	776		37061 e2e4, 2, 3eee	332 519	32 519	1989	1 9	37361	0203, 5, 30	252	331	8	1980	37579	1980 37579 9292992, 2992	387	387 1001
1978	1933		6264, 30626 6264, 666	362 503	503		1967	37379	1967 37369 6263, 6, 26 37370 626267, 2	203	•		1981	37591 37607	37591 0202003 37607 0202003, 2, 3	253	919
	1955	37123	020306, 2	129 277	277	1661		37397	-2-2-4	400			-	37619		264	647
1979	1979		37139 e2e3e3e2, 2 37159 e2e3e2e2, 3	254 599 197 663	599	1992	188	37409	37409 e2e2e3e4e 1968 37423 e2e2e3ee4	340	579	•••		37633 37643	1982 37633 6262, 2, 76 2003 — 37643 6262, 2, 4062	193	219
1 %	1957	37171	37171 626362, 2, 2, 2 37181 626362, 400	303 731	731		0261	37441	1959 37441 ezezezese 1970 37447 ezezezes, 3	321				37649 37657	37649 6262, 2, 3636 1983 37657 6262, 2, 3, 2, 20	434	549 701
	1958		02030003000	439 685	685	1993		37463	0202020003	250			1984	37663	1984 37663 =2=2, 2, 3, 5	8	•
ğ	1959	37199	37199 e2e3eee2, 4 37201 e2e3eeee3e	140 613 507 647	613		1971	37483 37489	1971 37483 62622, 2662 1972 37489 626262, 3, 36	373 455		2005	1985	37 <b>69</b> 1 37 <b>6</b> 93		278 341	
1982	<u>,  </u>	37217 37223 37243	•2•3••2, 4• •2•3••2, 2, 3 •2•3••4•2	382 469 208 711 189 533	469 711 533	8	1973	1973 37501 1974 37501	1973 37501 020202, 3000 1973 37501 020202, 500 1974 37507 02020005, 2	261 261 231	813 481 503	111	1986 1987 1988	37699 37717 37747	1986 37699 6262, 2664, 2 1987 37717 6262, 2666666 1988 37747 6262, 263, 2, 2	689 311	641 1115 759
1984	984 —	37253		336 521 483 683	521 683	1995		37511	37511   02020004, 3 37517   02020003, 20	190 488	611		1989	37781	2006 — 37781 e2e2, 3, 2eeeee 1989 37783 e2e2, 3, 2ee3	536	
1 28 E	1986 —		37307 e2e3, 2e3e2 37309 e2e3, 2e4ee	230 641 279 509			1975	37537 37547		499 458			1990	37811 37813 37813	2008 — 3781 e2e2, 3e2, 2, 2 — 1990 37813 e2e2, 3e2eee	314 495	761 809

>	653 413 639 621	883 725 961 659	487 863 512 623 290 981 759 1049 365 433	390 1009 576 737 415 991 515 819	479 361 585 453 781
×	469 256 79 140 481	542 262 323 606 154	487 512 290 759 365	390 576 415 515	168 193 346 107 485
Exponenten	2016 38377 execedence 28393 exece6, 2e 2017 38431 exec2, 4, 5 38447 exec2, 3004 2018 38449 exec2, 3, 2, 3e	38459 22002, 3, 2000 38459 22002, 3, 302 38461 22002, 3, 400 38501 22002, 2, 2, 200 38543 2200203, 4	2020 38557 2202023 300 38561 22022000040 38567 2202200003 3 2021 38569 220220000020	38639 e2ee2e2, 2ee2 2o23 38611 e2ee2e2e2, 2ee2 3 38629 e2ee2e2e2, 2ee	
Z	38393 38433 38431 38447 38449		38557 38561 38567 38569 38569	38603 38609 3861 38619 38639	38651 38653 38669 38671
٤,,	2016 —— 2017 —— 2018				2025 2026 2026 2027
٠,	2034	648 1115 2036 695 1133 2037 590 847 474 1223 2038 322 1165 2039	2041	2042 2043 1044	2045
×	547 623 601 963	1115 1133 847 1223 1165	1013 691 991 347	683 1037 607 1109 773	903 679 657 657
2	8 4 4 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	648 8 695 8 74 8 8 2 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	568 123 604 300 571	159 383 112 643 596	4 4 8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
Exponenten	2006 38149 ezeees5ee 38153 ezeees4eze 2007 38167 ezeees3ee3 38177 ezeeesze4 38183 ezeeesze4	2008 38197 e.eeee	2009 38239 220000000000000000000000000000000000	2011 38287 e2eee2, 3, 4 2012 38299 e2eee2, 2, 202 38303 e2ee22, 2, 5 2013 38317 e2ee2200	2014 38327 02000203 2014 38329 02000203 38333 020002040 38351 020003, 2, 4
7		38189 38197 38201 38219 38231	38237 38239 38251 38273 38273	38287 38299 38303 38317 38317	38327 38329 38333 38351 38371
12	1   20   20		1 8 1 8		1 2   1 2 2
,22	2010	2023	2026	2029	2031
×	5 13 5 05 5 05 3 3 05	313 117 325 489 317	681 863 619 717 757	797 837 593 923 585	683 1079 672 1097 305 679 421 519 225 773
×	155 166 284 317 70	81 106 241 208 51	437 335 142 313 222	575 484 211 258 109	
Exponenten	222, 4, 3, 3 222, 4993 222, 4939 222, 5, 299 222, 5, 4	37879 e2e2, 6e3 37889 e2ee69 37897 e2ee62e 37907 e2ee52, 2	020003000 020003020 02000302, 4 020003, 2, 3, 2	1999 37993 e20003, 2020 2000 38011 e20003, 402 — 38039 e20022003 2001 38047 e2002203	2002 38053 ezeesseessees 2003 38069 ezeessessees 2003 38083 ezees, 2, 4, 2 2004 38113 ezees, 3, 4, 2005 38119 ezees, 3, 2, 3
Z	37831 37847 37853 37861 37871	1993 37879 1994 37897 1995 37957	1996 37957 1997 37963 37967 1998 37987	37993 37997 38011 38039 38047	2002 38053 2003 38083 2004 38113 2005 38119
,,2	1991		1996 1997 1998	1999 2000 2001	2003
,2	2009	0   0	2015	2010	100

×	719 469 883 681 787	633 431 773 879 1067	499 625 659 997	983 727 389 631 839	781 757 651 385
>	202 640 527 284		270 403 519 618 338	570 157 191 324	457 208 409 203
Exponenten	2055 39191 e2, 2, 2e3ee3 2055 39199 e2, 2, 2e3ee3 2056 39217 e2, 2, 2e2, 2, 3e	39229 e2, 2, 2e2, 4ee 349 39233 e2, 2, 2eee5e 366 39239 e2, 2, 2eee3, 2 236 39241 e2, 2, 2eee22 643 39251 e2, 2, 2eeee2, 2 448	2059 39301 62, 2, 200500 2059 39301 62, 2, 3, 4000 2050 39313 62, 2, 2, 2, 200 39317 62, 2, 2, 2, 200 39323 62, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 202	39341 e2, 2, 2, 2eee2e 39359 e2, 2, 2, 2eee4 39359 e2, 2, 2, 2ee 39367 e2, 2, 2, 3, 3, 3 39371 e2, 2, 2, 3, 3, 3	2082 2083 39373 62, 2, 2, 3, 2, 26 2082 29383 62, 2, 2, 36063 2064, 39397 62, 2, 2, 4, 2006 2065, 39409 62, 2, 2, 5, 30
2	39191 39199 39209 39217 39227		39293 39301 39313 39317 39323		39373 39383 39397 39409
",2	2055 2056 2056	2057 2073 — 2074 — 2058 2075 —	2059	2061	2063 2064 2065
72	2070	2073	2076	2079 2080 2080 2081 2061	2082
×	111 281 246 395 339 467 83 377 159 439	221 259 390 497 269 707 100 469 210 241	179 389 148 475 227 767 478 619 447 643	55 361 244 543 512 701 134 591 371 663	261 601 357 587 278 405 151 429
×	111 246 339 83 159	221 2390 100 100	179 148 427 478 447	55 244 512 134 371	261 357 278 151
Exponenten	38923 e2, 2, 7002 38933 e2, 2, 60000 38953 e2, 2, 50020 38959 e2, 2, 5004 38971 e2, 2, 5, 302	38977 es, 2, 4e5e 38993 es, 2, 4eee3e 39019 es, 2, 4, 2eee3 39023 es, 2, 4, 2e4	39043 e2, 2, 365, 2 39047 e2, 2, 364, 3 39079 e2, 2, 3002, 3 39089 e2, 2, 3002, 3 39097 e2, 2, 3003, 20	62, 2, 3, 2, 4, 2 62, 2, 3, 2, 4, 2 62, 2, 3, 2, 262 62, 2, 3, 2, 262 62, 2, 3, 263	39139 02, 2, 3, 3, 3, 2 39157 02, 2, 3, 4000 39161 02, 2, 3, 5, 20 39163 02, 2, 3, 502
7		38977 38993 39019 39023		39103 39107 39113 39119 39133	
722	2041	2045	2046 2047 2047 2048	2049	2051 2052 1053
`14	1 9 1 1	2062	2065	2066 2067 2068	100
N	524 827 360 941 335 809 196 727 449 645	260 577 552 755 527 673 324 883 413 737	121 573 32 249 135 437 277 657 433 685	369 479 149 557 163 365 294 503 216 517	308 439 152 403 60 233 125 191
2		322 327 324 413 737	121 32 135 277 433	369 149 163 294	308 152 60 125
Exponenten	02003, 200000 02003, 200000 02003, 2, 2, 2, 3 02003, 2, 203	38723 e2ee3ee4, 2 38727 e2ee3ee2e2e 38737 e2ee3eee3e 38747 e2ee3ee2e2 38749 e2ee3ee3e	0200307 02004, 4, 3 02004, 202, 2	0200402,30 020040203 02005,4,2 02005,2,20	38873 0200502, 20 38891 02005002 38903 0200703 38917 02, 2, 800
Z	38693 38699 38707 38711		38767 38783 38791 38803 38821	38833 38839 38851 38861 38861	
72	1047 1048 — 2028 1049 — 2029	2030	2033 2033 2034 2035	2036	3039
, ,	2048	2050 2051 1052	S	2054	2056 2057 2058

N	245 639 96 437 374 609 443 605 500 681	76 423 446 707 185 631 33 241 211 755	389 689 323 735 145 669 257 715 56 369	303 359 214 777 507 721 260 599 464 645	329 431 171 319 174 197 479 771 223 751
N	245 96 374 443 500	76 446 185 33	389 323 145 257 26	303 214 507 260 464	329 171 174 479 223
Exponenten	2089 39979 e2, 3, 4000 e2, 39983 e2, 3, 4004 e2, 3, 4000 e2, 3, 3202 e2, 40013 e2, 3, 302, 200	62, 3, 3005 62, 3, 3, 2, 200 62, 3, 3, 2, 2, 3 62, 3, 4, 7 62, 3, 200 62, 3, 200 63, 3, 200	2094 40093 e2, 3, 2e2, 3ee 2095 40099 e2, 3, 2ee 3, 2e96 40 III e2, 3, 2ee 94 2097 40 I23 e2, 3, 2ee 6	2098 40129 62, 3, 2, 2, 56 2117 — 40151 62, 3, 2, 2000 2099 40153 62, 3, 2, 202, 20 2118 — 40169 62, 3, 2, 30020	
2	39979 39983 39989 40009	1114 — 40031 1115 — 40037 2091 40039 2092 40063 2093 40087	2094 40093 2095 40099 2096 40111 2097 40123	40129 40151 40153 40169	40177 40189 40193 40213 4023
1,2	2089 	2091 2092 2093	2095 2095 2096	8   8	2100 2101 2102 2103
2	2089 2111 2112 ————————————————————————————	2115	1	., ., .,	1 1 2 1 1
N	155 711 593 967 522 815 596 761 633 899	340 781 138 653 175 663 400 679 326 773	531 857 84 457 383 467 215 729 440 571	178 665 272 497 349 547 255 661 104 463	275 493 164 241 93 103 242 305 202 457
$\overline{N}$		340 138 175 400 326	531 88 384 215 440	178 665 272 497 349 547 255 661 104 463	275 164 93 242 202
Exponenten	2078 39727 e2, 262, 204 2079 39733 e2, 262, 2, 200 39749 e2, 20200030 39761 e2, 20200030 2080 39769 e2, 2020002, 20	39779 e2, 202024 39791 e2, 2020264 39799 e2, 203, 3, 200 39821 e2, 203, 3, 200 39827 e2, 203, 202, 2	2082 39829 e2, 2e3, 2eeeee 3983 e2, 2e3, 2, 2e3, 2e5 2e84 2e84 e2, 2e3ee2, 3e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2e5 2	39863 e2, 2e3e2e3 2085 39877 e2, 2e4, 2ee2 39887 e2, 2e4, 2, 4	2108 — 39929 e2, 2e7, 2e 208 39929 e2, 3e7, 2e 208 39937 e2, 3, 9e 2109 — 39953 e2, 3, 5e3e 2110 — 39971 e2, 3, 4e3, 2
2	2078 39727 2079 39733 — 39749 2080 39761	39779 39791 39799 39821	2082 39829 2083 39841 2084 39847 	2085 39869 2085 39877 2086 39883 39887	39901 39929 39937 39953 39971
,,2	2078 2079 ————————————————————————————————————	1 8 1	2083	2085	2087
-22	2097	2099		2105	1001
N	397 631 675 807 1013	166 725 708 1145 271 979 464 569 535 877	325 927 751 893 957	693 791 747 919 679	281 745 691 829
N	95 268 251 512 393	166 708 271 464 535	362 362 592 504 257	311 240 169 348	152 27 209 391 246
Exponenten	2084 — 39443 92, 2005, 4 2087 — 39451 92, 2004, 202 2085 — 39451 92, 2004, 202 2085 — 39461 92, 200302000	.086 — 39503 e2, 2002020, 4 .087 — 39509 e2, 20020000000000000000000000000000000	39551 e2, 2002, 7 39563 e2, 200003002 39569 e2, 2000203 39581 e2, 20002, 300 2071 39607 e2, 20000203	2072 39619 e2, 20002, 4, 2 093 — 2073 39623 e2, 20002, 3, 3 2073 39631 e2, 20002, 2, 4 094 — 39659 e2, 200030002 2074 39667 e2, 20004, 2, 2	095 — 39671 02, 200403 2075 39679 02, 2008 2076 39703 02, 202, 3003 2077 39709 02, 202, 3, 300 096 — 39719 02, 202, 202, 3
2	39439 39443 39451 39461 39499	39503 39509 3951 3951 39541	39551 39563 39569 39581 39581	39619 39623 39631 39659 39667	39671 39679 39703 39709 39719
"2	2066	2069	2071	2072	2075
,2	2085 1085	2086 2087 2088	2090 2091 2091	2093	9     9

,×	 	7	<u>ਜ਼</u>	Exponenten	$ \overline{N} $	N	,2	",2	Z	Exponenten	×	N	2	,,2	Z	Exponenten	N	N
12222	5	40237 40241 40253 40277 40283	4 4 4 4 4	104 40237 02, 3002, 23 40241 02, 3002, 2, 3 40253 02, 3003, 40 40277 02, 30000000000000000000000000000000000	318 652 344	869 623 577 1055		1134 — 2116 1135 — 2117	40543 40559 40577 40583 40591	e2, 4, 2005 e2, 4, 2, 204 e2, 4006 e2, 4004, 3 e2, 4003, 4	71 100 190 132 103	397 471 219 425 441	2146	2130	40841 40847 40849 40853 40867	02, 6, 3020 02, 6, 3, 4 02, 6, 2030 02, 6003, 2	218 60 221 262 145	259 281 423 331
1125	2125 2126 — 2105 — 2106 2127	40389 40343 40351 40357 40351	4 4 4 4	1125 — 40289 e2, 30002, 40 1126 — 40343 e2, 302, 2003 — 2105 40351 e2, 302, 2, 5 — 2106 40357 e2, 30200200 1127 — 40361 e2, 30200020	416 206 85 523 572	511 739 461 827 791	1137	2 1 2 1 1 2 1 2 3 8 1 1 2	40597 40609 40627 40637 40639	03, 40002 03, 40002 03, 40002, 3, 3	457 283 254	737 415 685 463 299	1 1 1 1	2132	40883 40883 40897 40903 40927	92, 60004 92, 602, 2, 2 92, 7, 5 92, 7, 3, 3	63 113 69 25	293 359 135 147
1   2   2	2109	2107 40387 e2, 3e3, 4, 2, 2108 40423 e2, 3e4, 2, 2108 40427 e2, 3e4eeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeeee	44444	2107 40387   22, 363, 4, 2 2108 40423   22, 364, 2, 3 1128   40427   22, 3040002 2109 40429   22, 3040002 1129   40433   22, 305, 30	209 137 212 287 238	467 473 561 499 313	2138	1   2   2	40693 40697 40709 40709	02, 404 02, 405, 20 02, 4050 02, 5, 5000 02, 5, 2003, 20	1000 10	433 295 311 281	2150	2135	40933 40939 40949 40961 40973	02, 8, 2000 02, 80002 02, 9000 000 12 0	131 80 90 90	209 215 149 41
130		2110 40459 e2, 4, 5ee2 2111 40471 e2, 4, 4ee3 2112 40483 e2, 4, 3e3, 40487 e2, 4, 3e2, 40493 e2, 4, 3ee2	4 4 4 4	2110 40459 e2, 4, 5002 2111 40471 e2, 4, 4003 2112 40483 e2, 4, 303, 2 40487 e2, 4, 302, 3 40493 e2, 4, 302, 3	149 123 207 152 346	379 437 469 511 595	1 2 2 2	1212	40751 40759 40763 40771 40787	02, 5, 2, 20, 20, 20, 5, 2, 20, 20, 30, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 2	86 121 156 159	395 449 433 353 553	11112	213 813 813 0412	2137 40993 2138 41011 2139 41017 2140 41023	0007, 2, 2, 2 0007, 3, 20 0007, 6 0007, 6	127 121 167 23 66	153 291 239 141 287
2132	2113	40499 40507 40519 40529 40531	2, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,	1132 — 40499 =2, 4, 3, 2, 2, 2 — 2113 40507 =2, 4, 3, 3e2 2114 40519 =2, 4, 2e3, 3 1133 — 40529 =2, 4, 2ee3e 2115 40531 =2, 4, 2eee2, 2	236 181 155 410 297		2144	1   2   2   2   2   2   2   2   2   2	2126 40801 2127 40813 2128 40819 — 40823 — 40823	02, 502, 40 02, 502, 02 02, 503, 2, 2 02, 503, 3, 2	233 273 165 130	235 289 273 473 165 403 92 349 130 241	2154	141   141	1154 41047 1155 — 41057 1156 — 41077 1156 — 41081	•••6•••3 •••6, 2, 4 •••6, 3	109 152 192 229 186	393 413 235 375 269

N	685 827 671 1019 941	977 771 963 821 779	701 879 531 211 519	4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	729 1081 737 543
%	504 529 632 348	707 167 398 495	2448 1448 1866 383	38 0 20 2 20 2 30 0 50 2 50 2	302 374 374
Exponenten	41609 000 3000 3000 3000 3000 3000 3000 30	2170 41641 00030000004 2185 — 2171 41647 0003000004 2185 — 41651 000300003, 3, 2 2172 41659 0003000302 3186 — 41669 0003000302	41687 00030020003 2173 41719 000300403 2174 41737 0003, 2, 70	41759 9993, 2, 3, 5 2175 4176 9993, 2, 2000 41771 9993, 2, 2, 3, 3 41777 9993, 2, 2, 3, 3 41801 9993, 299202	2176 41809 0003, 200030 2194 — 41813 0003, 20000000 2195 — 41843 0003, 203, 2, 2 2196 — 41849 0003, 204, 20
7	41609 41611 41617 41621	41641 41647 41651 41659	41681 41687 41719 41729	41759 41761 41771 41777 41801	41809 41813 41843 41843
"2"	1168	2172	1 2 2 2	11,73	21.76
`22	2182  2183 2184	2185	2188	2191	2194 — 2176 2195 — 2195 — 2196 — 2177
N	375 445 597 743 833	757 619 433 537 441	289 299 539 575	681 547 533 555 647	831 931 549 457
N	203 138 352 470 318	401 9401 101 101	278 101 95 229	494 120 413 251 198	3 4 8 8 8 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
Exponenten	0004, 2, 4, 3 0004, 2, 4, 3 0004, 2, 3, 20 0004, 2002000	0004, 2000 0004, 2000 0004, 3, 4, 2 0004, 3, 3000	===4, 4e2== ===4, 6e2 ===3=6, 3 ===3=4e2, 2 ===3=3, 2		00030202, 200 000302, 20002 000302, 4, 20 0003002, 500
7	41341 41351 41357 41381 41387	41389 41399 41411 41413 41443	41453 41467 41479 41491 41507	41513 41519 41521 41539 41543	41549 41579 41593 41597 41603
,,2	1158	2159	2162	1165	178 — 179 — 180 — 181
ĸ	2167 2168 2169 2170	2171 2172 2172 2160 2160	2173	2175	<u> </u>
N	459 439 641 581 487	373 475 489 543 307	483 301 389 227 331	461 345 393 571 647	517 709 319 793 643
N	325 248 245 356 131	205 347 344 199 54	304 230 159 122 215	181 82 311 212 469	113 435 171 833
Exponenten	00562, 2, 20 00562, 300 005600000000000000000000000000000000	000500400 0005, 2, 2020 0005, 202, 20 0005, 20202	0065, 3, 200 0065, 4, 30 0065, 4, 2, 2 0065, 600	0044402 00444,4 0044303 00443,202	00402004 00402, 2000 0040005 00400002, 2
Z	41113 41117 41131 41141	159 41149 159 41170 160 41183	1161 — 41189 1162 — 41201 1163 — 41213 1163 — 41213 2150 41221	41227 41231 41233 41243 41257	41269 41269 41299 41299
1,2	2144	1159 2148 1159 2148 1160 2148	2149	1164 2151 1165 2152 1165 2153	2154 2155 2156 2157
,22	2157 2158	2159	1 162	2164 1165	1       5

_	0 4 10 5 5	10 N 10 M 11	~ ~ ~ ~ ~	N M L 10 -	
≉	561 689 659 1141 226 855 479 743 381 977	283 1015 517 917 419 955 302 1023 789 1091	80 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50	745 503 647 685 481	413 301 553 623
<b>!×</b>	561 659 226 479 381	283 517 419 302 789	359 514 378 397 571	416 87 280 492 125	141 141 328 350 344
Exponenten		002002, 2 3003 002002, 2 300 0002002003, 2	2225 — 42437 002003, 50 2225 — 42437 002003, 3000 2226 — 42443 002003, 2002 — 2111 42451 00200302, 2	2227 — 42461 •••2003030 2228 — 42463 •••2004, 3, 2 2229 — 42473 •••2004020 2214 42487 •••200503	42499 0002, 2, 7, 2 42509 0002, 2, 5, 20 4253 0002, 2, 30200 42557 0002, 2, 30200
2	2202 42337 2203 42349 —— 42359 2204 42373 2205 42373	2206 42391 2207 42397 2208 42403 —— 42407 2209 42409	2210 42433 2225 — 42437 — 2211 42451 — 2212 42455	2213 42463 	2230 — 42491 2231 — 42599 2232 — 42593 2232 — 42533
1,2	2202 2204 2205	2206 2207 2224 2224 2209	2211	1 2   1 2	1 1 1 1
,2	33			2228	2231 2231 2232 2233
×	733 815 793 989 1019	661 1139 579 833 314 699 557 871 415 1073	617 789 718 1163 434 535 494 857 131 625	292 715 30 251 526 665 782 1079 485 1267	722 1177 346 959 365 809 542 1291 463 1261
2	320 588 484 184 778	661 579 314 557 415	617 718 434 494 131	20 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	722 I 346 365 365 542 I 463 I
Exponenten	42089 600203, 2, 3, 2 42089 600203, 20020 42101 600203, 3000 42131 6002020202, 2 2192 42139 6002002, 2	2193 42157 000202000200 2194 42159 0002023, 20 2195 42181 000202, 2, 4, 2 2196 42187 000202, 2, 3000 2196 42187 000202, 2, 2002	2197 42193 000202, 20030 	4227 00020, 4, 2, 2 4229 00020, 8 42257 000200030 42281 00020002002 2199 42283 00020002002	2221 — 42299 00020002, 302 346 959 2231 — 42329 000200004, 2 365 809 2231 — 42323 00020000002, 2 542 1291 2232 — 2201 42331 0002000000002 463 1261 2233
7	42089 42089 42101 42131 42139	42157 42169 42179 42181	42193 42209 42221 42221 42221	42227 42239 42257 42281 42281	42293 42299 42307 42323 423331
1,2	1192	2193 2195 2195	21.97 1.08	11118	2200
,2	2200	22	2213	2216	2220
N	501 725 451 805 769	603 661 503 699 605	301 497 439 287 193	113 307 463 367 545	597 605 829 859 807
N	155 202 83 509 556	130 177 152 431 221	243 312 127 218 102	11 74 263 304 241	178 219 487 238 569
Exponenten	0003, 3, 4, 3 0003, 3, 2003 0003, 3, 2, 5 0003, 3002000 0003, 3000020	993, 39994 999, 39293 9993, 4, 3, 3 9993, 499999	•••3, 5, 4•••3, 5, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,	0003, IO 000206, 4 000205, 300 000204040	000204033 0002030230 00020300230 00020300003
2	41863 41879 41887 41893 41893	41903 41911 41927 41941 41947	41953 41957 41959 41969 41981	41983 41999 42013 42017 42019	42023 42043 42061 42071 42073
,,2	2178 —— 2179 2180	2181 2182 2183	201 2185 202 2185 203 —	204 205 205 2187 21887 2188	200 1189
,2	2197 2198	22   200	2202	2205	20   100

×	699 811 751 631	323 323 371 625	599 661 679 609 759	689 935 949 795	321 947 1053 921
N	446 339 352 352	284 1112 125 275 389	2 2 2 3 4 4 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 5 4 5 5 6 5 6	153 259 360 448 347	44 321 370 947 445 1053 520 921 820 1133
Exponenten	4397 000004, 3000 43987 000004001, 2 43997 000004003 44017 000006, 30	2299 — 44027 ••••••66••• 2299 — 44027 •••••67-2 — 2282 44029 •••••8•• — 2283 44041 ••••2, 662• — 2284 44053 ••••2, 56•••	2285 44059 00002, 5, 202 2286 44071 00002, 402, 3 2300 — 44087 00002, 4, 203 2287 44089 00002, 4, 3, 20 2288 44101 00002, 303000	2301 — 44111 = 6662, 362, 4 2302 44119 6 6662, 36669 2303 — 44123 6662, 3 6226 2309 44131 6662, 3 2, 4 6	2305 — 44159 00002, 3,7 44 321 2305 — 44171 00002, 203002 370 947 2306 — 44189 00002, 2020, 2 445 1053 2306 — 44189 00002, 2020, 300 520 921
7	43987 43987 43991 43997 44017	44027 44027 44029 44041	44071 44071 44087 44089 44101	44111 44119 44129 44131	44159 44171 44179 44189 44201
,,2	228° 2281	2282 2283 2283	2285 2286 2287 2288	2289	
,2	885 1427 2295 2280 610 1597 2296 — 691 1081 2297 — 814 1115 — 2281	8 8		1267 2301 747 2289 969 2302 757 2303 —	
N	885 1427 610 1597 89 589 691 1081 814 1115			H	
N	885 610 89 691 814	717 157 251 400 183	332 481 562 643 708	465 572 397 556 475	274 167 514 287
Exponenten	005 — 2265 43669 00000000000000000000000000000000000	2268 43753 ***********************************	881 2288 — 43787 66662, 4662 763 — 2272 43789 666603, 4, 26 093 2289 — 43793 666603, 5, 26 823 — 2273 43801 666602, 3, 2, 26 899 2290 — 43853 666602, 3, 2, 26	283 925 — 227443867 ************************************	323 2293 — 43943 ••••••3••2, 3 799 — 2277 43951 •••••3••4 419 2294 — 43961 •••••393, 2• 673 — 2278 43963 •••••393
7	43669 43691 43711 43717	2268 43753 2269 43759 2270 43777 —— 43783 2271 43783	43787 43789 43793 43801 43853	2274 43867 	43943 43951 43961 43963
2"		2268 2269 2270 2271	2272 2273 2273	2275	2277
,2	989 839 931 2386	1   1   2	881 763 093 2289 823 899 2290	2201	2293
N	392 1005 463 1097 434 989 647 839 334 931		<b>H</b>	283 925 — 693 1187 2291 338 1221 — 807 1145 2292 600 1069	-
N	392 463 434 647 334	376 602 92 318 176	548 671 574 325	6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
Exponenten	2254 43411 000002, 2, 3002, 2, 463 1005 2007 2285 43441 000002, 2003, 2, 434, 989 2255 43441 000002, 202, 30, 30, 434, 931 2286 43451 000002, 20302	43487 00002, 3, 50 43487 00002, 305 43499 00002, 4002 43517 00002, 700	2256 43543 0000004003 2257 43573 0000003, 2000 43577 000003, 3, 20	2259 43591	2262 43627 ************************************
7	43411 43411 43427 43441 43451	43481 43481 43487 43499 43517	43541 43543 43573 43577 43579	43591 43597 43609 43609 43613	43627 43633 43649 43651
```	135	11111	2250	1 2   200	2262 2263 2264
,2	2272	2274 2275 2276 2277	2279	228   28	%   %

,					
×	691 655 765 701 619	335 457 633 671 847	727 515 571 757 655	693 619 219 529 511	333 493 653 475 447
N	540 284 481 504 376	179 337 268 199 324	130 130 209 367	377 28 206 361	216 249 127 127
Exponenten	0000303,3,2 0000303,30 0000303,200 0000304000	000030600 00004, 4020 00004, 302, 2 00004, 202, 3	00004, 2, 2, 2, 2 00004004, 2 00004003, 4 00040003	6000403000 600407 6005,3002	0005, 2, 5
Z	44753 44771 44773 44777	44797 44809 44819 44833	44851 44867 44879 44887 44893	44909 44917 44927 44939 44953	44959 44963 44971 44983 44987
1,2	2314	2315 2316 1 2317	2318	2321	1347 2324 2324 2324 1348 2325
,2	2336 2337 2338 2339	2340	2343	2345	. (4 (4
N	881 649 551 569	175 375 629 657 911	813 913 695 877 841	241 823 382 1005 464 605 333 853 146 625	963 817 927 763 773
×	8 2 4 4 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	8 1 4 4 6 7 9 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9	595 536 159 618 441		356 461 274 530 494
Exponenten	**************************************		**************************************	3, 2, 2, 3, 3	44699 •••••3•••, 3•• 44701 •••••3•••, 3•• 44711 ••••3•••2, 3•• 44741 ••••3••3, 3•• 44741 ••••3•2, 3••
2	44507 44519 44531 2305 44533 44537	44543 2306 44563 	2308 44617 2309 44623 	44647 44651 44657 44683 44687	44699 44711 44729 44741
1,2	1 3 3 1	1 1 3 1 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2	2308 2309 2310	2312	
,×	2320 2321 2322 2323	2325	2327	2329 2330 2331	2332 2333 2334 2335
N	507 1327 194 895 419 763 680 967 455 561	243 835 380 1003 517 897 442 579 168 641	367 535 377 581 80 511 658 1027 547 1303	596 1063 129 725 743 1179 312 361 531 647	1129 639 961 693 1015
N	1507 194 419 680 455	243 380 517 442 168	367 377 80 658	596 1 129 743 312 531	714 286 371 541 626
Exponenten	308 — 44207 90002, 2000004 2293 44221 90002, 20004 309 — 44249 90002, 2, 202, 20 44249 90002, 2, 202, 20	2295 44267 ************************************	2297 44283 0002005000 2298 44293 0002005000 44351 0002002, 6 44357 00020003000 2299 44371 0002000032, 2	2300 44383 999229995 2301 44389 99922992, 2992 44417 9992222, 69	2318 — 444483 = = = = 2303 44491 = = = 2303 44491 = = = 2303 44497 = = = = 2304 44497 = = = = 2304 44497 = = = = 2304 = = = = = = = = = = = = = = = = = = =
Z	14203 14207 14221 14249 14249	14263 14269 14269 14273 14273	14281 14293 14351 14357 14371	14381 14383 14389 14417 14419	14483 14491 14497 14501
,,2	22924 22934 229444	22   22   1 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	2298 2298 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	2300 4 2301 4 2302 4	1 3 33
,2	2308 1309	2312	5 5	131   31	2317

1 11	~~~~	23421	H 60 0 0 0	= 0.00 4.00	0 + 0 + =
*	725 875 875 395 877	390 1061 373 855 683 947 574 993 247 695	305 351 380 973 830 1147 271 1009 421 767	329 733 254 837 462 1103 353 515 220 411	249 401 599 611 751
12	451 80 509 63 642	390 373 683 574 247	300 380 000 171 421	64 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	2 2 4 4 4 4 4 6 4 6 4 6 4 6 4 6 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
Exponenten	2349 45589 902, 2040000 45599 902, 204, 5 2350 45613 902, 2030020 2351 45631 902, 2030 45641 902, 2020202	45659 902, 2020202 2352 45667 902, 202, 2, 3, 2 2353 45673 902, 202, 2020 45677 902, 202, 2020 2354 45691 902, 202, 402	2355 45597 es. 20066 45707 es. 2000002 45737 es. 2000002 2356 45751 es. 2000003 2357 45757 es. 2000000	2358 45763 802, 2002, 4, 2	2385 — 45827 002, 2008 2386 — 45827 002, 2, 5, 2, 2386 — 45833 002, 2, 4 402 — 2361 45841 002, 2, 2, 3030
2	45589 45599 45613 45631 45641	45659 45667 45673 45677 45677	45707 45707 45737 45751	45763 45767 45779 45817 45821	45823 45833 45833 45841 45853
",2	2349 2350 2351	2352 2353 2353	1355 1356 1356	2358	2360 
22	2376	2378	1 38 8 1	2382 2383 2384	2385
N	276 425 127 403 398 503 459 647 354 625	437 637 405 927 983	578 917 317 773 395 573 39 295 643 889	358 867 470 677 56 375 331 791 348 623	399 635 287 377 304 501 148 165 274 645
×	276 127 398 459 354	4.00,00		358 470 56 331 348	399 287 304 148
Exponenten	002, 30500 002, 305, 3 002, 303, 30 002, 303, 2, 20 002, 303, 300	002, 303, 5 002, 300, 3, 3 002, 300055 002, 30002, 20 002, 300002, 20	002, 3002, 200 002, 3003, 2, 2 002, 3004, 20 002, 3007	602, 3; 2002; 20 602, 3; 2003; 20 602, 3; 2005 62, 3; 3002; 20 62, 3; 3000	45541 002, 3, 4, 200 45553 002, 3, 5, 30 45557 002, 3, 500 45569 002, 208 45587 002, 20402, 2
Z	45317 45319 45329 45337 45341	45343 45361 45377 45389 45403	45413 45427 45433 45439 45481	45491 45497 45503 45523 45533	
,,2	2337	2339 2340	2342 2343 2344 2345	2346	2347
,z:	2363 2364 2365	2367	2368	2369 2370 2371	2373 2374 2375
N	71 317 289 469 58 111 99 151 200 321	32 197 87 219 23 401 14 551	423 573 521 393 307	569 549 321 747	529 377 585 607 389
×	289 289 58 200	116 32 187 123 214	332 241 376 140 167	130 336 424 49 289	306 421 350 137
Exponenten	6.2, 4 6.66 6.2, 9 6.2, 9	62, 7, 262 62, 6, 6 62, 565 62, 563, 3	62, 5 2003 62, 5, 2002, 2003, 5, 2003, 5, 402	2, 44, 3 2, 43, 20 2, 402, 3 62, 406 82, 406	2, 4, 2, 2, 4, 4, 6, 4, 4, 6, 7, 4, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7,
Z	45013 45053 45053 45061 45077	45083 45119 45121 45127 45131	45137 45139 45161 45179 45181	45191 45197 45233 45247 45259	45263 45281 45289 45293 45307
"2	2326	2329	1354 — 2331 1355 — 2332 1356 — 2332	1358 — 1358 — 1359 — 2333	2360 2361 2362 2362 2336
,2	2349	2351 2352 ——————————————————————————————————	2354 2355 2356	2357 2358 2359	2360 2361 2362

N	412 1005 512 743 219 707 557 945 695 983	426 971 495 1297 188 871 326 909 647 1049	509 673 711 309 183	465 721 837 671 863	697 775 1019 955 609
×	412 512 219 557 695	426 495 188 326 647	88 195 409 164	344 268 607 147 358	486 237 282 673 109
Exponenten	46457 essees, 2, 2 46457 essees, 2 2389 4647 essees, 4, 3 2390 46477 essees, 3, 2e 2391 46489 essees, 2, 2, 2e		475 2416 — 46559 002000305 833 — 2394 46567 0020004, 2, 3 883 — 2395 46573 0020004020 797 2417 — 46589 002000700 933 — 2396 46591 0020009	2418 — 46601 e0202, 5920 2419 — 46619 e0202, 4, 202 — 2397 46633 e0202, 30002 2398 46639 e0202, 3004 2420 — 46643 e0202, 3, 2, 2, 2	
2	46451 46457 46471 46477 46489	46499 46507 46511 46549	46559 46567 46573 46589 46589	46601 46619 46633 46639 46643	46649 46663 46679 46681 46687
"2		2392	2394 2395 2396	1397	2399 2400 2401
~22	1 1 1	929 2413 151 2414 905 2414 177 2415	833 — 797 2417 893 — 797 2417 933 — 933	637 2418 267 2419 777 — 603 — 1189 2420	517 2421 — 399 067 2422 — 2399 117 — 2400 855 — 2401
N	913 813 999 693 693	929 1151 905 1177	88 33 3 4 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	637 267 777 603 1189	517 1303 1067 1117 855
N	349 276 239 380 184	363 714 511 721 74	401 494 346 587	167 236 460 143 691	81 305 312 805 181
Exponenten	46171 00200300202 46181 002003, 2, 200 46183 002003, 2, 3, 3 46187 002003, 20002 46199 002003, 303	00200020000000000000000000000000000000	46273 002002, 2, 50 46279 002002, 2, 3, 3 46301 002002, 20300 46307 002002, 3, 3, 2 46309 002002, 3, 3, 2	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	2385 4649
7				46327 46337 46349 46381 46381	46399 46411 46439 46441 46447
,,2	2401 2374 2402 2375 2403 —	2376 2404 — 2377 — 2378 2405 — 2	2380 2406 — 2380 2407 — 2381	2382 2408 2409 1383 1383 2384	2385 2410 2386 2387 2388
,2		1 5 1 1 5	1407	1 8 6 1 1	1 %
N	903 1043 449 893 731	509 209 569 863 875	911 619 749 337 479	515 279 431 419 529	517 775 519 581 777
N	268 606 70 572 193	275 258 176 364 323	200 200 200 200 200 200 200	001 001 071 042 042	146 476 287 263 569
Exponenten	45863 002, 2, 202, 3 268 903 45869 002, 2, 200200 606 IO43 45887 002, 2, 2, 6 70 449 45893 002, 2, 2003000 572 893 45943 002, 2, 200300 193 73I	45949 602, 2, 2656 275 45953 602, 2, 3, 6 258 45951 602, 2, 3, 4, 3 176 45971 602, 2, 3, 202, 2, 364 45979 602, 2, 3, 2, 202, 323	002, 2, 3002000 002, 2, 4, 3000 002, 2, 4, 2002 002, 2, 5, 40	46061 ees, 2, 5e2ee 46073 ees, 2, 7, 2e 46091 eesee6es 46093 eesee6, 2e 46099 eesee5s2, 2	
7					46103 46133 46141 46147 46153
"2	363	2365 2365	2366 2367 2368	2369	2371
, s	2388 2388 2389	2391 2392 2393	23   13	3397	1 1 6 3 3 3

N	295 537 288 341 182 599 440 751 539 873	274 723 122 465 267 389 154 331 494 795	278 749 363 641 147 673 480 689 271 751	225 737 590 753 342 785 211 461 477 649	438 743 360 853 548 775 431 525 243 823
N	295 288 288 182 440 539	274 122 267 267 154	278 363 147 480 271	225 590 342 211 477	360 360 548 431
Exponenten	003, 300400 003, 3, 2, 50 003, 3, 2, 3, 3 003, 3, 2, 2, 200	603, 3, 3 60 62 603, 3, 4 63 603, 26, 2 603, 266, 2	47389 003, 203, 202 47407 003, 202, 300 47417 003, 202, 3, 20 47419 003, 202, 302	03, 20003, 3 03, 2000, 3, 2 03, 2, 2, 5, 2 03, 2, 2, 5, 2	47501 003, 2, 3, 200 438 743 47507 003, 2, 2, 203, 2 360 853 47513 003, 2, 20040 431 525 47527 003, 2, 2002, 3 243 823
Z	47293 47297 47303 47309 47317	47351 47351 47353 47353 47363		47431 47441 47459 47491 47497	
",2	2428	1   2437	457 428 	1459	2434
72	2450 2451 2452 ——————————————————————————————————	2453 2454 ——————————————————————————————————	2457 	1 2459	2462
N	749 671 247 555 395	529 263 291 181 211	343 329 257 419 537	493 391 721 559 575	489 731 823 627
X	464 485 207 214 308	221 176 176 58 51	0 4 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	287 273 446 164 351	316 309 521 136 189
Exponenten	437 — 46997 eeze4, zeeee 2413 47017 eeze4eeese 438 — 47051 eeze5, 5e 47051 eeze5, 2eez 47057 eeze5, 2eez	2415 47059 00205003, 2 440	003, 602, 2 003, 6, 2, 20 003, 504 003, 502, 3 003, 500002	003, 500200 003, 5, 3, 20 003, 4000000 003, 4, 2, 3	2448 — 47237 003, 30400 2423 47251 003, 30201, 2 2423 47259 003, 3000200 2449 — 47279 003, 300004 2424 47287 003, 300004
2	46997 47017 47041 47051 47057	2415 47059 1440 — 47087 1441 — 47111 1442 — 47111	2443 — 47123 2444 — 47129 — 2417 47137 — 2418 47143 2445 — 47147	2419 47149 2420 47161 446 — 47189 447 — 47207 2421 47221	47237 47251 47269 47279
1,22		1     1   2	1 2 2 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2419	2423
,2	2437 	1 \$ 4 4 1	24 1 1 2 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 2 2 1	21121
N	372 853 154 725 251 547 206 663 393 1063	116 625 722 1141 632 819 445 1077 265 963	989 511 731 809 589	463 607 725 647 831	550 897 210 689 637 1031 467 809 391 497
N	372 154 251 206 393	722 632 445 265	362 414 317 466 123	300 359 307 366 602	550 210 637 467 391
Exponenten	4423 — 46691 00202, 2, 2, 3, 2 372 4424 — 46703 00202, 2, 204 154 2402 46723 00202005, 2 251 4425 — 46727 00202004, 3 206 2403 46747 00202004, 3 206	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	2430 — 46811 essessesses 2430 — 46817 essesses 4 e 2431 — 46829 essesses 2431 — 46829 essesses 2407 46831 essesses	4432 — 46853 eeze3, 5ee- 2408 46861 eeze3, 4, 2e- 2409 46867 eeze3, 3e2, 2 4433 — 46889 eeze3, 2ee- 4434 — 46889 eeze3, 2ee-	2435 — 46901 eo2e3, 2, 2000 550 2436 — 46919 eo2e3003, 3 210 2411 46953 eo2e3000000 637 2411 46957 eo2e3020000 467 2412 46993 eo2e4, 2030 391
2	46691 46703 2402 46723 46727 2403 46747	46751 	46811 46817 46819 46829 46831	2408 46861 2409 46867 — 46877 — 46889	46901 46919 46933 46957 46993
12	1 6 1 5 1 5 1	1   1   2   2   2	1   2   2	1 2 5 1 1	1   2 2 2
12	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2427	24.30	2   1	1   3

	Exponenten	12	N	`%	22	7	Exponenten	N	N	72	72	Z	Exponenten	×	N
2	143		933		4504			173	799		2461	48073	2461 48073 00304, 2020	371	509
20203	90						47797	66 1003	200		2042	5/004	2402 400/9 66364, 2, 4	3	
003, 2, 3, 2002 307	40		3 2 2	<u>}  </u>	24524	7800		3 2	421		2464	2464 48109	003050200	2 2	400
	339			2476 -	:	7819	7	380	983	2489	Ī	48119		2	271
	0				_	0		,	260		7	10101		3	
2440 47500 003 2 404	87		240	24.78		47843		208	687		}	48131	964. 8. 2	7.4	157
	22.		_	- 7	4534	2453 47857	_	373	489	:	2466	2466 48157	••4, 5,	197	347
	105		331		4544	2454 47869	••3•••6••	161	357	1	2467	2467 48163		179	405
2442 47629 003005, 200 283	833		477	1	4554	2455 47881	••3•2, 4•2•	377	211	249 I	Ī	48179	004, 4, 2, 2, 2	208	Sor
47630 663664663 162	162		878	2470	1	7903	47903 00302, 3, 5	84	445	Ī	2468	2468 48187	004, 4, 302	191	445
:	170			1:	4564	2456 47911	00302, 202, 3	227	765	Ī	2469	18193	2469 48193 004, 3050	219	257
_	36		739	1	4574	2457 47917	00302, 200200	513		2492	Ì	48197	004, 303000	324	505
	333		<u>``</u>	480	1	7933	47933 00302, 2, 400	320	581	2493	Ì	48221	••4, 3••3••	306	545
	326		383	2481	1	47939	00302004, 2	270	299	2494		48239	964, 3, 264	96	45 I
47600 003002002.2 408	80		071	<u></u>	4584	2458 47947	00302002003	363	937	-	2470	2470 48247	004, 3, 303	125	471
	261	-	_	2482	1	7951		152	667	1	2471	2471 48259		165	359
47711 003002005 98	86		_	2483	1	47963	2	338	921	1	2472	2472 48271	004, 203, 4	107	457
•	133		_		1	6964	47969 0030202, 40	406	499	2495	-	48281	004, 202, 2, 20	448	633
8	572		206	1	4594	7977	2459 47977 00302020020	267	787	3496	1	48299	••4, 2000002	332	869
2447 47737 003002, 4, 20 401	ē		581	2485	1	7981	47981 0030202020	474	821	2497	1	18311	48311 004, 200203	176	655
	ૢૢૢૢૢૢૢ	-	_	2486	1	8017		410	521	Ī	2473	18313	2473 48313 004, 2003, 20	401	577
	4	4.	_	2487 -	1	8023		188		1	2474	2474 48337	004, 2, 20030	423	541
	Ì	# 1		2488	1	8029	•	342		2498	Ī	4834 I	004, 2, 200000	492	
244947779 663666663, 2 367	367	_	188		4004	6606	2400 46649 633332, 36	403	523	4499		40353	664, 2, 3, 46	290	305

×	439 389 341 241 309	401 319 411 357 243	419 247 201 233	265 299 177 309 215	161 237 167 197
N	139 3 3 1 1 1 3 3 1 1 1 1 1 3 1 1 1 1 1	0 4 4 6 4 4 6 4 6 4 4 6 4 6 4	20088 2 1 7 1 4 4 4 4 4 4 4	0 0 1 1 1 2 0 0 4 1 1 2 0 0 4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
-	A H H H H			##### 	
Exponenten	00503, 2000 00503, 2, 3 00504, 2, 2 00505, 20	ee6, 2, 2, 2, 2 ee6, 2, 3, 2e ee6ee2, 2ee	••6•3, 3• ••6•4•2 ••7, 4, 3	007, 3, 200 007, 202, 2 0070040 00700200	68, 2, 4 686666 68636 69, 46
2	48869 48871 48883 48889 48997	48947 48953 48973 48989 48991	49003 49009 49019 49031 49033	49037 49043 49057 49069 49081	49103 49109 49117 49121
72	2499 2500 2501	2503	2505	2508 2509 2510	2535 — 2535 — 2536 — 2513
`22	2526	2527 2528 2529	2530 2531	2532	2534 2535 2535
×	479 309 215 261 423	265 473 427 577 483	391 487 345 179	473 347 329 575	601 503 385 461
2	181 64 68 193 263	219 300 127 212 271	297 238 24 194	279 231 61 416 331	368 135 87 324
Exponenten	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	005, 3040 005, 30200 005, 302, 3	• 5, 2, 2 • 4 • 5, 2, 3 • • 65, 2, 4, 2 • 65, 2, 7 • 65, 2, 7	065003, 200 06500202, 2 06500002, 5 065000020	656620 6562, 2, 4 65620, 2, 4
7	48619 48623 48647 48649 48661	48673 48677 48679 48731 48733	48751 48757 48761 48767	48781 48787 48799 48809	48823 48823 48847 48857 48857
- - -	24   184 24   188 24   188 25   188 26   2487 2488 2489	2490	2492 2493 2494 2495	155	
-24	2516	25.18	2520	1   252	2524
×	485 169 495 577 557	537 763 337 583 727	461 441 667 811 483	613 447 739 677 573	659 555 559 433
N	198 293 162 395	304 468 286 133 512	82 359 195 308 370	239 104 250 323	272 199 327 338
Exponenten	004, 2, 4, 2, 2 004, 2, 8 004004, 20 004003003	04003, 300 04000, 2000 0400005 0400002, 4		0462, 3062 0462, 3, 4 0462, 2, 20 0462, 2, 20 0462, 2, 20	046203 2, 2 04620302 0463, 2, 20 0463003
Z	48371 48383 48397 48407 48409	48413 48437 48449 48463 48473	48479 48481 48487 48491 48497	48527 48527 48533 48533 48539	48563 48571 48589 48593
,,2	2475	11121	2478 2479	8       8	1513 — 2482 — 2483 1514 —
,2	2501 2501 1501	2505 2505 2505 2506	2509 2509	2512	2513

	90000	<b>ынони</b>	97000	91771	90719
N	1 247 3 309 4 307 5 433	2 263 7 659 3 721 4 595	25 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50	2 441 2 441 5 727 7 767 6 521	8 823 3 537 0 171 169
×	245 245 254 254	272 272 387 303 334	135 166 197 401	308 82 82 317 286	233 233 140
Exponenten	2,407,2 2,405000 2,404030 2,403040 2,403004	2, 403, 6 2, 402020 2, 40202, 200 2, 402002, 2	2, 402, 303 2, 402, 402 2, 402, 500 2, 4003020 2, 40003, 4	2, 40002, 2 2, 40002, 5 2, 400002, 3 2, 40002, 2, 2 2, 4000400	2, 4002, 2, 4 2, 4002, 3, 2 2, 4003, 3, 2 2, 4008
2	49667 2539 49669 2540 49681 — 49697 2541 49711	49727 49739 49741 49747	2544 49783 49787 2545 49789 2546 49801 2547 49807	49811 49823 49831 49843 49853	49871 49877 49891 49919
1,2	2539 2540 2541	2542	2545 2545 2546 2546	2548	2550
,2	2561 2562	2564 2564 2565	188	2567 2568 1569	2570 2571 2572
N	115 191 291 465 389	585 509 459 479 503	599 473 351 375 179	487 463 509 363 337	475 473 241 355
X	102 89 215 289 276	368 368	19 4 4 1 1 3 3 1 1 5 5 1 1 5 5	190 273 142 199 151	278 173 195 103
Exponenten	2, 5070 2, 506, 2 2, 504020 2, 50300000 2, 503, 2, 20	2, 5 0 2 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2, 5000202 2, 5003, 2, 2 2, 5004, 20 2, 5004, 20 2, 5, 2, 60	, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,	9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9
Z	49409 49411 49417 49429 49433	49451 49459 49463 49477 49481	49499 49523 49529 49531 49537	49547 49549 49559 49597 49603	49613 49627 49633 49639 49663
1,2	2550 — 2525 — 2526 — 2526 — 2527 2537	2552 2523 2553 2529 2554	2530	2532 2533 2533 2534	1560 2 1 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2535 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4 2555 4
,2			2555	2558 2559	8
N	109 73 103 143 139	146 201 36 163 125 161 53 195 70 193	215 301 299 169 107	275 389 411 439 353	427 399 371 257 229
N	4 4 8 6 9	146 36 125 70 70	173 173 15	269 120 170 170	179 110 261 54 175
Exponenten	910, 2, 2 2, 1100 2, 903 2, 902, 2 2, 9, 2, 20	8, 8900 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	2, 7-3, 3 2, 7, 2, 200 2, 7, 202 2, 7, 500 2, 7, 7	2, 662 20 2, 662 20 2, 6662, 20 2, 6662 2, 2 2, 6663 20 2, 6663 20	9, 6, 200, 200, 200, 200, 200, 200, 200,
2	49139 49157 49169 49171 49177	49193 49199 49201 49207 49211	49223 49253 49261 49277 49279	49397 49331 49333 49339	49363 49369 49391 49393
,,≈	2513	2515	2543	2546 2547 2520 2520 2520	2548 — 2523 2548 — 2533 2549 — 2534
72	253 2539 1 1 39	2540 2541 1	2543 2544 2545	2546	2548 2549

<u> </u>	34490	91196	44400	2000	2222
N	539 803 687 437 783	799 1061 699 863	989 907 907 531	857 739 755 755	347 607 795 369
N	398 298 389 371 239	626 107 403 148 526	189 613 335 98 449	253 244 203 276 89	121 245 268 888 488
Exponenten		663 — 55513 a, 3000003 2577 50527 a, 3000005 604 — 50543 a, 3000000 50543 a, 3000000 50549 a, 3000000	2579 50551 2, 30000303 2580 50581 2, 3002, 20000 2581 50587 2, 3002, 2, 202 50591 2, 3002, 2, 5 2582 50593 2, 30020040	2583 50599 2, 3002002, 3 25027 2, 3003, 4, 3 2584 50647 2, 30030003 50651 2, 30030202 2585 50671 2, 300404	2586 50683 2, 300662 2587 50707 2, 3, 2, 402, 2 50723 2, 3, 2, 303, 2 50741 2, 3, 2, 3, 20000 50753 2, 3, 2, 20000
2	2574 50451 a, 2575 50450 a, 2575 50497 a, 2576 50503 a,	50513 50527 50539 50543 50543	2579 2580 50581 2581 50587 2581 2, 2582 50587 2582 50593 3,	50599 2, 50627 2, 50647 2, 50651 2,	50683 50707 50723 50741 50753
z''	2574	2577	25.80 25.81 25.81	2583 2584 2585	2586 2587
""	2602	8     8		1 26 2	2609
×	365 271 97 269 579	561 509 831 711 419	521 623 517 601 753	719 921 785 751 749	631 883 797 461 511
N	88 337 337	2 1 2 3 3 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4	1111 256 161 474 533	247 247 547	143 370 352 134
Exponenten	2, 4, 50020 2, 4, 504 2, 305 2, 305, 5 2, 3040000	B, 304, B, B, B B, 304, 203 B, 303000000 B, 303000003 B, 303, B, 40	B, 303, 204 B, 303, 3, 2, 2 B, 30204, 3 B, 30202030 B, 30202030	2, 302002, 3000 2, 30200020 2, 3020020 2, 3020020 2, 302, 2, 2020	2, 302, 2, 2, 4, 2, 302, 302, 3002, 3002, 3002, 3002, 3002, 3002, 4, 3002, 3002, 403
2	50153 50159 50177 50207 50221	50227 50231 50261 50263	50287 50291 50311 50321 50329	50333 50341 50359 50359 50363	50383 50387 50411 50417 50423
,,2	3564	256     56	2567 2593 2568 1594 2569	2570	1597 1599 1599 1599
`12	2586 2587 2588 2589	2590	2593	2595 	. 4444
N	347 425 583 563 699	577 655 557 711 633	457 223 337 433 681	527 583 659 639	407 539 387 319 347
×	109 336 247 158	176 479 127 148 185	350 154 179	297 172 382 391	123 208 302 317 150
Exponenten	4, 4, 5, 30 2, 4, 3, 3030 3, 4, 3, 302, 3 4, 4, 3, 3003 4, 4, 4, 5	2, 4, 2003, 3 2, 4, 2002020 2, 4, 2003, 4 2, 4, 202, 2000 2, 4, 202, 2000	2, 4, 203, 30 2, 4, 207 2, 4, 3, 5, 2 2, 4, 3, 4000 2, 4, 3, 2000	2, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,	2, 4, 4, 3, 3 2, 4, 4, 2008 2, 4, 4003 2, 4, 4002, 2 2, 4, 5, 3, 2
2	49927 49937 49939 49943 49957	49991 49993 50021 50023	50033 50047 50051 50053 50069	50077 50087 50093 50101	50119 50123 50129 50131
۲,۲	2552	1575 — 2555 — 2556 1576 — 2557	2558	2560 2561	1583 1584 1585 1585
۲,	2573	2575	2577	2580 2581 2581	2583 2584 2585

,2	1,2	Z	Exponenten	N	N	122	,,2	2	Exponenten	N	N	,2	,,2	2	Exponenten	N	N
2612	2588 2589 1589 2590	50767 50773 50777 50789 50821	258 50767 2, 3, 2, 202, 4 2589 50773 2, 3, 2, 2000000 507777 2, 3, 2, 2002, 20 50789 2, 3, 2, 2, 2, 2000 2590 50821 2, 3, 2004000	149 635 I 580 548 397	651 027 823 869 615	52   52	1 6 6 9	51047 51059 51061 51071 51109	2, 3, 302, 2, 3 2, 3, 303, 2, 2 2, 3, 303000 2, 3, 307	190 300 300 400 400	671 625 655 233 647	2635	2615 2616 2616	51341 51343 51347 51349 51361	51341 2, 20303, 200 51343  2, 20303, 4 51347  3, 2030202, 2 51349  2, 203020000 51361  2, 2030004	408 125 342 559 427	691 533 809 901 519
2614 2615	2591 2593 2593	50833 2, 50839 2, 50849 2, 50857 2,	3, 2002030 3, 2002003 3, 2000040 3, 2000020	521 241 466 691 388	661 863 567 955	1   2627	9 9 9	51131 51133 51137 51151	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	178 215 192 81	497 393 229 361 537	2637 2638 2639 2640	9 8 9 9	51383 2, 2030 51407 2, 203, 51413 2, 203, 51419 2, 203, 51421 2, 203,	51383 2, 2030203 51407 2, 203, 2, 4 51413 2, 203, 200000 51419 2, 203, 20202 51421 2, 203, 20300	110 144 602 314 399	781 635 975 857 713
2616	1   5   5	50873 2, 50891 2, 50893 2, 50909 2,	0, 200, 200, 200, 200, 200, 200, 200, 2	512 356 503 402 301	737 921 859 719 795	2629	2607 2608 2609	51169 51193 51197 51199 51203	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	183 123 72 7 68	183 227 123 181 72 137 7 79 68 143	\$   \$ \$ E	619	2619 514272, 203, 514312, 203, 2620 514392, 203, 514492, 203,	2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	1981 196 418 1111	647 673 725 529 437
2619 2620 2621	39,	50929 2, 50951 2, 50957 2, 50969 2,	6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	347 320 320 320 320	455 389 541 601	2631	2611	51217 51229 51239 51241 51257	2, 26630 2, 266, 30 2, 2656, 3 2, 26562, 3 2, 2656020	9 9 H B B B B B B B B B B B B B B B B B	263 343 449 489 421	2645	2621	51461: 51473: 51481: 51487:	514512, 202055000 514732, 20203030 514792, 2020303 2521 514812, 20203, 2, 20 2622 514872, 20203, 5	324 466 220 537 97	499 589 783 757 511
2622	2598 2599 2600	2598 50989 2, 3, 250989 2, 3, 3, 2509 51001 2, 3, 3, 2600 51031 2, 3, 3, 2601 51043 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	3, 200200 3, 2, 2, 30 3, 2, 3, 20 300003 300, 3, 2	440 417 219 279		2633		51263 51283 51287 51307 51329	2, 205, 6 2, 2040002, 2 3, 204, 20003 2, 204, 20002 2, 203060	2 2 2 4 2 4 2 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5	247 711 671 749 257	2647 2623 2648 2649	2623	51503 51511 51517 51521 51539	2623 51511 2, 20202, 203 2624 51517 2, 20202, 400 2524 51517 2, 20200, 400 51521 2, 202000, 20 51539 2, 20200000, 2	168 239 400 400 400	168 769 239 885 381 691 400 471 490 1167

	068 683 815 533	N O O N H	689 579 517 127 409	491 479 561 785 359	559 841 817 511 731
*		8 555 8 11 679			i i
l×	523 184 576 98	361 471 232 433 500	189 323 371 12	349 272 248 301 306	253 494 576 417 538
uə	8 m m m m	, a a		, , , ,	304, 2 302, 200 3002, 20 3, 2, 40 203020
nen	4 6 4 4 4	4 6 4	0,0	5, 2, 2 5, 3 4, 3, 2 4, 3, 2 4, 6, 2 3, 5	3, 20
Exponenten				લુલુલુલુ લુલુલુલુલુ	લુલુલુલુલુ તુલુલુલુલુ
	4,4,4,4,4	44444	<u> </u>	તિલિલિલિ જિલિલિલિ	4,4,4,4,4
2	2651 52069 2, 200202, 2002 2652 52081 2, 200203, 30 ————————————————————————————————————	2653 52147 3, 200302, 3, 2 2654 52153 3, 200303, 30 2655 52177 3, 2004, 4, 2 2655 52187 3, 20040030	2656 52183 a, 20040003 2657 52189 a, 20040300 2658 52201 a, 2005002 52223 a, 2001 2659 5223 a, 2001	2660 52249 2, 2, 5, 3, 2 	52291 2, 2, 3, 304, 2 52301 2, 2, 3, 302, 200 52313 2, 2, 3, 302, 20 52321 2, 2, 3, 3, 4, 40 52361 2, 2, 2, 203020
1,2	2651 2652	2653   2654   2655	2656 2657 2658 2659	8     8	2663
72	033 945 995 369 2675 005 2675	2677 2678	1 20 1 1	268 268 268 268 268	
N		493 1167 574 1017 131 705 798 1303 374 1041	355 791 741 1015 722 1027 622 989 541 939	427 563 637 859 1031	685 1117 327 907 499 1189 733 1041 394 905
N	745 388 607 50 593		355 741 722 622 541	198 365 470 241 747	685 327 499 733 394
Exponenten	2636 51817 2, 20002, 3, 2, 2 51827 2, 20002, 3, 2, 2 2637 51829 2, 20002, 3000 51839 2, 20002, 7	2639 51859 2, 200002020, 3 2640 51871 2, 2000002, 5 — 51893 2, 20000020000000000000000000000000000	2641 51907 2, 200002, 4, 2 2642 51913 2, 200002, 2020 — 51929 2, 2000202, 20 51941 2, 200003, 2000 2643 51949 2, 200003, 2000	2671 — \$1971 2, 2002, 6, 2 2672 — \$19773, 2002, 5000 2672 — \$19772, 2002, 4020 — \$2645 \$1991 2, 2002, 3003 2646 \$2000 2, 2002, 20020	2647 52027 2, 2002, 3, 2000 2648 52027 2, 2002, 3, 302 2649 52057 2, 20020002, 2 2650 52057 2, 20020002, 2 1673 — 52067 2, 2002002, 2
	20000	00 100	<u> </u>	0 0 0 0 0	17177
7	8 8 8 8 8	8 8 8 8 8 8	5 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	5 2 2 0 0 2 2 0 0 2 2 0 0 0 2 2 0 0 0 0
",2	2636 2637 2638	1 6 3	2641 2669 2670 2670	2645 2645	2647 2649 2673 2673
<b>*</b> 2	2664	266 2667 2688		2671	
N	438 1153 457 663 296 547 552 751	661 943 853 801 1057	927 773 479 619	759 183 397 485	226 835 521 747 445 1147 802 1297 426 1159
N	116 438 457 296 552	154 263 481 173 647	40 E & & & & & & & & & & & & & & & & & &	287 164 126 359 378	2 2 4 8 4 8 4 8 4 8 4 8 8 4 8 8 8 8 8 8
Exponenten		2626 51607 2, 202, 3, 3, 4 2627 51607 2, 202, 3, 200 2627 51613 2, 202, 3, 300 2628 51631 2, 202, 20004 2629 51637 2, 202, 2020000	51647 2, 202, 206 51659 2, 202, 3, 2002 2630 51673 2, 202, 302, 20 2631 51679 2, 202, 305 51683 2, 202, 4, 3, 2	2632 51691 2, 202, 4002 — 51713 2, 20006, 3 2633 51721 2, 2005020 — 51749 2, 2005020	51767 2, 20003, 203 2634 51769 2, 20003, 3, 20 2635 51787 2, 2000202000 51797 2, 2000200000 51803 3, 200020000
2	5155 5156 5157 5158 5158	5159 5160; 5161; 5163; 5163;	5164 5167 5167 5168	5169 5171; 5171; 5172; 5174	
72	2625	2626 2627 2628 2629	8 8	2632 2633	2634 2635 ——
2	2650 2651 2651 2653	2654	2655 2656 ——————————————————————————————	2658 2659 2669	2661 2662 2663

×	759 825 703 625 647	591 531 531 563	627 605 723 853 429	689 689 667 417 341	425 553 467 541
2	554 227 393 271 188	3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	169 188 424 727	331 434 385 184 184	312 204 263 391
Exponenten	2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	52973 2, 2, 3636266 52981 2, 2, 3646666 52999 2, 2, 4, 5, 3 53003 2, 2, 4, 4662 53017 2, 2, 4, 3, 2, 26	53047 2, 2, 4, 2, 203 53051 2, 2, 4, 2, 302 53059 2, 2, 4002, 200 53077 2, 2, 4000	6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	53129 2, 2, 5, 3020 53147 2, 2, 5, 2, 202 53149 2, 2, 5, 2, 300 53161 2, 2, 5000020
Z	52937 52951 52957 52963 52963	52973 2, 2, 52999 2, 2, 53003 2, 2, 2, 53017 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,		53089 53093 p, p, 53101 p, p, 53117 p, p, 53117 p, p,	
"2	2686 2687 2688	2699 2699 2691	1 26   1 26	2695 1696 1696	1   269
,2	2714	2717	2718 2719 2720	2721	2723
×	831 395 875 749 691	611 405 439 279 501	669 421 589 677 867	699 877 597 463 595	895 983 883
×	298 332 366 526 434	177 308 114 148	4 8 4 8 9 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	55 24 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	378 578 622 261
Exponenten	52657 2, 2, 2020302 52653 2, 203, 50 52691 2, 2, 203002, 2 52697 2, 2, 20302, 20 52709 2, 2, 204, 2000	2677 52711 2. 2. 204, 2, 3 52727 2. 205, 30 52727 2. 20503 52737 3. 2. 2070 52737 3. 2. 2070 2678 52747 2. 3, 5002	252757 2, 2, 3, 40000 252769 2, 2, 3, 3040 2679 52783 2, 2, 3, 3004 2680 52807 2, 2, 3, 203, 3	2682 528372, 2, 3, 200030 2682 528372, 2, 3, 2, 2, 2000 52859, 2, 3, 3, 402 2683 52861, 2, 2, 3, 2, 500 2684 52879, 2, 2, 3, 2, 500	52883 2, 2, 300208, 2 520889 2, 2, 3000, 2, 20 520012, 8, 30002000 2688 52903 2, 2, 300002, 3
Z	52667 2, 2, 52673 2, 2, 52691 2, 2, 52697 2, 2,	52711 2. 2, 52721 2, 2, 52727 2, 2, 52733 2, 2, 52747 2, 2,	52757 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	52817 2, 3, 2682 52837 2, 3, 2683 52859 2, 2, 2684 52879 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	52883 52889 52901 52903
","	11111	2677	2679 2680 2681	2683	8
<b>'</b> N	2698 2699 2700 2701 2702	2704	2706	27.08	2710
N	883 719 1011 917 987	775 879 809 619 977	549 1057 791 733 479	1009 905 1147 1193 939	985 339 993 947
N	345 567 374 403 292	553 553 457 667	104 612 404 75	738 709 317 438 409	288 293 203 264
Exponenten	2, 2, 2, 203002 2, 2, 2, 202003 2, 2, 2, 202, 202 3, 2, 2, 20003, 2, 203 2, 2, 2, 20003, 2, 403 2, 2, 2, 20003, 3, 292	2667 52453 2, 2, 2, 2, 20030 606 553 2, 2, 2, 2, 3, 2000 553 2668 52489 2, 2, 2004020 457 2669 52501 2, 2, 200300000 607	52511 2, 2, 2003, 5 104 549 552517 2, 2, 2002, 200 670 1057 52529 2, 2, 2002, 400 404 733 52543 2, 2, 2002, 6 75 479	2671 52551 2, 2, 200002020 738 1009 2671 52561 2, 2, 20000003 709 905 2672 52567 2, 2, 200000003 317 1147 52571 2, 2, 20000020 438 1193 2673 52579 2, 2, 20000020 438 193	2674 5263 2, 2, 20002, 2, 3 288 2675 52627 2, 2, 202, 200, 2419 5263 25631 2, 2, 202, 2003 264
2	52363 52369 52379 52387 52391	52433 52453 52457 52489 52501	52511 52517 	2671 52553 2672 52567 2673 52567 2673 52571	52583 52609 52627 52631
"2	2664 2665 2666	2667 2668 2669	200	2671	2674
,,	2686	2689	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	1 1 2 2 2	2696 1696

= 22	Z	Exponenten	N	N	`22	1,2	Z	Exponenten	X		72	ž.;	2	Exponenten	2	N
	2699 53173 53189	2, 2, 5,20000	337	551 367	2736	177	53453	2714 53479 2004, 3, 2, 200	426	727	2749	2726	53731	2003, 4, 3, 2	249 18	575 167
0 -	- 2700 53197 1727 - 53201	2, 2, 6, 2, 200		409	2737	2715	2715 53503	2004, 8	156	189	2750	2727	53773	200205, 200	327	551
	53231	2, 2, 704		205	Ï	1216	2716 53527	200303003	197	701	2751		53783	200204003	188	299
2701		2, 2, 8, 30	131 173	173	2738	Ï	53549	53549 20030200200	540	929	Ī	2728	53791	2728 53791 200204, 5	85	443
729	53239	2, 2, 803	1247	183		2717	53551 53569	2717 53551 200302004 2718 53569 200300050	151 361	691 425	2752		53813 53819	200203, 20000	590 286	1961
2703	53269	2007, 5	38	329	2739	2719	53591 53593	53591 2003000003 53593 20030002, 20	274 653	991	2754	11	53831 53849	20020203, 3 200202002, 20	250 714	250 817 714 1013
2704			185	223		1	53597	53597 2003000300	484	863	1 8	2729	2729 53857	200202, 2, 40	513	513 629
ξ   ̈́		2006, 400			1	1720	53611	2720 53611 20030020002	397	397 1045	े ।	2730	53881	, 4, 6	477	169
2700	53323	2005020	9 4 7	509 409		2721	53623	53623 200300303	187	707	2757	2731	53887 53891	2731 53887 200202,7 53891 2002005,2	276	301
2707	53353	2005, 20020	389	539	2742	2723	<b>5362</b> 9 53633	200300500	269 264	497 305	2758	2732	53897 53899	20020003020	632	632 859 405 1037
2709		2004060	191	219	2743 —			2003, 2, 4, 3	182 587	587	11	2733	53917	• 4	565 1001 467 1063	1001
2710		200402, 2, 20		637	2744	Ï	53657	2003, 2, 2, 2, 2	582	823	2759	1	53927		338	1143
2734	53407	2004003, 2	288	423 655	2745	11	53681 53693	2003, 202, 30	536 336	695 613	2760		53939	53939 20020002, 2, 2 498 1205 53951 200200006 80 529	<b>498</b>	529
2712 - 2713	53419	2004000002		887 515	2747		53699	53717 2003, 3, 4, 2	254 562	567 911	2762	2735	53959	53959 2002002, 3, 3 53987 2002003, 3, 2	271 364	893 839
2735	53441	2004, 2, 50	278	329	Ï	1725	53719	2725 53719 2003, 30003	213	775	2763		53993	53993 20020030020	648	106

",2	7	Exponenten	2	×	,2	,,2	2	Exponenten $\overline{N}$	X	N		Z , z , z	7	Exponenten	N	N
	54001	2736.54001 2002004, 30	457	599	2774	122	54323	2774 —— 54323 20004, 2, 2, 2	326	785		2962	54547	2762 54547 200000302, 2	437 1031	1031
	54013	2737 54013 200200600					54347	٠, ١	394		2788		54563		458	
	54049	2739 54049 2002, 2, 2040		605	Ï	2753	54367		107	595	2789	<u> </u>	54581	2789 — 54581 2000002, 2, 3	814	1327
	54059	54059 2002, 2, 200002	468	468 1223 2776		1	54371	54371 200003, 2, 3, 2	368	843	1	1765	54583	2765 54583 2000002, 203	301	301 1115
	54083	1766 — 54083 2002, 2004, 2 2740 54001 2002, 2002002	344	344 763 2777	2777		54377	200003, 20020	676			2766	54601	2766 54601 20000000000	877 1199	1199
	54101	54101 2002, 2000000	820	820 1327	<u>} </u>	2754	54403		269	58.5	2791		54623	54623 200000005 I44 809	1 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	809
<del>-</del>	17140	2/41/241/242, 20242	/2/	727		2755	54409		610		2792		54029		830	1317
9 6	54133	2742 54133 2002, 2030000 2743 54130 2002, 20402	577	7007	2779		54413	54413 20000203, 200	572	572 969	6	2767	54631	2767 54631 20000002, 2, 3	343	343 1173
- 3-	54151	2744 54151 2002, 3, 4, 3	189	611		1756	54421		781		3	1768	54667	"	424	1095
	54163	2745 54163 2002, 3, 202, 2	391	927	2781	Ī	54437	54437 200020002000 802 1267	802	1267	Ï	1769	54673		689	689 875
<u> </u>	54167	54167 2002, 3, 2003	246	883	2782	Ī	54443	54443 200022000002 546 1429	546	1429	1	2770	54679		317	1137
<u></u>	54181	2746 54181 2002, 3002000	619		2783	Ť	54449	54449 20002002, 30	708	917	1	1273	54709	2771 54709 200002020000	773	773 1263
÷	54193	2747 54193 2002, 302, 30	531	689	Ï	2757	54469	<b>2757 54469 200002, 2, 3000 635</b>	635		2794	Ī	54713	3, 20	642	925
2748	54217	2748 54217 2002, 4, 2020	495		1 8	2758	54493	•	54 I	967		2772	54721		401	477
	54269	54269,2002,800	122	231	<u> </u>	27.50	54400	2750 54400 20002, 3, 4	494	8 7 3		1773	34727	2773 54727 200003, 3, 3	0 4 9	561
	.4277	2740 54277 20007	116	333	27.86		200		3	2 0	,				, ,	, ,
<u> </u>	54287	54287 20006, 4	86	357	<u> </u>	2760	54517		515	847	2790		54773	:	396	553 653
	54293	54293 200050000	404		2786	Ī	5452I		400	583	2797	Ī	54779	ũ	160	459
	54311	54311 2000402, 3	206	5,	2787	<u> </u>	54539		348		Ï	1775	54787	"	155	331
<del>;</del>	54319	2750 54319 20004004	133	905	Ï	2761	54541	2761 54541 2000004, 200	505	853	Ï	122	24799	<b>2776 54799 2002, 5, 4</b>	113	473

N	651 635 563 625	989 407 879 871 731	661 483 881 1019 1011	811 749 941 887	1125 1063 779 917 679
×	191 132 132 493	574 62 515 240 526	170 170 327 646	565 198 198 695	13111 165 165 1468
Exponenten	202, 4, 2, 2, 3, 2 202, 4, 3, 2, 2 202, 303, 4 202, 3020, 3	202, 30000200 574 202, 3006 62 202, 3, 2, 200 515 202, 3, 30020 526	202, 3, 4000 402 661 202, 3, 502 170 483 202, 202, 202 327 881 202, 2022000 646 1019 202, 202, 2, 2, 2, 419 1011	202, 202, 3, 20 565 202, 20004, 2 338 202, 2000300 603 202, 20002, 4 192 202, 2000030 605	202, 20020200 311 1125 202, 20020200 614 1063 202, 200204 165 779 202, 2003, 2, 2, 376, 917 202, 2004, 20, 468, 679
Z	55399 554 i i 55439 5544 i 55457	55469 55487 55501 5551 5551	55541 55547 55579 55589 555603	55609 55619 55621 55631 55633	55639 55661 55663 55667 5567
÷.	2802 2803 1804	1   805	2806	2809	2811
. 15	2823	28 2 8 2 5 2 8 2 7 2 8 2 7 2 8 2 7 2 8 2 7 2 8 2 8	2829 2830 2831	2833	
×	536 837 272 977 272 985 383 1009 214 605	423 455 709 799 553	725 625 445 559	223 287 443 537 529	623 505 505 691
8		193 373 209 463 426	200 200 200 200 200 200 200 200 200 200	77 228 196 341	239 137 137 105 105
Exponenten	20003003 200030003 2000300003 20003000003	20004, 5, 2 20004004, 20004002, 3 2000400202	20004040 20004040 20005, 2002 20005030	200 800 200 200 200 200 200 200 200 200	202, 500022 202, 5004 202, 5, 203 202, 402, 200 202, 4000000
7	55117 55117 55127 55147 55163	55201 55201 55207 55213 55217	55219 55229 55243 55249 55249	55313 55331 55331 55333 55333	55339 55343 55351 55373 55373
12	2812 2813 2813 2814 2814	2790 2791 2792 2793	2794 2795 2796	2797	2799 2821
`12	2813	2815	2816	28 19 28 19 28 20	2821
×	999 723 739 1323 989	655 763 787 737 1003	803 1269 208 961 445 811 345 769 266 877	993 569 901 583 707	591 905 541 863
×	334 334 818 555	534 229 566	803 208 445 345	698 461 519 430 477	2 4 4 6 7 8 4 6 7 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
Exponenten	2777 54829 20002, 300200 54833 20002, 3, 2, 3 54881 20002, 204, 2 54869 20002, 2000000 2778 54877 20002, 200300	2779 54007 20002, 2, 402 2780 54017 2000204000 2780 54019 20002004, 3 	2781 54949 2000200004 2782 54973 200020004 2783 54979 20002004, 2 2783 54979 2000202, 4, 2	2784, 55001 200020222, 20 2785, 55031 2000203920 55049 20003, 4020 2786, 55051 20003, 4020	55057 30003, 3030 55061 20003, 30000 55073 20003, 2040 55079 20003, 202, 3
Z	54839 54833 54851 54869 54877	54881 54907 54917 54919 54941	54949 54959 54973 54979 54983	55001 55009 55021 55049	55057 55061 55073 55079
',2	2777	2779	2781 2782 2783	2784 2785 1786	2787
-22	2798 2799 2800	2801 2803	28°5 18°5 18°5	2806 1807	2808 2809 2810

N	607 577 629 911 673	643 553 731 679 559	329 367 547 467 503	293 661 603 451 559	703 537 579 859 787
N	391 134 495 528 145	446 167 282 397 211	85 218 163 362 351	484 473 368 119	429 191 374 363 557
Exponenten	20203, 4000 20203, 3, 4 20203, 2030 20203, 2030 20203, 2030 20203, 2030	20204, 3, 3 20204, 3, 3 20204, 2002 20204, 2, 200 20205, 2002	203, 6, 200 203, 402, 3 203, 4, 2, 30 203, 4, 3, 20	2 3, 4, 6 2 3, 3 2 2 2 2 3, 3 2 2 3 2 3, 3, 2, 4 2 3, 3, 2 4	203, 3, 3000 203, 3, 402 203, 20400 203, 2020, 2
2	56197 56207 56209 56237 56239	56249 56263 56267 56269 56299	56311 56333 56359 56369 56369	56383 56393 56401 56417 56431	56437 56443 56453 56467 56467
"2	1864 - 2836 1865 - 2838	2839 2840 2841	1868 1868 1869 1844 1844	2845 2846 2847	2848 2849 
,2	2865 1865	2866	1869 1869	2870	1   2872
N	713 811 743 577 983	689 1193 809 771 989	853 883 785 625	767 849 1021 759 871	325 721 773 1251 265 907 418 1101 347 847
N	547 215 264 313 580	128 689 493 1193 444 809 346 771 722 989	248 635 477 494 232	434 374 647 587 314	325 721 773 1251 265 907 418 1101 347 847
Exponenten	2824 55921 202002, 3, 30 2825 55927 202002, 303 2826 55931 202002, 402 2826 55933 202002, 500 55949 2020003, 200	55967 20200002, 2, 2 55987 202000002, 2, 2 55997 20200000400 56003 2020002, 4, 2 56009 2020002, 2020	2828 56041 2020003, 2, 3 2829 56053 202004000 56081 20202, 3030	26093 2222, 3, 300 2830, 56101 2222, 20220 2831, 56113 2022, 2, 2, 30 56123 2022, 2, 2, 30	2832 56131 20202004, 2 2833 561649 20202000 2834 56167 2020202, 2, 3 56171 202020202 2835 56179 2020203, 2, 2
2	55921 55927 55931 55933 55949		56039 56041 56053 56081 56081	56093 56099 56101 56113 56123	56131 56149 56167 56171 56179
,,2	2824 2825 2826	1	2828 2829	183,	2833 2833 1835
,2	2851	2853 2854 2855 2855	2857 2858 2859	2861 2861 2862	1863
N	295 341 360 923 582 739 111 601 685 1083	1037 1075 913 767 431	469 179 413 481 587	443 791 647 745 881	68 427 672 857 721 1023 536 955 117 653
N	295 360 582 111	388 390 390 390	122 19 269 356 231	106 492 367 329 639	68 672 721 536 117
Exponenten	200 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	202, 2, 2000020 750 1037 202, 2, 2020000 658 1075 202, 2, 3002, 2 382 913 202, 2, 40002 290 767 202, 2, 5, 30 328 431	2816 55807 202, 2, 503 2817 55813 20206000 2817 55813 20206000 2818 55819 20200500	202005, 4 202004, 30 202004, 30 202003, 2	2822 55897 202020030 2822 55897 202020030 55901 2020200300 2823 55903 202002003
7	2813 55681 55691 2814 55711 2815 55717	55721 55733 55763 55787 55787	2816 55807 2817 55813 2817 55813 2818 55819	2819 55829 2819 55837 2820 55843 2821 55849	55871 55889 55897 55901 55903
,,2	2813	11111	2816 2817 2818	2819	1823
<b>`</b> ??	2837	2839 2840 2840 1482 2448 2443	28     84	2846	2848 1849 1850

```	:2	7	Exponenten	>, 	N;	72	·	7	Exponenten	N	N.	122	,,z	Z	Exponenten	Ŋ	۲,
2873	1853	56477 56479 56489 56501 56503	203, 202, 300 203, 202, 5 203, 20020 203, 20020 203, 20020 203, 20020	424 97 668 596 219	751 521 923 973 815		2864 2865 2866 2867	56713 56731 56737 56747 56767	56713 20302, 3020 56731 20302, 2, 202 56737 203020040 56747 203020002 56767 2030200	471 315 382 53	641 853 513 1001 357	2895 1 8997 1 8997	2879	56951 56957 56963 56983 56989	204, 2, 303 204, 2, 500 204, 2, 500 204, 2, 500 204, 205, 2 204, 200 204, 300	138 200 172 189 347	521 369 375 677 615
1876	2855 2855	56509 56519 56527 56531 56533	203, 2004 203, 2, 2, 3, 3 203, 2, 2, 2, 4 203, 2, 2002, 2 203, 2, 2002, 2	341 208 147 380 613	621 685 649 907 993	1 8887	2868 2869 1870	56773 56779 56783 56807 56809	2003 2003 2003 2003 2003 2003 2003 2003	399 293 120 148	625 759 533 511 525	29001	881	56993 56999 57037 57041 57047	2044 2044 2044 2044 2044 2044 2044 2044	364 206 387 404 178	443 697 661 517 647
2878 2879 1880	2857	56543 56569 56591 56597 56599	203, 2, 205 203, 2, 5, 20 203004, 4 20300300000	86 297 114 520 203	491 433 481 837 723	8     8   8     8	2871	56813 56821 56827 56843 56857	203364220 20336520 204,502 204,4,2,20	310 271 109 160 323	539 447 313 407 455	9 9 9 1	2882	57059 57073 57077 57089 57097	20404, 3, 2 20404, 30 205, 70 205, 4020	312 263 280 122	489 345 461 139 335
18882	2859 2860 1861		2030023, 2 203002, 3, 20 203002, 3, 20 20300002, 2	331 587 498 437	331 751 587 957 498 715 437 1041 270 977	2891 2892 2893 2894	1874	56873 56891 56893 56897 56999	204, 3002 204, 3, 302 204, 3, 400 204, 205 204, 205, 200	4 0 1 0 4 0 0 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	593 537 433 301 695	2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2		57107 57119 57131 57131	2005, 3002, 2 2005, 3, 55 2005, 200000 2005, 2, 2, 2, 2	12 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	463 287 617 529 475
2883 2884 2885 2885 2885	2862 1863	56671 56681 56687 56701 56711	203000005 203000200 203000204 203000500 20300,4,3	103 632 142 259 170	579 877 671 479 549	8	2875 2876 2877 2878	56911 56921 56923 56929 56941	56911 204, 202, 4 56921 204, 2002, 20 56923 204, 20020 56929 204, 2, 2, 40 56941 204, 3, 2020	121 470 273 335 397	529 667 743 411 687	2911	1   3885	57149 57163 57173 57179 57191	205, 2, 400 205002002 205002002 20500202 20502, 2, 3	2 2 2 2 3 2 3 3 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 6 6 6 6 6 6	367 581 641 567 567

,2	,,2	Z	Exponenten	N	N	12	,,2	7	Exponenten	×	N	,≈	1,2	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2914 — 2886 — 2915 — 2887 — 2887		57193 57203 57221 57221	205.20 205.3, 2, 2 206, 400 206, 4, 3	345 174 186 83	479 425 289 269	2925 2925 2926 1926		57487 57493 57503 57527	3, 563, 4	327 327 124 124	311 527 289 461	1937	2913 2914 2915	57751 57773 57781 57781	3, 4, 2, 2003 3, 4, 200200 3, 4, 202000 3, 4, 20302	410 423 197	613 707 691 549
2916 1889 2917 2890	88   88   88   88   88   88   88   8	57251 57259 57259 57269 57271	2 2 6 6 6 9 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2		347 459 399 333	2927 2903 2928 2929 2929		57557 57559 57571 57587 57587	3, 5, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	360 137 169 150		2940 1940 1940 1950			57793 3, 4, 3, 2002 57803 3, 4, 3, 2002 57809 3, 4, 3, 2002 57829 3, 4, 4, 2000 57839 3, 4, 404	236 236 346 301 68	
2918 2919 2920 2920		57287 57301 57329 57331	207, 3, 3 207 209, 30 209, 2, 2 3, II, 2	72 199 90 61 34	239 323 119 151 71	293   293	2905	57601 57637 57641 57649 57653	3, 4070 3, 402000 3, 402000 3, 402, 2, 30	125 395 440 363 408	141 623 607 469 665	2942	2918	57847 57853 57859 57881 57899	57847 3, 4, 503 57853 3, 4, 700 57859 3, 307, 2 57881 3, 304, 2, 20 57899 3, 30300002	81 107 101 336 284	311 201 215 473 741
1	2895 2895 1895 1896	57349 57367 57373 57383 57389	3, 10, 60, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 8	65 99 53 187 103 181 72 241 166 285	99 187 181 241		2908 2909 2910	57667 57679 57689 57697 57709	3, 4 6 6 4, 2 3, 4 6 6 2, 4 3, 4 6 6 2, 2 3, 4 6 2, 4 6 3, 4 6 2 6 2 6	200 110 100 325 333	463 521 653 399 663	2945	2944	57901 57917 57923 57943 57947	57901 3,3939229 57917 3,393,49 57923 3,39294,2 57943 3,3929993 57947 3,3929922	395 258 232 219 304	679 467 513 791
2923 2923 2898 2924		57397 57413 57427 57457 57467	3, 7, 2000 3, 60300 3, 6002, 2 3, 6, 3, 30 3, 6, 402	185 192 167 199 98	301 299 397 259 275	2933 —— 2934 —— 2935 —— 2936 ——		2933 — 57713 2934 — 57719 2935 — 57737 2936 — 57737	3,4003,30 3,4003 3,4007 3,4,2,5,2 3,4,2,302	338 132 29 158 358	441 499 219 345 487	2947	2923	57973 57977 57991 58013 58027	57973 3, 302, 4, 20 57977 3, 300, 4, 20 57991 3, 30004, 3 58013 3, 300000000000000000000000000000000		435 713 350 507 167 537 416 737 403 1055

N N	623 1017 219 721 529 903 401 957 536 745	327 863 408 671 152 483 463 561 632 997	240 889 71 453 585 913 443 1143 301 1089	274 937 592 1025
Exponenten	2950 58549 3, 202002000 2951 58667 3, 202, 2, 3, 3 2952 58573 3, 202, 2, 2, 200 2953 58579 3, 202, 2002, 2	9, 20, 3, 30, 3, 30, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	2956 58687 3, 20002, 203 2957 58693 3, 20000300 2958 58699 3, 200002002 2959 58711 3, 20000003	58727 3, 200022 2, 3
7	2950 58549 2951 58567 2952 58573 2953 58579	58603 58613 58631 58657 58651	2956 58679 2957 58693 2958 58699 2959 58711	58727
**	2950 2951 2952 2953	2955	2956 2957 2958 2958	º º º
₹ ;	2975	2976 2977 2977 2978	2979	2980
	383 413 503 609 437	222 275 83 239 10 103 97 107 144 365	439 429 493 691	547 581 665
<b>.</b>	175 76 321 235 341	222 83 10 10 144	124 305 218 265 359	198 178 487
rapolicinen	3, 3, 3, 5, 8 3, 3, 3, 8, 8 3, 3, 4, 8000 3, 3, 4, 8000 3, 3, 4000 3, 3, 4000	3, 3, 5, 4 • 3, 3, 7 • 2, 4 • 3, 3, 10 • 3, 2 • 6 • 2	3, 205003 3, 205, 2, 20 3, 20403, 2 3, 2040002 3, 2040002	3, 204, 302 3, 20303, 3 3, 20302020
7	58243 58271 58309 58313 58321	58353 58353 58357 58359 58359	58391 58393 58403 58411 58417	58427 58439 58441
-	2937 2938 2939	1965 2940 1966 2941	2968	2945
1	1962	., ., .,		2970
	711 757 377 741 823	869 751 571 325 197	487 665 721 777 629	685 837 669 847
-	154 272 318 541 482	364 528 233 174 23	385 293 214 214 363	247 524 234
	3, 3000004 3, 3000, 50 3, 3002, 50 3, 3002, 2020 3, 3002, 2020	3, 300202, 20 3, 300202, 20 3, 3004, 2, 2 3, 300500 3, 3008	3, 3, 2, 3 e 3 e 3 e 3 e 3 e 3 e 3 e 3 e 3 e 3	3, 3, 2, 2, 302 3, 3, 2002, 20 3, 3, 200030 3, 3, 200003
7	58031 58043 58049 58057 58051	58067 58073 58099 58109	58129 58147 58151 58153 58159	58171 58189 58193 58199
,	1 2926	2927	2929 2930 2931	2932
	2949 2950 2951	2953 2954 1955	2956	1 2 2 5 8 2 2 2 5 9 5 9 5 9

N	343 215 191 81 187	2 1 9 3 4 3 3 8 9 3 7 9 5 0 3	457 365 667 479 511	625 611 437 783 883	851 673 577 827 435
X	246 163 66 74 60	244 145 294 209	124 202 259 110 401	451 373 302 331 559	616 146 317 303 353
Exponenten	3, 2, 60020 3, 2, 7, 30 3, 2, 802 300100 3008, 3	3007, 4 3006, 2, 20 3006, 202 3005, 2, 3	3005, 203 3005, 400 300402002 300402, 4 30040030	3004, 20020 3004, 4, 20 30030202, 2	300300004 300300400 3003, 20202 3003, 3, 40
2	59369 59377 59387 59393 59399	59407 59417 59419 59441 59443	59447 59453 59467 59471 59473	59497 59509 59513 59539 59557	59561 59567 59581 59611 59617
1,2	1988	2989 1016 2990 1017 2991	2992	2994 2995 2996 2997	2998 2999 3000
72	3012 3013 3014 3015	. (1) . (1) .	3018	3021	3022
×	671 719 541 613 429	563 649 419 615	643 729 877 963 461	695 843 241 493 469	439 491 467 391 263
N	291 517 113 250 278	333 182 79 134 299	196 533 368 358 375	320 320 362 362	280 287 128 218 45
Exponenten	3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	3, 2, 3, 4, 200 3, 2, 3, 300 3, 2, 3, 3, 5, 5 3, 2, 3, 2, 5 3, 2, 3, 2, 200 3, 2, 3, 2, 400	3, 2, 3003, 3 3, 2, 3000000 3, 2, 3000000 3, 2, 3000000 3, 2, 3000	3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	3, 2, 5, 3000 3, 2, 5, 2, 200 3, 2, 5000 3, 2, 50300 3, 2, 50300
Z	59107 59113 59119 59123 59141	59149 59159 59167 59183 59197	59207 59209 59219 59221 59233	59239 59243 59263 59273 59281	59333 59341 59351 59357 59359
1,2	2974 2975 2976	2977	2980 2981 2981	2983 2984 2985	2986 2986 —— 2987
· N	3001	3004	3006	1 30 1 30 1	3010
N	443 685 651 559	757 631 365 983 925	775 659 823 311 499		879 667 787 965
N	351 242 317 358	54 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	338 140 270 270 290	482 817 147 629 653 1053 448 1173 619 1067	236 366 503 373 640
Exponenten	6, 9, 9, 4, 4, 60, 60, 9, 9, 4, 4, 60, 60, 60, 9, 9, 4, 4, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60	3, 2, 3, 3, 20 3, 2, 2, 3, 3, 20 3, 2, 2, 3, 3, 20 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 200 3, 2, 2, 200	3, 2, 2, 2, 2, 3, 2 3, 2, 2, 2, 2004 3, 2, 2, 3, 3000 3, 2, 2006 3, 2, 2006 3, 2, 2005	2969 59021 3, 2, 2003, 200 482 817 2969 59023 3, 2, 20020 653 1053 2970 59029 3, 2, 200000000 653 1053 2971 59051 3, 2, 200000000 448 1173 2971 59053 3, 2, 20000000000000000000000000000000	
2	58897 58901 58907 58909 58913	58921 58937 58943 58963 58967	58979 58991 58997 59009 59011	2969 59021 2970 59029 2971 59051	59063 59069 59077 59083 59093
"2	965	1 2 9 9 9 9	1968	2969 2970 2971	2972
12	2986 2987 2988	2989 2990 1991	2992 2993 2994 2295	2996         2997	2998 2999 ——————————————————————————————

- "					
N	439 595 570 737 541 777 69 443 396 1079	285 843 705 291 593	717 983 619 721 317	751 361 489 201 383	505 343 605 761 617
>	439 570 541 69 396	476 367 149 251 382	404 375 477 193 266	463 62 281 106 151	188 188 184 139 144 147
Exponenten	30002, 4020 30002, 2, 2, 30 570 30002, 2, 3, 20 541 30002, 2, 6 69 30002000200	300202, 40 300202, 3, 2 30020204 3003, 60 3003, 400	30003, 2, 300 30003000002 3000302, 30 300030203 30004, 50	300405 3005020 3005020 300502	302, 5, 202 302, 404 302, 40020 302, 302, 200 302, 3003
7	60169 60209 60217 60223 60251	60257 60259 60271 60289 60293	60317 60331 60337 60343 60353	60373 60383 60397 60413 60427	60443 60449 60457 60493 60497
",2	3023	3025	3028	3032	3034
1,2	35     35	30.56	3057	306   30	3062
N	487 635 675 935 679	596 1015 112 625 589 1019 524 683 300 553	745 821 1241 1147 901	977 923 847 1133 601	927 985 757 243 497
N	386 451 148 574 307	596 589 584 300	481 745 604 821 720 1241 474 1147 626 901	351 590 257 438 105	583 373 460 214 156
Exponenten	59921 30004,2,20 59929 30003,20 59957 30003,2000 5997 30003,2000	59981 3000000, 200 59999 300000000 60013 30000, 2020 60017 30000, 3, 30 60029 30000, 500	60037 3000004000 481 745 60041 300000320 604 821 60077 3000000020 720 1241 60083 30000003, 2, 2, 474 147 60089 30000003, 20 626 901	3017 60091 3000002, 300 3018 60103 300002, 3.3 — 60107 300002, 202 3019 60127 3000022, 202	3020 60133 3000033, 200 3021 60139 300003002 — 6049 300004000 — 60161 3002, 70 — 60167 3002, 5, 3
7			3016 60037 	3017 60091 3018 60103 	60133 60139 60149 60161
,,2	1 m   m   m   m   m   m   m   m   m	3015	9	3017	3021
,2	3037	3041 3041 3042 3043	3044 3045 3346 3047	3048	3050 3051 3051
N	731 781 699 361 665	497 869 751 991	823 1099 827 623 863	684 949 240 677 233 509 147 631 649 1047	581 739 797 607 467
N	460 296 403 168 261	118 540 211 576 390	297 426 648 1111	684 240 233 147 649	477 513 219 176
Exponenten	3003, 3, 200 3003, 3000 3003, 3020 30006, 2	300204, 4 300203000 300203003 3002020000	30020,302 3002002002 300200003 30020003 30020003	30000000000000000000000000000000000000	3009 59809 3002, 20040 3010 59833 3002, 2003 3011 59863 3002, 3000 59879 3002, 4, 2, 3
7	29621 3001 59627 3002 59651 3002 59659	59663 59669 59671 59693 59699	3004 59707 59723 59729 3005 59743 59747		59809 59833 59863 59879 59887
,,2	3002	1   8	3005	3006 3007 3007	3010
, 2	3024	3027 3028 3029 3030	3031 3032 3033	3034	1   3

N	521 257 715 961 337	659 841 413 379 383	545 553 473 531 619	501 635 375 465 515	469 273 485 439 439 251
$N \mid I$	185 223 314 7 367 9 284 3	519 8 72 4 307 3	164 5 103 4 5 360 5	287 287 287 319 319 5	28 2 4 4 8 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
<u> </u>			4 4 4 4 6	4 4 A A	H - W H H
Exponenten	303, 2, 402 3030060 30300003, 2 303000002 30302, 50	30302, 2020 30302000 3030205 30303, 40 30304, 30	304, 3, 202 304, 202, 3 304, 2004 30400300 304002, 200	30402, 3, 2 304020002 30403, 30 305, 202, 2	365, 2, 202 365, 2, 5 3650020 36502, 2, 2
2	61051 61057 61091 61099 61121	61129 61141 61151 61153 61169	61211 61223 61231 61253 61261	61283 61291 61297 61331 61333	61339 61343 61357 61363 61379
2,,	3061 3061 3062	3063 3064 3065	3066	30,00	
**	3090	3092	3094 3095 3096	398	3099 
N	391 1065 622 987 406 1069 421 611 317 813	981 739 661 721 665	527 613 359 475 389	333 361 331 493 369	675 577 649 683 653
N	391 622 406 421 317	608 265 422 198 167	228 385 273 288 101	116 267 79 350 305	4 0 2 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
Exponenten	3020002, 200 3020002, 200 3020004, 20 30202, 3002	30202, 2000 302020302 30203, 3000 302030003 302030003	30204, 3, 2 30204, 2000 30205, 30 30205000 30205000	302, 5020 303, 5020 303, 5, 4 303, 4, 2, 20 303, 3040	0.00 kg kg kg kg kg kg kg kg kg kg kg kg kg
7	60763 60773 60779 60793 60811	60821 60859 60869 60887 60889	60899 60901 60913 60917 60919	60923 60937 60943 60953 60951	61001 61007 61027 61031 61043
,,2	3048 ————————————————————————————————————	3051	3053 3054 3055	3084 — 3056 — 3057 3085 — 3058	3059
/2	3077	3079 3080	3082	3085	3086 3087 3088 3089
N	691 743 573 551 1015	741 415 619 797 671	875 749 701 727 627	653 461 569 491 733	361 655 376 443 741 1199 674 957
N	388 536 122 196 589	515 63 278 582 152	241 204 204 523 256	397 145 450 160	227 361 376 741 674
Exponenten	302, 3, 202, 302, 30, 302, 30, 30, 202, 30, 202, 30, 202, 30, 202, 302, 3	3037 60601 302, 2003, 20 3038 60607 302, 2006 — 60611 302, 2, 3, 4, 2 — 60617 302, 2, 2, 2020	302, 2, 2003 302, 2, 203 302, 2, 3, 3, 3, 3 302, 2, 3, 002 302, 2, 4, 2, 2	302, 2, 4000 301005, 3 3010030 301003, 5 3010020	3045 60727 302002, 203 3046 60733 302002, 400 60737 302000055 3047 60757 30200000000000000000000000000000000000
2	60509 60521 60527 60539 3036 60589	3037 60601 3038 60607 60611 60617	3039 60631 3040 60637 — 60647 3041 60649 — 60659	3042 60661 3043 60679 60689 3044 60703	60727 60733 60737 60757 60761
1,2	33	3037	3040	3042	3045
2	3064 3065 3066 3067	3068 3069 3070	3071	3073	3075

1	<b>***</b>	M 14 11 2 22	222	<b>.</b>	
N	335	5223 641 323 323	773 769 721 577	8 15 8 15 8 53	675 377 803 663
%	108 248 74 196 257	231 170 266 205 275	214 83 485 520 153	232 346 241 504 355	320 320 37 382 382
Exponenten	4, 3, 700 4, 205020 4, 205, 4 4, 204, 202	4, 20303, 2 4, 20302, 3 4, 203, 2, 2, 2 4, 203, 302 4, 202050	4, 2020003 4, 202005 4, 202, 2, 2000 4, 202, 2020 4, 202, 303	4, 200000, 2 4, 200000, 2 4, 20000, 3 4, 20000, 3 4, 20000, 3	4, 200004 4, 200006 4, 200006 4, 2002022 4, 2003020
7	61949 61961 61967 61979 61981	61987 61991 62003 62011 62017	62039 62047 62053 62057 62071	62081 62099 62119 62129 62131	62141 62141 62143 62171 62189
12	3102	3103 104 3105	3106 3107 3108	310911	3112
,2	3123	3127	3129	3131	3134
N	469 579 575 499 419	453 305 339 311 597	563 367 585 457 851	625 471 575 661 713	537 593 663 431 457
N	300 224 241 351 182	326 233 89 98 371	209 303 158 252 526	381 167 339 279 451	116 159 409 125 263
Exponenten	4, 4, 2, 3000 4, 4, 2, 2002 4, 4, 2002, 2 4, 4, 202, 20 4, 4, 3, 3, 2	4, 4, 30020 4, 4, 4, 30 4, 4, 403 4, 305, 3 4, 303000	4, 303, 202 4, 302040 4, 302, 400 4, 302, 400 4, 3000000	4, 300402 4, 300402 4, 4, 2, 202 4, 4, 3, 2022 4, 3, 202200	4, 3, 20004 4, 3, 20203 4, 3, 3000000 4, 3, 4, 2, 3 4, 3, 40200
2	61637 61643 61651 61657	61673 61681 61687 61703	61723 61729 61751 61757	61813 61819 61837 61843 61861	61871 61879 61909 61927 61933
; <sub>2</sub>	3086	3089	3091	3093 3094 3095 3096 3096	3098 3099 3100 3101
,2	3115	3118	3119	11111	3122
N	309 329 159 49	219 211 149 357 245	345 267 313 309 385	473 289 331 285 341	489 565 603 481
N	197 128 128 167	62 120 137 54	212 121 96 71 71	180 222 88 197 80	215 409 350 173 38
Exponenten	366, 3000 366222 307, 40 3070020 4, II	4, 7003 4, 7, 300 4, 7, 5 4, 60002 4, 6004	4, 6, 2000 4, 504, 2 4, 503, 3 4, 502, 4 4, 5, 2, 2, 3	4, 5, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 2,	4, 4 0 0 0 3, 2 4, 4 0 0 0 0 0 0 0 4, 4 0 0 0 0 0 0 4, 4 0 0 3 0 0 4, 4 0 0 0 0
7	61381 61403 61409 61417 61441	61463 61469 61471 61483	61493 61507 61511 61519 61543	61547 61553 61559 61561 61583	61603 61609 61613 61627 61627
",2	3074 ————————————————————————————————————	3077	3079 3080 3081	3082	3084
,2	3101	3104	3106	3108	3112

N	7 711 3 725 3 753 5 951 9 435	889 1 727 3 607 5 709	617 5 515 6 529 6 673	307 295 281 417 403	573 573 781
≳	217 568 328 365 199	412 551 514 468 190	450 116 413 246 200	107 192 89 164 239	418 155 334 287
Exponenten	40000000000000000000000000000000000000	40002, 3, 2000 40002, 2000 40002, 2, 2, 20 4000202, 30 40002003, 30	4 6 6 6 3, 2 4 4 6 6 6 6 3 6 2 6 6 6 7 6 6 6 7 6 6 7 6 6 7 6 6 7 6 6 7	400 6000 402, 6000 402, 6, 3 402, 5000 402, 5, 200	402, 3, 2000 402, 3, 203 402, 20002, 2
7	62791 62801 62819 62827 62851	62861 62869 62873 62897 62897	62921 62927 62929 62939 62939	62971 62981 62983 62987 62987	3145 63029 3145 63031 63059 3146 63067
,,2	3137 	3140	1   37   1	3142	3145
,2	3163	3165 3166 3167 3168	3169 3170 3171 3171	3173	3175
8	523 605 547 693 789	575 621 233 517 691	705 719 829 655 559	541 789 445 661 327	599 673 475 821
X	332 232 351 269 488	251 379 32 334 270	499 316 600 142 307	243 289 78 381	235 189 392 595
Exponenten	4 0 0 4 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	4003, 2, 3, 2 4003, 3000 4003, 7 40020400 40020400	400202, 2, 2 4002003, 2 400200003, 4 4002000000000000000000000000000000000	4002, 2, 4, 2 4002, 20202 4002, 205 4002, 3020 4006, 2	400004002 400002040 400002040
7	62501 62507 62533 62539 62549	62563 62581 62591 62597 62593	62617 62627 62633 62639 62639	62683 62683 62687 62701 62723	62731 62743 62753 62753
722	3124	3126	3128	3130	3133
ัณ	3151 3152 ————————————————————————————————————	3154 3155 3155	3157 3158 3159	3160	3162
×	483 391 189 401 551	591 349 747 831 473	681 637 553 603 439	515 249 405 503 219	163 263 313 395
×	268 222 260 216	2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	199 261 146 235 102	1111 209 316 138 76	77 195 186 168
Exponenten	4, 2003, 20 4, 2005, 20 4, 2008 4, 2, 2, 5000 4, 2, 2, 4002	4, 2, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 2005 6, 2, 2005 6, 2, 2005 6, 2, 2005 6, 2, 2005 6, 2, 2005 6, 2, 2005	4, 2, 202, 2, 3 4, 2, 203, 2, 2 4, 2, 203, 3, 2 4, 2, 3, 300, 2 4, 2, 3, 3, 4	4, 2, 30004 4, 2, 4, 50 4, 2, 4003 4, 2, 4003 4, 2, 702	4008, 2 4006, 20 4005, 20
2	62191 62201 62207 62213 62219	62233 62273 62297 62299 62299	62311 62323 62327 62347 62351	62383 62401 62417 62423 62429	3121 62467 3122 62473 — 62477 — 62483
7,	3113	3115	3116	3119	3121 3149 3150
, 13	3137 3138 3139 3140	3141	3144	3146	3149

z   'z	,   ,,≈	7	Exponenten	N	N	- ,2	,,2	7	Exponenten	N	N	,2	,,2	Z	Exponenten	N	×
3177	3148 63 3149 63 3150 63 — 63 3151 63	63079 63097 63103 63113 63127	402, 2, 2, 3, 402, 2, 4, 20, 402, 2, 7, 4, 20, 402, 20, 7, 402, 202, 202, 202, 202, 202, 202, 202	325 325 420 203	659 471 245 571 727	38 88	3162	63377 63389 63391 63397 63409	404, 2030 404, 2, 30 404, 2, 5 40400200 40402, 30	284 236 53 323	361 419 289 511 357	3200	37,7	63607 63611 63617 63629 63647	5, 4, 303 5, 3, 4, 402 5, 305 5, 303, 200 5, 302, 200	8 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0	335 309 163 437 311
3178 3179 3180 3181 -	3152 63 3	63131 63149 63179 63197 63199	40200000000000000000000000000000000000	288 496 298 336 71	779 855 771 601	<u> </u>	3165	63419 63421 63439 63443 63463	4040302 4040400 405,2,4 40502,2	140 169 63 160	391 399 383 253	3203	3178	63649 63659 63667 6367 63689	6, 30 2, 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20	24 4 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	327 649 549 491 471
3182	3153 63 3154 63 3155 63 3156 63	63211 63241 63247 63277 63281	403,4020 403,4020 403,4,4 403,20020 403,2,2,30	251 281 81 377 358	663 343 649 649	3193	3168	63467 63473 63487 63493 63499	466662 467, 36 4011 5, 800 5, 7002	112 122 5 87 77	297 161 59 133 195	38	3180	63691 63697 63703 63709	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	217 323 143 249	561 413 519 445 419
3183 - 3184 - 3185 - 3185 - 31	3157 63 3158 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63	63311 63311 63313 63317 63331	403004, 24 403002, 4 40300000 4030000000000000000000000000	196 110 397 225	435 483 507 751	3195	3171	63521 63527 63533 63541 63559	0, 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0	150 88 202 223	181 295 347 363 323	3207 3208 3209 3210	3183	63727 63737 63743 63761	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	0 8 1 2 8 2 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4	329 271 133 359 445
3186 3187 3187 — 3160		63337 63347 63353 63361 63367	403020020 40303, 2, 2 40304, 20 404, 60 404, 4, 3	407 206 254 149 101	565 503 369 173 327	3198	3173	63577 63587 63589 63599 63601	5, 4002, 20 5, 4, 2, 3, 2 5, 4, 2, 200 5, 4, 204 5, 4, 30	287 162 277 68 225	407 371 439 319 293	3212	3184 3185 3186	63781 63793 63799 63803 63809	5, 20202000 5, 202, 2, 30 5, 202, 203 5, 202, 302 5, 200, 302	381 145 188 142	601 451 537 521 285

N	257 269 217 61 317	299 169 263 301 383	239 409 403 353 265	503 433 465 453 511	391 449 425 239 321
N	111 193 88 55 230	81 144 119 69 270	195 258 233 145 183	312 121 172 134 313	250 263 161 184
Exponenten	5.65, 3, 2 5.65, 62, 2 5.66, 2, 2 6, 90 6, 4002	6, 4, 203 6, 305 6, 304, 2 6, 302, 4 6, 302, 4	6, 3, 2, 4 6, 3, 2, 2 6, 3, 2, 2 6, 3, 3, 2, 2 6, 3, 4, 2	6, 202000 6, 202003 6, 202, 202 6, 20002, 3	6, 2, 2, 3, 300 6, 2, 3, 3, 2, 2, 0, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
2	64483 64489 64499 64513 64553	64567 64577 64579 64591 64601	64609 64613 64621 64627 64633	64661 64663 64667 64679 64693	64709 64717 64747 64763 64781
,,2	3211	3214	3217 3218 3219 3220	3221	3223
,2	3239	3241	3243	3245	3247
N	595 567 809 579 461	569 355 485 519 313	467 507 599 445 257	469 499 499 323	479 353 411 273 337
N	421 320 309 208 253	400 141 299 74	131 188 348 97 40	143 349 304 155	202 272 110 122 215
Exponenten	50002, 2, 20 500002, 30 500000000 50000302 50000400	500202, 20 500205 50003, 2, 3 50003020 502, 4, 4	502, 3003 502, 3, 202 502, 2002 502, 2004 502, 2, 6	502003, 3 502002, 20 50203000 502050	503, 202, 2 50302, 30 5030203 504, 4, 2 504, 3000
2	64153 64157 64171 64187 64189	64223 64223 64231 64237 64237	64283 64283 64301 64303 64319	64333 64333 64373 64381 64399	64403 64433 64439 64451 64453
122	3199 3200 3201	3202	3205	3207	3210
72	3227	3228	3231 3232 3233	1 32 34	3235 3236 3237 3238
N	495 393 377 625 415	531 507 507 461	511 387 175 227 327	405 289 517 245 407	491 653 609 425 623
×	113 70 307 361 318	124 287 233 439 320	299 278 93 72	172 239 328 39 184	385 240 352 151
Exponenten	5, 2002, 4 5, 2000, 4 5, 2002, 40 5, 2002, 20 5, 2003, 30	5, 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	5, 2, 3, 2, 20 5, 2, 40020 5, 2, 700 5005, 3	5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	5 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Z	63823 63839 63841 63853 63857	63863 63901 63913 63913 63929	63949 63977 63997 64007	64033 64033 64037 64063 64067	64081 64091 64109 64123 64151
,,2	3187 3188 3189	3190	3193	3195	3197
ځ	3213	3215	3217	3220	3223

"2   2	Z   "	Exponenten	N	N	, 55 i	,,2	2	Exponenten	$N_{-}$	N	-22		2	Exponenten	$\bar{N}$	N
3250 = 325 3251 = 3252 = 3252					1 1 8 1		65071 65089 65099 65101	7, 3004 7, 2050 7, 202002 7, 202, 200	12 140 199	233 147 361 339	3275		65327 65353 65357 65371	8, 2004 8002020 8002, 200	163 146 146	193 223 249 259
3253   3254   3255   32	3226 64849	6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	311 364 126 272 73	397 589 431 471 345	3265 3267 3267 3269		65111 65123 65123 65129 65141	7, 2003 7, 2005 7, 2, 2, 3, 2 7, 2, 3000 7, 2, 402	96 126 136 186 82	347 289 319 305	3278	3252	65393 65393 65407 65413 65413	8 8 3 3 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	24 1 1 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	235 149 129 167 121
3256 3257 1257 3258 3258	3229 64921 3230 64927 64937	662, 2003 662, 2003 662, 2, 2, 20 662, 2, 5	194 114 275 475 316	301 409 389 437	371   32	3240	65167 65171 65173 65179 65183	7003, 4 700200, 2 7002, 202 7002, 202 7002, 5	53 235 129 38	227 341 379 349 205	8	3255 3256 3257 3257	65437 65447 65449 65479 65497	9, 2, 300 9002, 3 900002, 3 10, 3, 3 1002, 20	85 125 31 75	151 163 173 103 107
3259 32 3	3231 64951 3232 64969 64997 65003 3233 65011	663, 2626 663, 2626 664, 2666 664, 2666	101 237 184 116	377	37   37	3244	65203 65213 65239 65257 65267	70002, 2, 2 7000400 7020003 7030020 704, 2, 2	145 130 85 179 86	351 237 309 249 211	3282	3259	65519 65521 65537 65539 65539	1104 12,30 0150 014,2	37 10 10 10 10 10	59 17 31 43
3261 3262 3263 3263 3263	3234 65027 	7, 7, 2 7, 6000 7, 5000 7, 4, 300 7, 302, 3	8 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80	107 143 165 217 269	1   2	3246 3247 3248 3249	65269 65287 65293 65309 65323	8,5,3 8,4,20 8,3,30 8,200	133 41 107 108 109	219 131 181 191 285	3284	3261 3262 3263 3264	65551 65557 65563 65579 65581	012, 4 01100000 01000002	13 63 37 58 81	53 101 99 151 139

,'x	2	Exponenten	2	×	`x	1,2	7	Exponenten	N	N	2,	2,,	2	Exponenten	≥	×
3265	65587	•10, 2, 2, 2 •10, 6	57	137	3296		65837	070200200	218	375	3312	18	66107	e6e3, 3e2	132	365
1		99292	118	191	3297	31	65843	0702, 2, 2, 2	148	357	3313	, l	66137	•6•2••2, 23	332	471
3267		<b></b>	117	149		3280	65851	e7e2, 3e2	113	313	3314	1	19199	●6@2, 3, 3●	254	331
3268	62629	•66•66	95	169	3298	Ī	65867	•7••2••2	164	423	1	3289	69199	652, 4, 20	223	323
	, ceys	•	7			1306	. 00.5	000000	ž	0		_	24.99		,	9
1		4, 4, 4	4	611			10000	2, 2000/	207	3/9	3315	1	66173	6062, 566	140	209
3209		99, 204	31	145		-	02899	•7••2•••2	103	429	3310	Ī	66199	<b>60008</b> 5, 2	130	283
Ī	65651	9, 3, 2, 2	72	175		<u> </u>	65921	•7, 2, 6•	110	127	3317	I	16199	•6eee3, 4	84	359
Ī	65657	99, 4, 20	93	133	3300		65927	•7, 2, 4, 3	26	245	3318	Ī	66221	•6•••••	358	617
3270	65677	•8 <b>•</b> 3, 2••	127	215		3283	62639	•7, 2, 3•2•	211	287	3319	Ī	66239	900090	38	25 I
		0	ç	;		_								•		
ĺ	02087	62653	8	243	3301		05951	•7, 2, 2, 5	42	227		3290	00271	0000205	53	303
Ī	62699	<b>680003, 2</b>	901	24I	3302	<u> </u>	65957	<b>e</b> 7, 2862600	260	411	3320	Ī	66293	•6••4•••	234	385
3271	65701	080002000	183	289	3303	Ī	65963	•7, 2003002	176	461	1	3291	66301	•69•69•	113	211
3272	65707	8000002	125	327	3304		65981	•7, 20400	142	259	1	3292	66337	•6, 2, 204	245	297
3273	65713	<b>68662, 36</b>	163	211	1	3284	65983	•7, 2•6	25	167	1	3293	66343	•6, 2, 2•2, 3	141	475
	66717	800000	283	,	3000	_	6000	6000	- 3	800	,		27099	90	6	
				_	9000		2666	7, 3, 20	-	7	1000		/#500	60, 4, 4000	2	3
3474		6066263	6	_	_		62000	97, 48280	150	271	•	1	00359	60, 2, 2, 283	120	404
Ī		68, 2, 50	104	123			00037	•7, 5••••	139	229	1		66361	e6, 2, 2, 3, 2e	289	415
3275		<b>8</b> , 2, 4, 2	85	189	3307	Ī	6604I	•7, 6, 29	901	155		3295	66373	•6, 2003000	303	473
3276	65761	•8, 3, 4•	121	149	3308	1	66047	€7, 9	∞	73	3323		66377	•6, 200202	362	495
	6.000	8	9		_ <u>`</u>	2286	29099	0 201090	Ş	9	,		00099	,	4	
Ī	// 5	60 4; 36	2	707		2	/0000	2, 7, 2, 2	133	313	_		00303	00, 2002, 4	6	421
1		•8, o••	4	611	3300	===	1/000	•0• <b>†••</b> 3	86	305	1	3296	66403	_	199	457
3277	62809	●7●3●3●	167	211	3310	1	66083	●6●3●3, 2	148	335	3325	I	66413	_	302	523
3278	65827	●7●2●3, 2	131	297	3311	Ī	68099	000300020	288	397	3326	Ī	66431	•6, 2•7	22	169
1	65831	€7€2€2, 3	96	323	1	3287	66103	€6€3, 2€3	101	373	3327	1	66449	•6, 3, 2030	270	343

1,2	Z	Exponenten	2	2	12	,'x	Z	Exponenten	×	N	,2	","	2	Exponenten	N	N
3297 66	66457	66, 3, 2, 2, 20 66, 3, 2, 5	299	423	11	3309	66733 66739	•5e2eee2ee	437	753	11	3323	67003 67021	<b>050020302</b> 05003, 2, 200	361	605
	66467			415	3341	3311	66749 66751		262		3352	3325	3325 67033 67043		387	
3299 66	66499	Ď,		275	1	3312	66763	•5•2, 2, 2 <b>••</b> 2	275		3353	1	67049	050040020	334	465
1 200	66509	<b>66, 4, 2, 200</b>	224	383	3342	11	166799	<b>6502, 3, 2, 3</b>	154	529	3354	3326	67057	•5••5, 3• •5••5•••	2 4 0 4	301
	66529				3344	11		0502, 5, 20	234		3355		67073		110	
3302 6	6654I				<u>;                                    </u>	6	6684I	650003, 2, 20	405		3357	-	67103	. 4,	58	
	66553		107				66851	05000203, 2	272		3358	;	67121	ω, .	354	457
3304	66571	<b>65</b> 6662	103	261	3347	<u> </u>	66863	5002004	126	577	3359	<u>}  </u>	67139	65, 2, 204, 2	212	
1	66587		130	349	11	3315	66877	050002, 400	285	517	11	3328	67141	<b>65, 2, 203000</b>	379	591
	66601			42.3		3317	66889	5.0000000000000000000000000000000000000	523		3360	3		65,2,2000000		
	66617						61699	•5eee2, 2, 3	205		3361	1	69129	65, 2, 2, 2, 40		
1 200	66629	050303000	292	455	3348	1 2	66923	<b>6500000000</b>	324	853 661	3362	11	67181	65, 2, 2, 2020 65, 2, 2, 3, 2, 2	404	669
<u> </u>	66653			495		3320	66943	650007	33		31	3330		<b>65, 2, 2, 30000</b>		
1	66683	-5-3, 4-2			3349			65002, 5, 2	178	389		Ī	67211		262	
3307	66697					3321	66949	05002, 4000	323	501 481	136.	3331	67213	<b>65, 2003, 200</b>	377	639
	66713	650202, 2, 20	424	200	<u> </u>	3322		65002, 2, 300	349		31	3332	3332 67219		313	
3308	66721	•5•2•••4•		_	3351 —			650020040	362	441		3333	67231	3333 67231 65, 2002, 5	83	447

, <sub>2</sub>	;z	7	Exponenten	N	×	722	12	7	Exponenten	N	N	12	1,2	7	Exponenten	N	N
3366 3367 3368	3334	67247 67261 67271 67273 67289	5, 20004 5, 2004 5, 202, 3, 3 5, 202, 202 5, 20202, 202	134 287 172 465	619 523 567 637 643	3380 3381 3382	3345	67511 67523 67531 67537 67547	65, 46283 65, 57, 4, 2 65, 57, 2002 65, 5003 65, 50202	118 130 167 142 142	441 291 433 309 389	11111	3354 3355 3355 3357 3357	3354 67777 3355 67783 3356 67789 3357 67801	0403, 2, 50 0403, 2, 3, 3 0403, 2, 2, 20 0403, 202, 20	283 179 433 479 75	335 589 739 681 427
3369 3370 3371	3336	67307 67339 67343 67349 67369	65, 2030002 65, 3, 4002 65, 3, 4, 4 65, 3, 30000 65, 3, 20000	248 183 372 447	655 467 347 599 617	3384	3348	67559 67567 67577 67579 67589	65, 6, 2, 3 65, 604 65, 8, 20 65, 802 64, 802	80 43 104 112	277 209 153 159 171	3396	3359 3360 3361	3359 67819 3360 67843 67853 3361 67867	3359 67819 6463, 30002 67829 6463, 4000 3360 67843 646266, 2 67853 646264, 200 3361 67867 646263, 202	271 340 155 350 281	715 559 333 591 757
3372	3338	67391 67399 67409 67411 67421	es, 3, 2, 6 es, 3ee3, 3 es, 3eee3e es, 3eee2, 2 es, 3ee3e	157 408 295 320	283 515 521 703 571	3386 3387 3388 3389	3349	67601 67607 67619 67631 67651	0406030 0406003 040503, 2 0405004 040404, 2	182 88 158 76 169	229 311 357 345 345	3398	3362	3362 67891 	040202, 2, 2, 2 040202, 400 0402000003	384 361 338 269 372	384 1003 361 871 338 613 269 973 372 1013
3375	3340 3341 3341	67427 67429 67433 67447 67453	5, 302, 3, 2 5, 302, 200 5, 302002 5, 30303 5, 3050	232 395 420 119 169	533 627 583 451 313	3390	3350	67679 67699 67709 67723 67733	0404005 0404,3,2,2 0404,500 040303002	215 1180 180 249 492	355 523 331 637 793	3401	3364 3365 3366	3364 67933. 3365 67939 67943 3366 67957 67961	0402002, 3, 2 0402002, 3, 2 0402002, 2, 3	475 349 246 509 406	847 801 841 835 589
3377 3378 3378	3343	67477 67481 67489 67493 67499	5, 4, 20000 65, 40, 2, 2, 20 5, 4004 65, 400200 65, 4000002	355 330 342 342 330	573 467 311 541 603	3394	3352 3393 — 3394 — 3353 3395 —	3393 67741 3394 67751 3394 67757 3395 67759	0403002, 300 04030002, 3 040300020 04030004	353 214 480 133 318	625 723 827 613 769	3403	3367 3368 3368		040207 0402, 2, 3002 0402, 2, 202, 2 0402, 2, 2, 2, 20	40 371 371 565 211	303 805 879 799 787

'2	12	2	Exponenten	×	N	-2	1,22	7	Exponenten	N	N	72	1,2	7	Exponenten	$ \overline{N} $	N
	3370 3371 3372 3373	3370 68041 3371 68053 3372 68059 3373 68071	0402, 3, 2020 0402, 300000 0402, 30202 0402, 4, 2, 3	207 279 165	695 763 569	14112	3383	3383 68389 	04002, 202000 04002, 2004 04002000000 0400200202	609 162 731 1 385 1	961 743 1183 1049	3431	3394	3394 68683 — 68687 — 68699 — 68711	04, 2, 302002 04, 2, 302, 4 04, 2, 300202 04, 2, 3, 2, 2, 3	321 136 310 212 540	827 593 843 723
3406 3407 3408 3408	3374	68099 68111 68113 68141 68141	40007, 2 40005, 4 4000403 40003, 2, 2, 2	130 130 367 367 344		34 20 34 20 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 21 34 34 21 34 34 34 34 34 34 34 34 34 34 34 34 34	888		400202, 4000202, 2000202, 2000202, 20002, 20	4 4 4 6 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 6 4 6 6 4 6	569 591 485 629	\$	3396 3397 3398 3399		4444	364 255 179 461 103	527 293 575 781 553
3411	3375	3375 68161 — 68171 — 68207 3376 68209 68213	400250 4002,204 4002,3,30	355 417 400 1031 152 715 501 653 546 895		3423	1 38   1	3388 68491 	4463, 362 4463, 288 4463, 2, 282 4463662	3 5 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	757 907 829 823 795	3435 3436 3437 3437	1 %	68771 3400 68791 — 68819 — 68819	64, 2, 20003, 2 64, 2, 200003 64, 2, 200203 64, 2, 2, 2, 200	374 710 233 536 406	851 981 867 915
3414	3377	3377 68227 3378 68239 68261 68261	44002, 402 440005, 2 440003, 4	242 253 163 736 1	681 551 697 1163 983	3425	33     38	3390 68539 — 68543 68567 3391 68581 68597	44 66 3 8 3 8 2 8 4 8 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	23 172 237 237	667 339 627 521 393	1   3   3   3   1	3401 3402 13403	58821 58853 58879 58881 58891	64, 2,2,2000 64, 2, 2, 8 64, 2004, 4 64, 2003,30	124 124 469 318	1061 227 523 593 857
3416	3379 3380 3381	3379 68281 3380 68311 3381 68329 68351 3382 68371	640000003, 20 6400030020 640008 640008 64002, 302, 2	601 275 589 28 341	865 999 819 241 805	3428	3392	68611 68633 68639 68659 68669	14, 2, 8, 2 14, 2, 5, 2, 2 14, 2, 5, 5 14, 2, 4, 2, 2, 2 14, 2, 4, 4	93 50 267 256	197 453 311 643 463	3441 3404 3442 — 3404 3443 — 3405	3404	68897 68899 68903 68909 58917		458 264 264 598 641	458 555 361 819 264 889 598 1029 641 1045

×	401 427 461 533 345	179 337 283 443 389	233 553 557 649	367 449 719 593 535	525 655 679 751 409
×	276 151 202 326 242	46 210 161 258 141	199 325 402 247 198	169 140 304 458 294	236 419 496 207 332
Exponenten	04, 404, 20 04, 40402 04, 5003, 2 04, 502000	4, 803 397, 300 307, 300 306020	39595 9352, 20 935, 2020 935, 2002	030405, 2 030404, 3 0304022, 2 0304002, 3	0304, 2, 4, 2 0304, 2, 3000 0304, 2, 2010 0304, 2000 0304, 3000
2	69497 69499 69539 69557 69593	69623 69653 69661 69677 69691	69697 69709 69737 69739 69761	69763 69767 69779 69809 69821	69827 69829 69833 69847 69857
"2	1   343	3474 — 3475 — 3431 3476 — 3432	3433	3479 — 3436 3480 — 3481 — 3481	3483 — 3437 3484 — 3438 3485 —
72	3470 3471 3472 3473		3477		
N	619 275 639 771 565	369 701 727 669 405	283 351 487 539 607	669 601 303 553	725 391 615 547 573
N	164 37 470 301 132	311 448 511 374 142	131 110 288 382 382	277 162 47 433 193	318 443 224 349
Exponenten	04, 3, 2, 303 04, 3, 2, 7 04, 300302 04, 300302	64, 302, 50 64, 302, 300 64, 30202, 20 64, 30203	64, 4, 6, 2 64, 4, 5, 3 64, 4, 4, 20 64, 4, 3, 2, 20 64, 4, 3, 2, 20	64, 4, 2, 2, 2, 2, 6, 4, 4, 2, 2, 3, 6, 4, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,	
2	69239 69247 69257 69259 69263	69313 69317 69337 69341 69371	69379 69383 69389 69401	69427 69431 69439 69457 69463	3468 — 69467 3468 — 69473 3469 — 69481 — 3429 69493
"2	3418	3421	3422	3424 3425 3426 3427	3428
722	3457 3458 3459	3461	3464	18111	3467 3468 3469
N	447 1141 877 317 709	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	847 611 503 155 319	515 361 817 641	731 821 895 831 545
N	382 374 374 381	0 4 6 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	327 305 16 101	154 292 313 196	535 482 376 376 418
Exponenten	68927     64, 2600     70     447       3406     68963     64, 2600     3, 247     1141       68993     64, 260     374     317       3407     69001     64, 262, 362     521     709	— 69011 e4, 202, 202, 202 3408 69019 e4, 202, 2, 202 69029 e4, 2020020 3409 69031 e4, 202002, 3	3411 69067 e4, 283, 2893 3412 69073 e4, 283883 3413 69109 e4, 285888 69119 e4, 289 3414 69127 e4, 3, 6, 3	69143 64, 3, 4003 69149 64, 3, 4, 300 3415 69151 64, 3, 4, 3 3416 69163 64, 3, 30002 69191 64, 3, 203, 3	3417 69193 e4, 3, 202020 69197 e4, 3, 202, 200 69203 e4, 3, 2000, 2 69221 e4, 3, 2, 2, 2000 69233 e4, 3, 2, 2000
2	68927 68947 68963 68993 69001	3408 69011 3408 69019 3409 69031 3410 69061	3411 69067 3412 69073 3413 69109 — 69119 3414 69127	69143 	69193 69197 69203 69221 69233
z,,	3406	3408 3409 3410	3411 3412 3413	3415	£
`22	3445 3445 3446	3447	1   34	3451 3451 3452	3453 3454 3455 3455 3456

,,2   ,2	Z	Exponenten	N	N	722	,,2	7	Exponenten	2	2	,2	,,2	2	Exponenten	N	N
		<b>6364</b> , 3, 3, 2 <b>6364</b> , 4000	351		3498	34527	70141	0303, 700 030205, 200	346	295 583	111	3465	3465 70393 3466 70423	0302005, 20 0302, 2, 3003	401	585 923
3487	69911 69911 69929	63636363 63636363	206 206 656	733	38 8	3453	3453 70177	030203040 0302030200	592 592	521 933		<u>}  </u>	70439 70451	0302, 2, 2, 3, 3 0302, 2, 202, 3 0302, 2, 2, 2,2,2	306	1125
3489 — 3441 — 3490 — 3442 — 3443	69931 69941 69959 69991 69997	030302, 2002 0303003, 2000 0303003, 3	407 1063 608 991 244 799 263 899 569 985		35   35	34557	3454 70183 70199 3455 70201 3456 70207	3454 70183 63626362, 3 	251 232 535 71 194	843 857 767 445 847	3512	76   346	3468 70459 	0302, 2, 2, 3, 20 626 0302, 2, 3, 302 0302, 2000030 0302, 200003 0302, 200003 0302, 200003	626 353 748 334 795	899 979 955 1209 1129
3491 — 3444 — 3444 — 3492 — 3445 — 3492	70001 70003 70009 70019 70039	0303003, 30 0303003, 2, 2 0303004, 20 0303, 2, 5, 2	502 349 435 234 253	655 851 631 511 907	3504	34577	3457 70239 	3503 — 70229 636222666666 3504 — 70241 63626, 2, 46 3505 — 70271 63626, 2002	828 1339 563 1003 544 667 771 1069 52 383	1339 1003 667 1069 383	3515	3471 3471 3472 3473	3470 70501 3471 70507 	3470 70501 0302, 202, 2000 729 II57 3471 70507 0302, 202002 475 I251 	729 1157 475 1251 296 343 559 761 681 1099	1157 1251 343 761 1099
3493 — 3447 3494 — 3495 — 3448	70051 70061 70067 70079 70099	0303, 2003, 2 377 859 0303, 200200 506 1045 0303, 202, 2, 2 396 959 0303, 200 62 415 0303, 3002, 2 367 877	377 606 396 62 367		3507	3459 3460 3461 3461	70289 3459 70297 3460 70309 3461 70313	03020002030 03020002,2,20 030200002000 03020000020000000000	704 789 855 940 751		3516 3517 3518 3519	144	3516 — 70571 3517 — 70583 3518 — 70583 3518 — 70589 3519 — 70607	0302, 3002 0302, 3002 0302, 30400 0302, 30400	446 1169 615 1061 230 859 352 643 136 605	446 1169 615 1061 230 859 352 643 136 605
3496 3496 3497 3497	70111 70117 70121 70123 70139	6363, 365 6363, 4, 266 6363, 4662 6363, 4662 6363, 562	81 462 462 281 138	467 705 643 743 395	3508	3462 3463 3464 3464	70327 70351 70373 70379 70381	3020023 3302023, 2, 4 3302003, 2000 33020030002	307 1143 203 897 656 1043 420 1109 571 991		ا ا ا ا ا ا ا ا ا	3475 3476 3477 3478	3475 70619 3475 70621 3477 70639 3478 70657	70619 6363, 46262 3475 70621 6363, 46366 3476 70627 6363, 5, 3, 2 3477 70639 6362, 564 3478 70657 636699	286 361 239 89 135	783 647 553 431 149

*\chi_{\chi_2}	;2	7	Exponenten	X	R	- '22	,,2	7	Exponenten	iz.	×	,2	,,2	2	Exponenten	N	N
3521 3	3480	70663 70667 70709 70717	1521 3480 70663 939997, 3 1522 3480 70687 939995, 5 1522 70709 939994, 2999	107 200 79 562 339	335 507 409 915 613	1   2	491 7 493 7 494 7	1860 1860 1860 1860	335 — 3491 70951 9300002202, 3 507 — 3492 70957 930000202020 409 — 3493 70969 93000002, 3, 20 915 3534 — 70979 930000004, 2 613 — 3494 70981 930000003000	365 827 753 448 799	365 1229 827 1423 753 1081 448 993 799 1247	3544 3545 3546	3506	71233 71237 71249 71257 71251	229 — 3506 71233 93992, 2959 445 523 423 3544 — 71237 93992, 29399 556 1022 993 — 3507 71257 93992, 2993 766 977 247 3546 — 71261 93992, 299399 610 1087	445 523 656 1023 766 977 821 1165 610 1087	523 1023 977 1165 1087
3523	3483	70729 70753 70769 70783	3482 70729 93999392929 3483 70753 939993, 2, 49 70759 939993, 3 70769 939993, 7 3484 70783 9399293929	673 515 552 51 672	919 3535 631 3536 719 — 371		3495 7 3496 7 3497 7	09997	70997 63000000000000000000000000000000000000	254 1113 1076 1741 411 1487 531 1219 217 1025	254 1113 076 1741 411 1487 531 1219 217 1025	3547	3508 3509 3510	71263 71287 71293 71317 71327	3508 71253 03002, 2005 3509 71287 03002, 2, 303 3510 71303 03002, 2, 500 3511 71317 03002002000000000000000000000000000000	133 743 243 917 353 651 142 765	743 917 651 1411 765
3525 3526 3527 3527	1 3485	70823 70841 70843 70849	1525 — 70823 830002002, 3 1526 — 70841 830002003, 20 3485 70843 83000200302 3486 70849 830002, 2, 50 1527 — 70853 83002, 2, 3000	366 718 403 477 690	366 1237 3537 718 1033 403 1121 3538 477 565 3539 690 1079	3537	3498 7 7 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1059	366 1237 3537 — 71039 9300007 718 1033 — 3498 71059 930002, 202, 2 403 1121 3538 — 71069 930002, 2, 300 477 565 3539 — 71081 93000220020 690 1079 — 3499 71089 93000220, 3	549 632 964 761	60 457 549 1301 632 1121 964 1333 761 987	3548	3512 	71329 71333 71339 71341	3512 71329 9302200040 655 797 3549 — 71339 930220000200 884 1399 3549 — 71339 93022000020 600 1571 3513 71341 9302200020 829 1429 3514 71347 930220002, 2, 2 545 1319	655 884 600 829 545	797 1397 1571 1429 1319
3528	3487	70867 70877 70879 70891	3487 70867 630002, 2002, 2 551 1315 — 3500 71119 630003, 2, 1528 — 70877 630002, 20300 588 1051 3540 — 71129 6300004, 2, 3488 70879 630002, 205 125 713 — 3501 71143 630004, 2, 3489 70891 630002, 205 449 1185 3541 — 71147 63000040000, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	551 125 125 449 560	1315 1051 3540 713 1185 3541 921 3542	3540	35007	11129	551 1315 — 3500 71119 930003, 2, 4 588 1051 3540 — 71129 9300030, 20 125 713 — 3501 71143 930004, 2, 3 449 1185 3541 — 71147 930004002 560 921 3542 — 71153 930005, 30	189 696 235 364 410	839 811 963 539	355	3515 3516 ————————————————————————————————————	71353 71359 71363 71387 71389	3550 — 71353 930-20003, 20 3550 — 71363 930-202, 4, 2 3551 — 71387 930-202222 3551 — 71387 930-202222	719 1035 87 577 380 847 444 1213 563 1007	1035 577 847 1213 1007
3531 3531 — 3 3532 3533	3490	70913 70919 70921 70937 70949	3530 — 70913	282 208 587 744 I	319 661 795 1049 1363	1   35   1	1502 7 1503 7 1504 7 1505 7	11167	319 — 3502 71161 6300066, 20 661 — 3503 71167 630009 795 3543 — 71171 63002, 7, 2 1049 — 3504 71191 63002, 4003 1363 — 3505 71209 63002, 30002	327 23 170 225 739	479 221 363 799 1019	3552 3553 — 3554	3518	71399 71411 71413 71419 71429	327 479 3552 — 71399 6362263, 2, 3 170 363 — 3518 71411 6362264, 2, 2 125 799 — 3519 71419 636226562 739 1019 3554 — 71429 63663, 5666	270 334 517 215 370	929 819 851 613 571

سعد					
N	1163 933 535 1379 769	517 1361 190 897 676 1109 649 883 596 1011	746 1055 437 1183 790 1249 331 1121 737 1271	1085 507 745 767 789	817 751 527 865 1045
N	482 650 84 579 137	517 190 676 649 596	746 437 790 331 737	419 410 216 551 454	347 101 101 382 663
Exponenten	2, 202, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	2002000 2003000 2, 2, 3, 200 3, 2, 3, 200	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3553.72139 63, 2, 2, 3, 2002 72161 63, 2, 2, 4, 40 72167 63, 2, 2, 4, 2, 3 3554.72169 63, 2, 2, 40020 72173 63, 2, 2, 40020	593 — 3555 72211 93, 200402, 2 823 3590 — 72221 93, 2004, 300 013 — 3556 72223 93, 2004, 5 973 3591 — 72227 93, 200303, 2 911 — 3557 72229 93, 200302000
7	71987 • 3, 71993 • 3, 71999 • 3, 72019 • 3,	72043 <b>63, 2,</b> 72047 <b>63, 2,</b> 72053 <b>63, 2,</b> 72073 <b>63, 2,</b>	3585 72089 93, 2, 3586 72091 93, 2, 3586 72103 93, 2, 3551 72103 93, 2,	72139 72161 72167 72169 72173	72211 72221 72223 72227 72227
12	3546	3548	3550  3551 3552	3554	3555 3556 3557
72	3579 3580 3581	3582 3583 3584 3584	3585	3587 3588 1589 3589	3591
N	553 459 641 485 823	289 311 835 857 919		173 763 377 1029 572 909 501 869 226 421	593 823 013 973
N	165 254 503 396 476	404 404 404	768 688 324 244 661	173 377 572 501	385 593 323 823 376 1013 429 973 199 911
Exponenten	63, 2, 562, 3 63, 2, 5, 400 63, 2, 40003 63, 3, 4, 2, 40 63, 3, 4, 2020	63, 2, 4, 7 63, 2, 366 63, 2, 363, 26 63, 2, 3636 63, 2, 36663, 2	93, 2, 30000000 768 1001 93, 2, 3000000 688 1123 93, 2, 300302 324 901 93, 2, 3, 3, 3, 244 803 93, 2, 3, 3, 2020	3539 71887 • 3, 2, 3, 2, 4, 3540 77899 • 3, 2, 3, 3, 2000 71909 • 3, 2, 3, 3, 2000 71917 • 3, 2, 3, 3000 71933 • 3, 2, 3, 5000	5542 71941 63, 2, 265660 3543 71947 63, 2, 264662 578 — 71963 63, 2, 263, 262 3544 71971 63, 2, 26263, 2
2	3534 71719 	71807 71809 71821 71837 71843	71849 71861 71867 71879 71879	3539 71887 3540 71899 71909 3541 71917	71941 71947 71963 71971 71983
122	3534	3536	33,	3539 3540 3541	3542 3543  3544 3545
,×	3566 3567 3567 3568	3569 3570 3571	3572 3573 3574 3575	3576	3578
N .	443 749 379 895 452 799 178 817 607 785	251 931 324 899 187 821 269 921 506 661	278 515 41 319 305 783 487 619 605 837	514 887 386 495 59 345 68 331 77 299	210 353 192 451 183 491 58 299 281 339
X		·	_	386 386 59 68 77	1 0 8 7 8
Exponenten	03003, 4, 200 03003, 302, 2 03003, 3, 30 03003, 2004	63063, 2, 203 63063, 2, 302 63063002, 4 6306302, 4 6306303, 30	30335 30307 3304, 302 3304, 203 3304, 203	30040020 300503 300505 300504	03, 2, 7, 200 03, 2, 602, 2 03, 2, 6, 202 03, 2, 6, 5 03, 2, 6, 5
Z	71437 71443 71453 71471 71471	71479 71483 71503 71527 71537	71549 71551 71563 71569 71593	71597 71633 71647 71663 71663	71693 71699 71707 71711 71711
,55	3520 3521 ————————————————————————————————————	557 — 3524 — 3524 — 3525 558 —	3559 — 3526 — 3527 — 3528 — 3529	3530	1563 — 1564 — 1565 — 1565 — 3533
<b>`</b> 22	3555	3557 —— 3558	3559	3560 3561 3562	3564 3564 3565

	2 L H L G	84688	H H 80 G E	23785	70 H M M
N	72859 e3, 3, 2e2, 2e2 391 1057 72869 e3, 3, 2ee2, 2e2 726 1147 72871 e3, 3, 2ee2, 3 305 1031 72883 e3, 3, 2ee2, 2, 2, 451 1091 72889 e3, 3, 2ee3, 2e 597 859	408 743 571 893 425 1099 176 777 382 1043	781 841 755 755 219 253	441 745 518 655 689 1087 629 813 706 1151	73019 e3, 3ee2, 3e2
2	391 726 305 451 597	408 571 425 176 382	339 605 459 356 30		338 680 201 526 714
ten	2, 2, 3, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7,	, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,	3, 3, 2 30020 4000 5, 20	2, 3°	4 4 4 4
Exponenten	3 2 2 2 3	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	ယ္ မွာ နည္ အ	4 6 4 4 4	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
Exp	<b></b>	<b>a</b> a a a a a	, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,	w w w w	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
	72859 e3, 3, 2e2, 2e2 72869 e3, 3, 2ee2eee 72871 e3, 3, 2ee2, 3 72883 e3, 3, 2ee2, 2, 3 72889 e3, 3, 2ee3, 2e	72893 e3, 3, 2ee4ee 72901 e3, 3, 2, 2, 3ee 72907 e3, 3, 2, 2, 2ee 7291 e3, 3, 2, 2, 4, 4 72923 e3, 3, 3, 2, 2, 4	72931 •3, 72937 •3, 72949 •3, 72953 •3, 72959 •3,	72973 e3, 3004, 200 72977 e3, 3003030 72097 e3, 300202000 73009 e3, 3002, 2, 30 73013 e3, 3002, 20000	73019 63, 3002, 302 73037 63, 300002, 2 73039 63, 300002, 73043 63, 300002, 200
7	72867				
,,2	3585 3586 3587 3588	3589 3590	3591 3592 3593	3594 3595 3596	3623 3624 — 3597 3625 — 3597
,2	3615	3616	3619	3621   361	3623
N	3 310 1061 179 847 301 349 667 1055	789 575 649 723 897	431 383 557 361 239	34 I 34 I 505 505	655 349 805 611
×	310 179 301 667 728	170 257 196 527 553	74 309 161 274 126	108 82 151 289 263	237 56 452 469
Exponenten	93, 20202, 2, 3 10 1061 93, 202004 179 847 93, 203, 60 301 349 93, 203000200 657 1055 93, 20300020 728 1007	03, 2030004 03, 204, 4, 2 03, 204, 3, 3 03, 204, 2020 03, 2040	03, 20405 03, 205, 40 03, 205, 2, 3 03, 206, 30 03, 2080	63, 3, 8, a 63, 3, 6, 4 63, 3, 5003 63, 3, 5, 30 63, 3, 403, a	63, 3, 4, 362 63, 3, 4, 6 63, 3, 3063 63, 3, 3, 3, 3, 3
7	72551 72559 72577 72613 72613	72623 72643 72647 72649 72661	72671 72673 72679 72689 72701	72707 72719 72727 72733	72763 72767 72797 72817
"2	3571 3572 3573	3574 3575 3575	3577	3579 3580 3581	3583
,2	3604	1 367	<u></u>	3612	3613
N	338 935 417 755 724 1233 215 939 917 1483	759 1079 807 973 1477	837 1113 1183 609 1121	775 835 1001 1119 673	721 1241 686 887 284 1053 904 1463
N	338 417 724 215 917		688 241 425 92 705	162 494 494 695 555	
Exponenten	72251 (3, 2003, 302 3558 72253 (3, 2003, 400 72269 (3, 200202, 200 3559 72271 (3, 200200, 4	72287 e3, 2022e5 3561 72307 e3, 202, 3, 2, 2 3662 72313 e3, 2002, 4, 20 3563 72337 e3, 200022030	72353 93, 2000004 3564 72367 93, 20000004 3565 72379 93, 20000302 72383 93, 200005 3566 72421 93, 20003, 2000	72451 93, 200.34 72461 93, 202, 4, 200 72467 93, 202, 303, 2 3567 72469 93, 202, 30000 3568 72481 93, 202, 2040	601 — 72497 63, 262, 2626 602 — 72497 63, 262, 2, 3, 36 603 — 72503 63, 262, 2, 263 603 — 72533 63, 262666666
2	72253 72253 72269 72271	72287 72307 72313 72337 72341	72353 72367 72379 72383 72421	72431 72461 72467 72469 72481	72493 72497 72503 72533
, s		3561 3662 3563	3565 3565 3566	3567	3569
-22	3592	3594	3596	3598 3599 3600	3601 3603 3603

·		<del></del>			
N	281 289 239 251	53 261 253 435 357	557 321 421 363 343	601 751 697 739 735	761 711 415 603 549
N	101 101 103 144 86	4441	205 58 1112 251	235 235 304 304	319 196 73 434 334
Exponenten	e3, 7ee3e e3, 7e3ee e3, 8, 3, 2 e3, 8e2ee e3, Io, 2e	e3, i3 e2e8e3 e2e8, 3ee e2e7eee2 e2e7, 2e3	eze6eses eze6es eze6,3e3 eze6,4,ze eze5e5,z	22652222 226522, 202 22659992 22659992	2265, 2862, 2 2265, 28683 2265, 285 2265, 38626 2265, 4886
Z	73681 73693 73699 73709 73721	73727 73751 73757 73771 73771	73819 73823 73847 73849 73859	73867 73877 73883 73897 73907	3630 73939 
, 2	3621 3622 3623	3624	3626	3628	3665 == 3630 3666 == 3631 3667 == 1
,2	3654	3656	3659 3660 3661	3663 3663 3664	3665 3665 3666 3667
N	813 737 665 547 185	369 503 699 657 523	723 539 635 547 455	555 317 337 391 445	519 577 473 335 277
×	4 7 4 7 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	193 197 406 364	8 4 4 4 0 4 4 8 0 0 4 7 8 0	338 171 104 287 262	328 220 195 244 62
Exponenten	e3, 4e2, 2, 2e e3, 4e2e2, 2e e3, 4e3e2e e3, 4e4, 2, 2 e3, 4e8	03, 5, 5000 03, 5, 4000 03, 5, 2000 03, 5, 2, 2, 2, 2	e3, 5ee2ee2 e3, 5eee2, 2e3, 5ee2, 3e3, 5ee2, 3, 2e3, 5e2, 3, 2e3, 5e2, 6e3, 6e3, 6e3, 6e3, 6e3, 6e3, 6e3, 6e3	ea, seasees, sease, sea	03, 6002000 03, 600002 03, 602, 2, 2 03, 7, 2020 03, 7, 2, 4
Z	73421 73433 73453 73459	3615 73477 3616 73483 	73547 73553 73561 73571 73583	73589 73597 73609 73613	73637 73643 73651 73673 73679
,,2	3612 3613 3614	3615	3617	3618	3620
2,	3638	364° 3641 3641	3644	3648	3650 3651 3652 3653
N	1009 825 551 619 969	1097 1067 695 699 661	627 851 529 905 871	761 617 731 557 637	869 793 797 1071 733
N	2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	636 653 388 439	233 226 292 351	427 131 300 173 502	367 350 350 1409
Exponenten	03, 30002, 2, 3 295   1009 03, 3000303   218   825 03, 302, 5, 2   252   551 03, 3020040   508   619 03, 302002, 3   286   969	83,38282888 636 1097 83,3828288 653 1067 83,384,288 695 83,384,288 439 699 83,4,48888 411 661	03, 4, 4, 202 03, 4, 300002 03, 4, 3, 400 03, 4, 202002 03, 4, 202002	03, 4, 200300 03, 4, 2, 204 03, 4, 2, 3, 2, 2 03, 4004, 3	03, 400202, 2 03, 4002, 2, 24 03, 4000003, 2 03, 402, 2020
Z	73063 73079 73091 73121 73127	73133 73141 73181 73189 73237	73243 73259 73277 73291 73393	73327 73327 73331 73351 73361	73363 73369 73379 23387 73417
,,2	3598	3599 3500 3501	3604	3605	3608 3609 3610
,2	3627 3628 3629 3629	3632	3633	3635	3637

N	117 619 434 985 283 1049 464 547 298 977	728 1241 479 1305 758 1203 592 773 411 1003	377 889 433 907 873	745 681 459 613 707	357 363 449 677 733
×	117 483 483 494 892	728 479 758 592 411	501 64 64 350 365	523 380 79 440 267	1124 116 333 273
Exponenten	3660 74527 e2e3, 2, 3, 5 74531 e2e3, 2, 2e3, 2 3661 74551 e2e3, 2, 2, 2e3 74561 e2e3, 2ee5e 74567 e2e3, 2ee5	74573 2203, 2002, 200 728 1241 74587 2203, 2002, 200 758 1203 74509 2203, 200, 200 758 1203 74609 2203, 203, 30 592 773 74611 2203, 203, 2, 411 1003	2003, 207 2203, 3, 2, 30 2203, 306 2203, 4, 200 2203, 4002, 2	3667 74713 e2e3, 4e2, 2e 74717 e2e3, 4e3ee 3668 74719 e2e3, 4e5 74729 e2e3, 5ee2e 3669 74731 e2e3, 5ee2e	3700 — 74747 e2e3, 7e2 3701 — 74759 e2e2e7, 3 — 3670 74761 e2e2e6e2e 3702 — 74771 e2e2e5e2, 2 — 3671 74779 e2e2e5e2, 2
7	74527 74531 74531 74561 74567	3662 74573 3662 74587 74597 74609 3663 74611	3664 74623 3665 74653 74687 74699 3666 74707	3667 74713 3668 74719 74729 3669 74731	74747 3670 74761 3671 74771
1,2	366 <sub>1</sub>	361   361	3665		36,79
,2	3690 3691 3691 3692	3693	3696	3698	3700 3701 3702
N	531 853 743 1031	269 879 663 1129 519 1235 587 765 640 1049	799 931 1071 825 1555	1415 1309 1093 953 1403	949 601 857 823 921
N	421 254 163 633 1 542	269 663 519 587 640	284 799 685 931 632 1071 193 825 594 1555	821 1415 541 1309 798 1093 745 953 866 1403	276 412 336 487 653
Exponenten	3646 74257 eze394e3e 74279 eze393e2, 3 3647 74287 eze393e4 3648 74293 eze393, zeeee 74297 eze393, 3, zee	3649 74311 e2e3e2e3, 3 3650 74317 e2e3e2e2, 2ee 3651 74323 e2e3e2, 3; 3ee 74357 e2e3e2, 3; 3ee	3682 — 74363 e2e3e2,4e2 284 799 3683 — 74381 e2e3ee63e2 685 931 3683 — 74418 e2e3ee63, 2e 6321071 3684 — 74411 e2e3eee6ee2 594 1555	3655 74413 220300002, 2, 2 541 1309 3656 74410 220300002, 2, 2 541 1309 74441 2203002, 2020 798 1093 3657 74449 22030020030 745 953 74453 22030020000 866 1403	74471 eze3ee3, 2, 3 74489 eze3ee5, 2e 74507 eze3, 2, 4eez 3658 74509 eze3, 2, 4, 2ee 3659 74521 eze3, 2, 3, 2, 2e
7	74257 74279 74287 74293 74297	74311 74317 74323 74353 74357	3653 74377 74381 3654 74383 74411	74413 74419 74441 74449 74453	74471 74489 74507 74509 74521
"2	3646 3647 3648	3649 3650 3651 3651	3654	3655 3656 3657	3658
,2	3679	3881	3682 3683 3684	3685	3687 3688 3689
N	111 467 417 505 570 899 394 1029 65 413	302 669 279 1009 493 879 554 959 340 829	871 931 557 1007 759	717 839 385 827 945	743 823 419 735 453
N	417 570 394 65	300 400 400 340 340	531 103 103 164	553 225 484 884 884 884 884	522 301 339 278 118
Exponenten	020404, 4 02040204 02040200 020402000	22040004, 2 2204000000000000000000000000000000000	2204.2.202.2 2204.2.2.2.2 2204.2.2.5 2204.20020	2204, 202, 30 2204, 20203 2204, 3, 50 2204, 3, 2, 20	2264, 302, 20 2264, 30202 2264, 4, 40 2264, 40002 2264, 503
Z	73999 74917 74021 74027	74051 74071 74093 74099	74131 74131 74143 74149	74161 74167 74177 74189 74197	74203 74203 74209 74219 74231
,,2	3633	3635	3637 3638 3639 3640	3641	3644
22	3668	3670 3671 3671	3673	3674	3676 1 3677 3678

N	367 1253 708 923 404 745 63 467 804 1093	515 1319 226 967 426 1441 952 1641 374 1359	833 807 307 625 869	440 1039 721 1161 573 695 780 1231 499 1205	669 961 85 547 484 1319 580 713
2	367 708 404 63 804	515 226 426 374 1374	174 211 270 196 514	721 721 573 780 790	669 8 4 8 4 8 5 0 8
Exponenten	3698 75367 ezez, z, z, z, 3 367 rz53	3700 75403 e2e2, 2ee3e2 75407 e2e2, 2ee3, 4 75437 e2e2, 2eee2, 3 75437 e2e2, 2eee22e	75503 e2e2, 2e3e4 3701 75511 e2e2, 2e4e3 75521 e2e2, 3, 7e 75527 e2e2, 3, 5, 3	75539 e2e2, 3, 3e2, 2 3702,75541 e2e2, 3, 3eeee 3703,75553 e2e2, 3, 2e4e 75557 e2e2, 3, 2e2eee 3704,75571 e2e2, 3, 2, 2, 2	3705 75577 e2e2, 3, 2, 3, 2e 3706 75583 e2e2, 3, 2, 6 75611 e2e2, 3ee2e2
	7 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	0 H Z Q	37 113	H 7 3 H 9	1 3 4 6 6 7
7	7536 7537 7538 7539 7539	7540 7540 7543 7543	75503 6202, 75511 6202, 75521 6202, 75527 6202, 75533 6202,	7553 7554 7555 7555	7557 7558 7561 7561
,,2	3698 ————————————————————————————————————	113%		3702	3705
ેય	674 1739 — 600 1601 3727 443 819 3728 7.8 1269 — 6934 1321 3729	160 867 — 733 893 3730 919 1585 3731 785 1131 3733	517 1339 3734 755 967 331 1205 3735 450 1231 3735 264 911 3737	3738 	37.4%
×	674 1739 009 1601 443 819 7.8 1269 934 1321	867 893 1585 1131	1339 967 1205 1231 911	803 553 757 757 883 1365	382 1057 508 597 901 1231 634 1500
2	674 I 1009 I 443 748 I 934 I	160 733 919 1 785 1	517 755 331 450 264	487 360 449 627 523	382 508 901
Exponenten	715 — 75083 e2e2eee22 6741739 — 3685 75109 e2e2ee52 2ee 1009 16013727	3687 75167 e2202020204 3688 75181 e222020020 3689 75193 e2220220 3689 75193 e2220233 20 75209 e222033 2020	3690 75211 e2e2ee3, 2ee2 3691 75217 e2e2ee3ee3 3692 75223 e2e2e93ee3 75227 e2e2e92ea	3693 75253 2222055000 75269 222, 2, 600 3694,75277 2222, 2, 5, 20 3695,75289 222, 2, 4, 2, 20 3696,75307 222, 2, 30002	3723 — 75323 •2•3, 2, 3, 3•2 3724 — 75329 •2•3, 2, 2•5• 3697 75337 •2•3, 2, 2•2•2• 372 — 75347 •2•2, 2, 2••2, 2
Z	75083 75109 75133 75149 75161	75167 75169 75181 75193 75209	75211 75217 75223 75227 75239	75253 75269 75277 75289 75307	75323 75329 75337
72	1 3685	3687 3688 3689		3693 3694 3695 3696	3697
_65		3718	3720	3722	
N	957 949 1203 863 1229	803 1113 3718 676 1169 661 1083 — 254 773 —	474 1213 780 989 362 1295 653 1709 847 1097	944 1541 541 985 235 1037 272 585 503 775	
2	557 609 467 198 452	803 676 661 534 265	474 780 362 363 653	944 541 235 272 503	652 868 637
Exponenten	3672 74797 0202440020 3673 74821 020233300 3674 74827 0202332002 74843 020233024	705 — 74857 22223, 2022 7705 — 74861 22223, 2222 1706 — 74873 222223, 4, 20 74877 2222224, 3	707 — 74891 e2e2e2e3e 474 1213 708 — 74809 e2e2e2e3e 780 989 709 — 74903 e2e2e2e2e3 362 1295 3678 74923 e2e2e2eee2 653 1709 3678 74929 e2e2e2ee2, 3e 847 1097	74933 22222222000 944 1541 3680 74941 0222220040 541 985 3681 74959 02222001, 2, 4 235 1037 75011 02220005, 2 272 585 3682 75013 0222000500 503 775	75017 0222004020 75029 02220033 3683 75037 02020033
2	74797 74821 74827 74831 74843	74857 74861 74869 74873 74887	74891 74897 74903 74929	74933 74941 74959 75011	75017 75029 75037
,,2	3673	3675 3676 3677	3678		3883
,22	3703	37.06	3707	3710	3712

72	1,2	7	Exponenten	N	N	,2	,,2	7	Exponenten	N	N	,22	1,2	Z	Exponenten	N	N
3742 3743 3744 3745		75629 75641 75653 75659	75629 e2e2, 3e2e2e 676 II17I 75641 e2e2, 3e4, 2e 506 735 75653 e2e2, 4, 4eee 454 705 75659 e2e2, 4, 3eez 358 919	676 506 454 358	735 735 705 919	3757	3718 3719 3720	75931 75937 75941 75967	3718 75931 e2eee3ee, 2e2 3719 75937 e2eee3eee4e 75941 e2eee3ee2ee 3720 75967 e2eee3ee	659 892 91	659 801 892 1409 91 597	1	3733 3734 3735	76213 76243 76243 76249	3733 76213 e2eee2, 2e2eee 3734 76231 e2eee2, 3, 3, 3 3735 76243 e2eee2, 3ee2, 2 3736 76249 e2eee2, 3e2, 2e	991 323 377 577 831	1619 1067 1379 1183
3746 3747 3748		75683 75689 75703 75707 75707	75683 222, 403, 2 75689 222, 40022 3709,75703 222, 4023 75707 222, 40302 3710,75709 222, 40400		867 985 841 793	3758 3759 1	3722	75983 75989 75991 75997	•	922 928 353 615 564	222 979 3768 928 1503 —— 353 1281 3769 615 1099 3770 564 695 ——	3768 3769 3770	3737	76289 76283 76289 76303	76259 62662, 4, 3, 2 3737 76261 62662, 4, 266 76283 62662, 662 76289 6266688 3738 76303 6266665, 4	693 150 163 163	·
3749 3750 3751 3751	3711	75721 75731 75743 75767 75767	3711 75721 0202, 5, 2020 — 75731 0202, 5002, 2 — 75743 0202, 505 — 75767 0202, 703 — 75773 0202, 900	505 328 70 92	693 785 409 357	3761	3724	76003 76031 76039 76039	3761 — 76031 e2003, 3, 3, 2 — 76031 e2003, 8 3762 — 76039 e200205, 3 3763 — 76079 e20020204 — 3726 76081 e200222, 2, 30	433 40 229 258 833	997 331 3771 727 3772 1181 1141 3773	3771	3739	76333 76343 76367 76369 76379	3739 76333 2200033020 76343 220003, 203 76367 2200022, 4 3740 76369 2200022003	851 1463 344 127 1 286 1249 1039 1325 648 1763	851 1463 344 1271 286 1249 039 1325 648 1763
3753	3713	75781 75787 75793 75797 75797	3712 75781 2200800 3713 75787 220063 3714 75793 22006030 75797 220060000 75821 220050000	101 179 328 874	307 453 409 639 821	3763	3727	76091 76099 76103 76123	763 — 76091 ezeczez, 3ez 764 776099 ezeczee4, 2 764 7623 ezeczee3, 3 3728 76123 ezeczee22 — 3729 76129 ezeczee2, 4	476 505 396 643 781	476 1319 505 1119 396 1297 643 1751 781 959	3774	3741	76387 76403 76421 76421 76441	3741 76387 226662, 3, 3, 2 3774 76403 226662, 3, 2, 2 3775 76421 22666466 3742 76423 226664, 3	619 590 778 351	619 1419 590 1437 778 1205 351 1129 147 1621
3755	3715 3716 3716	75833 75853 75869 75883 75913	75833 ezeee5, 3, 2e 456 653 3715,75853 ezeee4e2, 2ee 587 999 3716,75863 ezeee4, 2eee2 441 1159 3717,75913 ezeee33e3e2 681 925	587 787 414 189 189		3765	3730 3731 3732	76147 76157 76159 76163	755 — 75157 020020050 755 — 75157 020020050 3731 75159 02002007 756 — 75153 020002, 2, 5, 2	563 454 69 374 265	563 1373 3776 454 839 —— 69 523 3777 374 817 3778 265 1227 3779	563 1373 3776 454 839 —— 69 523 3777 374 817 3778 265 1227 3779	1   374	76463 76471 76481 76487 76493	76463 e2000000000000000000000000000000000000	322 662 416 1002	322 1487 445 1657 662 785 416 1371 002 1711

N	992 1565 949 1533 1049 1339 784 963	247 1167 252 1371 297 959 848 1077 712 1263	948 1549 347 1295 440 1227 490 583 726 1241	211 937 540 1291 869 1409 118 683 404 1069	521 735 931 913 995
N	992 1565 949 1633 1049 1339 1228 1987 784 963	262 262 297 217	948 347 440 726	211 540 669 118 104	33 34 34 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30
Exponenten	187 3806 — 77093 3399292922909 769 — 3769 77101 929299290 715 — 3770 77137 929299993 503 3807 — 77141 92929999999993 1013 3808 — 77153 929229994	176 801 — 3771 77167 62662663, 2, 2 815 1113 — 3772 77191 626626, 4, 3 578 1375 3810 — 77201 626262, 4, 3 574 1445 3811 — 77213 626262, 2, 3, 30	865 3812 — 77237 9200202020 987 — 3773 77239 9200202020 965 3813 — 77243 920020203 625 3814 — 77249 9200203, 50 929 3815 — 77261 9200203, 2, 200	599 1363 — 3774 77263 ezeeze3, 2, 4  104 685 3816 — 77267 ezeeze3ee2, 2  606 1567 — 3775 77269 ezeeze3eee  943 1341 3817 — 77279 ezeeze3e5  147 839 3818 — 77291 ezeeze4eez	613 803 — 3776 77317 e2ee3, 6ee 613 869 3 — 3777 77323 e2ee3, 5ee 233 889 3819 — 77339 e2ee3, 4, 2e2 634 1071 — 3778 7734 72ee3, 3e3, 2 856 1207 3820 — 77351 e2ee3, 3e2, 3
Z	77093 77101 77137 77141 77153	77167 77171 77191 77201 77213	77237 77239 77243 77249 77261	77263 77267 77269 77279	77317 77323 77339 77347 77351
","	3769	3771	3773	3774	3776
2	187 3806 769 — 715 — 503 3807 013 3808	176 801 3771 298 1973 3809 815 1113 809 578 1375 3810 8775 542 1425 3811	664 865 3812 262 987 226 965 3813 1008 1625 3814 764 929 3815	599 1363 — 104 685 3816 606 1567 — 147 839 3818	613 803 — 613 803 — 634 1071 856 1207 3820
N	H	801 973 1113 1375 1425	865 987 965 1625 929	1363 685 1567 1341 839	1305 803 889 1071 1207
N	169 327 406 97 643	278 815 878 878	664 262 226 226 764		
Exponenten	3758 76801 02002, 90 3759 76819 02002, 50, 2 76829 02002, 5, 30 3760 76831 02002, 5, 5	76847 e2ee2, 4ee4 76871 e2ee2, 3e3, 3 3762 76873 e2ee2, 3ee2e 76883 e2ee2, 3eee2, 2	76913 e2ee2, 3, 3, 3 76919 e2ee2, 3, 3e3 76943 e2ee2, 2e3, 4 76949 e2ee2, 2e2eee	408 473 — 3763 76963 22002, 20003, 2 278 899 3802 — 76991 02002, 2006 870 1231 3803 — 77003 02002, 2, 2, 2002 841 1451 — 3764 77017 02002, 2, 202, 20 480 877 — 3765 77023 02002, 2, 205	3766 77029 e2ee2, 2, 3, 2eee 3767 77041 e2ee2, 2, 4, 3eee 77047 e2ee2, 2, 4e3 e2ee24, 2ee 77069 e2ee2ee4, 2ee 77081 e2ee2ee3, 2, 2e
7	76801 76819 76831 76831	76847 76871 76873 76883 76907	76913 76943 76943 76949	76963 76991 77003 77017	77029 77041 77047 77069
,,2	3758 3759 3760 3761	3762		3763 3764 3765	3766
72		47 405 3793 777 983 3794 589 1337 1037 1691 3795 495 1373 3796	719 3797 1687 3798 1499 3799 1741 3800 1051 3801	899 3802 1231 3803 1451 —	3804
N	633 1729 — 170 973 — 387 1331 3792 575 839 — 358 669 —	47 405 3793 777 983 3794 589 1337 037 1691 3795 495 1373 3796	112 719 3797 466 1687 3798 1080 1499 3799 661 1741 3800 372 1051 3801	408 473 — 278 899 3802 870 1231 3803 480 877 — 480 877 —	H )
N	633 I 170 387 I 575 358	47 777 589 xo37 495	1112 466 1080 1080 1372		653 754 321 559 458
Exponenten	7745 76507 220000205 7780 75511 620000205 7787 76519 62000003, 2, 3 3747 76537 62000005, 20 1781 76541 6200000560	3748 76543 ezeeeee8 3749 76561 ezeeee2, 3e3e 3750 76579 ezeeee2, 2e3, 2 3751 76597 ezeee2, 2eee	76607 220002,2,6 76631 2200020003 76649 220002020 3753 76651 220002020 76667 2200020402	76679 220003, 4, 3 76679 220003, 4, 3 76697 220003, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	3795 76753 9200040030 3790 — 76757 9200040000 3756 76771 920005, 3, 2 3757 76777 920005, 9, 2 3791 — 76781 920005920
Z	76507 76511 76519 76537	76543 76561 76579 76597	76697 76631 76649 76651	76673 76679 76697 76717 76717	76753 76757 76771 76777
, x	3745	3748 3749 3750 3751	37.53	3754	3755
,2	3780		3782 3783 3784 3785	3787 3787 3788 3788 3789	1379   379

×	791 709 801 985 1019	869 698 784 1487 199	397 699 268 899 709 977 614 1055 675 1099	295 963 790 1007 634 1129 410 471 349 759	742 1257 376 1399 105 691 464 1033 403 1463
N	433 317 242 576 426	610 201 126 275 370	397 268 709 614 675	200 700 700 700 700 700 700 700 700 700	742 376 105 464 403
Exponenten	3847 78781 e2, 2, 2, 3, 30400 3848 78787 e2, 2, 3, 4, 4, 2 78791 e2, 2, 2, 4, 3, 3 78797 e2, 2, 2, 4, 2, 200 78803 e2, 2, 2, 4, 402, 2	78809 e2, 2, 3, 4e2, 2e49, 2e4	3884 — 788877 02, 2005, 300 	3854 78919 e2, 200303, 3 78929 e2, 20030030 78941 e2, 20030030 78977 e2, 200206 3855 78979 e2, 200205, 2	78989 e2, 200263, 20078   79031 e2, 20020033   3856   79039   62, 200200   79043   62, 2002, 2, 4, 2   3857   79063   62, 2002, 20003
7	78781 78787 78791 78797 78893	78809 78823 78839 78853	78877 78887 78889 78893	78919 78929 78941 78977 78979	78989 79031 79039 79043 79063
,,2	3847	3850	3851 3852 3853	3855	3856 3856 3857
`22	407 1457 — 790 961 — 1002 1727 3878 277 1279 3879 1043 1703 3880	6121583 3881 8651477 8471347 3882 8581193 —	88   88	3888	488 1191 3889 604 877 3890 365 423 — 706 897 3891 358 999 —
$N \mid N$	407 1457 790 961 002 1727 277 1279 043 1703	1583 1477 1347 1193 1381		577 1393 775 1113 1536 973 529 1215 1	
N	407 790 1002 277 1043	612 865 947 858 523	605 229 304 181 140	577 I 775 I 536 529 I 959 I	488 604 365 706 358
Exponenten	368 1331 — 3833 78487 e3, 2, 2002203 550 1159 3867 — 78497 e2, 2, 200004 478 1097 3868 — 78509 e2, 2, 2000002 196 925 — 3834 78511 e2, 2, 2000004 643 839 — 3835 78517 e2, 2, 20000004	306 863 3869 — 78539 e2, 2, 2ee2, 2e	941 — 3839 78577 e2, 2, 2ee4, 3e 147 — 3840 78583 e2, 2, 2ee4e3 879 3871 — 78593 e2, 2, 2, 7e 769 — 3841 78607 e2, 2, 2, 4, 4 793 3872 — 78623 e2, 2, 2, 4, 4	3842, 78643 e. 2, 2, 2, 2, 3, 2e. 23, 2e. 23, 2e. 23, 2e. 23, 2e. 24, 2e. 24, 2e. 2e. 2e. 2e. 2e. 2e. 2e. 2e. 2e. 2e.	5511499 3874 — 78707 e3, 3, 2, 2e3, 2, 2 9001427 3875 — 78713 e2, 2, 2e4, 2e 3731273 — 3846/78721 e2, 2, 3, 56 366 797 3876 — 78737 e2, 2, 3, 3e3e 2361009 3877 — 78779 e2, 2, 2, 3e3e2
	0,0017	0 H W O H	7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	7 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
7	7848 7849 785 785	7853 7854 7855 7855 7857	7857 7858 7859 7860 7860	7864 7864 7865 7865 7869	787 787 7872 7873 7873
22 22	3833 3834 3835	3836 3837 3838	3839 3840 3841	3842 3843 3844 3845	3846
*N	3867	3869	3871	$\frac{8}{2}$	3874 3875 3876 3876
N N	368 1331 — 650 1539 3867 196 925 — 643 839	306 863 835 1347 780 1103 615 749 505 1223	601 941 443 1147 491 879 333 769 230 793	841 531 757 589 589	551 1499 3874 — 900 1427 3875 — 3846 366 797 3875 — 386 797 3876 — 236 1009 3877 —
2	368 650 478 196 643	306 835 780 780 615	601 443 491 333	484 346 298 113 510	351 373 366 236
Exponenten	78167 22, 3, 3000030 78173 22, 2, 300030 78179 22, 2, 3022, 3, 2 78191 22, 2, 3022, 3, 2 3822 78193 22, 2, 3003, 30	3823 78203 62, 2, 3, 36462 78229 62, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 24, 7824 1 62, 2, 3, 2646 3825 78259 62, 2, 3, 264	3826 78277 e2, 2, 3, 3, 3eee 3827 78283 e2, 2, 3, 3, 2ee2 3828 78301 e2, 2, 3, 3e3ee 3829 78307 e2, 2, 3, 4, 3, 2 78311 e2, 2, 3, 4, 2, 3	78317 e2, 2, 3, 40200 78341 e2, 2, 20600 78347 e2, 2, 20500 3830,78367 e2, 3, 204, 5	3834 78437 62, 2, 20200202 3864 78437 62, 2, 202, 2, 200 3832 78439 62, 2, 202, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
7	173	6 2 2 3 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	277 101 107 111	7 4 4 4 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	137
	781 781 781 781 781	3 7 8 2 4 7 8 2 2 4 7 8 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	5 7 7 8 2 7 8 3 7 8 3 7 8 3 3 9 7 8 3 3 9 7 8 3 3 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	8 8 8 8 8	1 2 7 8 4 1 7 8 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
; <sub>2</sub>	88 1 1 1 2 2 8 1 1 1 1 2 2 8 1 1 1 1 1 2 2 8 1 1 1 1	382	3827 3827 3828 3829		8   8   1 8   8   1
·12	3853 3855 3855 3855	3858	385	3860 3861 3862 3863	3865

·					
*	901 669 753 1183	299 981 5141327 7291243 776 991 5611337	849 869 577 711 533	657 667 821 345	489 415 281 113
N	353 158 595 857 1	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	500 614 473 493 238	419 486 124 506 506	211 144 251 97 103
Exponenten	3881 79627 e2, 2e3, 4ee2 79631 e2, 2e3, 4: 4 3882 79633 e2, 2e3, 3e3e 3883 79657 e2, 2e3, 2ee2e	3885 79687 e2, 203003, 3 79691 e2, 203002003 3886 79693 e2, 2030002, 20 79697 e2, 20300003 3887 79699 e2, 20300002, 2	79757 22, 204, 3, 200 79769 22, 204, 2, 2, 2 3888 79777 22, 2040040 3889 79801 (22, 20403, 20 79811 (22, 205, 4, 2	3890 79813 e2. 2e5, 3eee 79817 e2, 2e5, 2e2e 79823 e2, 2e5eeee 79829 e2, 2e5eeeee 79841 e2, 2e6, 4e	3929 79843 e2, 2e6, 3, 2 3929 79847 e2, 2e6, 2, 3 389279861 e2, 2e7eee 3893 79867 e2, 2e8e2 3894 79873 e2, 3, 10e
2	79627 79631 79633 79657 79669	79687 79691 79693 79697 79699	79757 79769 79777 79801 7981	79813 79817 79823 79829	79843 79847 79861 79867 79873
1,2	3881 3882 3883 3884	3885	1 88 88 1	<u>ا   ا   </u>	3891 3892 3893 3894
,2	1 8 1	3920	556 1513 3923 630 913 3923 650 1007	899 1165 359 1037 3925 340 1121 3926 919 1259 3927 515 1407 3928	264 1215 562 737 3929 461 673 — 286 535 — 427 659 —
N		M M M	920 1257 3922 556 1513 3923 630 913 — 650 1007 —	899 1165 — 359 1037 3925 340 1121 3926 3927 352 3927 3528 3528 3528 3528 3528 3528 3528 3528	-
N	510 233 172 408 563	327 327 509 191 488	920 556 630 650 650	899 369 340 919	764 562 461 286 427
Exponenten	44 369 — 3869 79357 e.; 20005000 247 785 3907 — 79367 e.; 2000700 680 1201 3908 — 79379 e.; 202, 402, 2 592 1343 — 3870 79393 e.; 202, 3040	79397 es, ses, 3esee 3871 79399 es, ses, 3es, 3 3872 79411 es, ses, 3, s, s, s, 3873 79423 es, ses, 3, 6 79427 es, ses, se4, s	79433 e2, 202, 202020 920 1257 3922 7979 e2, 204, 2, 79451 e2, 204, 204	3875 79537 e2, 2020002, 30 3876 79559 e2, 20202, 3, 3 3977 79561 e2, 20202, 3, 3 3877 79561 e2, 20202, 2020 3878 79579 e2, 20202020	740 IIS9 3916 — 79589 e., 2e2e3, 2eee 3, 267 I311 3917 — 79601 e., 2e2e4, 3e 348 I267 — 3879 79609 e., 2e2e5, 2e 679 I081 3918 — 79613 e., 2e2e6ee 706 983 — 3880 79621 e., 2e3, 5eee
Z	79349 79357 79367 79379 79393	79397 79399 79411 79423	79433 79451 79481 79493	79537 79549 79559 79561	79589 79601 79609 79613 79621
","	3869	3871 3872 3873	3874	3875 3876 3877 3878	3879
721	193 921 3906 44 369 367 247 785 3907 680 1201 3908 592 1343	<u>8       8</u>	1877 3911 1647 3912 1001 3913 869 3914 541	3	3916
×	921 369 785 785 343	707 1847 3909 274 1255 — 937 1211 — 389 1441 — 018 1735 3910	788 1877 3911 160 1647 3912 815 1001 3913 470 869 3914 71 541	862 1173 578 1565 139 1575 267 1237 632 1531	740 1159 3916 348 1267 679 1081 3918 706 983
X	193 144 680 592	707 1847 3909 274 1255 937 1211 389 1441	788 1877 3911 1160 1647 3912 815 1001 3913 470 869 3914 71 541	862 1173 — 578 1565 — 1139 1575 3915 = 657 1337 — 632 1531	740 767 348 706 706
Exponenten	3858 79087 a. 2002, 304 79103 a. 2003, 8 3859 79111 a. 200005, 3 79133 a. 200003, 300 79139 a. 200003, 300	3860 79147 e2, 20000200002 3861 79151 e2, 200002004 3862 79153 e2, 200002, 2, 30 3862 79159 e2, 200002, 203 79181 e2, 200002, 203	79187 e2, 20000002, 2 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	79241 02, 20002, 3020 79259 02, 20002, 2.20 3865 79273 02, 2000200020 3866 79279 02, 200020004	3903 — 79301 e2, 20003, 3000 3904 — 79319 e2, 20003, 2, 200 3068 79319 e2, 20004, 200 3905 — 79337 e2, 20004, 200
7	79087 79103 79111 79133	79147 79151 79153	79187 79193 79201 79229	79241 79259 79273 79279	79301 4 79309 4 79333 4 79337 4
"2	3858	3860 3861 38627	1   8   8	38,8	386877
2,	3892 3893 3894	3896	3898	3901	3904

N	315 233 423 449	333	50775	20012	78871
		213 911 888 1255 901 1553 344 1281 357 1297	488 1333 429 989 632 1097 370 907 573 943	893 749 919 641 1223	860 1187 533 1393 206 945 461 837 827 1131
N	30 88 89 89 89 89 89 89 89 89 89 89 89 89	8888 9001 344 357	488 429 632 370 573	350 592 520 121 775	860 533 206 461 827
Exponenten	722 933 9956 —— 80471 92, 300200003 89 567 —— 3919 80473 92, 3002002, 20 234 1025 3957 —— 80489 92, 3002, 20020 847 1081 —— 3920 80491 92, 3002, 20020 669 1193 3958 —— 80513 92, 300060	3921 80527 e2, 300003, 4 3922 80557 e2, 30000020 		80651 e2, 3e2, 4ee2  80657 e2, 3e2, 3e3, 3e2, 3e26 8065 e2, 3e2, 3, 3e26 80671 e2, 3e2, 3, 5e26e	371 3967 — 80681 93, 392, 200020 827 — 3928 80683 92, 392, 20002 145 3968 — 80687 92, 392, 2004 515 — 3929 80701 92, 302, 24 400 551 — 3930,80713 92, 30200202
7	80471 80473 80489 80491 80513	80527 80537 80557 80567 80567	80603 80611 80621 80627 80629	80651 e2, 80657 e2, 80669 e2, 3926 80671 e2, 3927 80677 e2,	80681 80683 80687 80701
"2	8   8	3921 3922 3923		3926	3928
"2 2"	722 933 3956 8 567 334 1025 3957 847 1081 ——————————————————————————————————	183 239 3959 949 883 3960 797	899 3961 — 3924 731 3962 — 3924 823 — 3925	701 961 3964 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	371 3967 — 3928 145 3968 — 3929 515 — 3930 551 — 3930
N	933 567 1025 1081 1193	346 1183 — 893 1239 3959 301 883 3960 247 797 —		961 1211 1053 1053 931	174 371 3967 233 827 ———————————————————————————————————
N	234 234 247 669	346 893 201 313	708 326 135 800 451	701 747 385 352 398	174 666 82 82 469
Exponenten	80177 e2, 3, 202, 2, 3 3905 80191 e2, 3. 202, 6 80207 e2, 3, 2000, 4 3906 80209 e2, 3, 2000030 3907 80221 e2, 3, 2000030	80231 e2, 3, 2002, 2, 3 3908 80233 e2, 3, 2002002 3909 80239 e2, 3, 20020 3910 80251 e2, 3, 200402 3911 80263 e2, 3, 2, 2, 4, 3	3948 — 80273 =2, 3, 2, 2, 283 3949 — 80279 =2, 3, 2, 2863 3912 80287 =2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	3914 80329 e2, 3, 2, 3, 2e2e 701 961 3964 —— 3915 80341 e2, 3, 2, 3eeeee 747 1211 3965 —— 3916 80347 e2, 3, 2, 3eee 2 385 1053 3966 —— 80363 e2, 3, 2, 4eee 2 352 931 —— 3926	3953 — 80387 e2, 3007, 2 3917 80407 e2, 304003 3954 — 80429 e2, 300300200 80447 e2, 3003, 6 80447 e2, 3003, 6 80447 e2, 3003, 6
7	2007	233 233 239 251	273 287 309	8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	387 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
,,z	1900 1900 1900 1900 1900	1908 8 8 8 8 9 1 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1	9 8 8 8 8	391588 391688 88888	<u>&amp; &amp; </u>
,2	3946	39477	3948 3949 3950	3951	3953 3954 3955
N	358 347 347 563	659 533 897 983 781	268 493 43 311 724 1167 314 1061 466 1127		432 1019 3953 709 1141 676 953 3954 333 1121 3955 755 1299
N	282 262 242 253 253	202 96 374 321	268 443 144 166	261 859 631 1077 393 1037 142 677 498 841	432 709 676 333 755
Exponenten	79889 e2, 3, 6e3e 79901 e2, 3, 6, 3e 3895 79903 e2, 3, 6, 5 79907 e2, 3, 5e3, 2 3896 79939 e2, 3, 4e4, 2	79943 e2, 3, 4e3, 3 79967 e2, 3, 4ee5 79973 e2, 3, 4, 2, 2ee 79979 e2, 3, 4, 2eee2 3897 79987 e2, 3, 4, 3, 2, 2	4, 500 4, 7 3020000 30002, 3	3, 3, 2, 3, 3 3, 3, 2, 2, 20 3, 3, 30002 3, 3, 300 3, 3, 300 3, 200, 300 3, 200, 300	
2	79889 79901 79903 79907 79939	79943 79967 79973 79979 79987	79997 02, 3, 79999 02, 3, 80021 02, 3, 80039 02, 3, 80051 02, 3,	80071 •2, 80077 •2, 80107 •2, 80111 •2,	80147 80149 80153 80167 80173
,,2	3895	3897	38	3900 3900	3903
72	3930 3931 3932	3934 3934 3936	3937 3938 3940	3941	3943 ———————————————————————————————————

N	891 1129 331 527 845	967 983 957 411 719	735 613 799 661 343	147 447 351 523 625	793 777 589 417 725
×	0 2 4 4 4 0 4 0 0 1 80 1 80 1 80 1 80 1 80	363 395 61 459	881 4 88 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	131 265 67 405 169	200 156 126 226 283
Exponenten	81233 03, 40000003 81281 02, 402, 60 3957 81283 02, 402, 50 81293 02, 402, 5, 2	81299 02, 402, 202, 2 81307 02, 402, 2, 202 81331 02, 40202, 3, 2 81343 02, 40206 81349 02, 403, 3000	81353 e2, 4e3, 2e2e 81359 e2, 4e3, 2, 4 81371 e2, 4e3e2e2 81373 e2, 4e3e3e8 81401 e2, 4e6, 2e	e, y, y, 8 e, y, y, 5, 2 e, y, y, 4, 5 e, y, y, y, 3 e, y, y, y, 3 e, y, y, y, 3 e, y,	81509 e2, 5, 2, 2, 2008 81517 e2, 5, 2, 2020 81527 e2, 5, 2, 303 81533 e2, 5, 2, 500 81547 e2, 5003002
7	81233 81239 81281 81283 81283	81299 3958 81307 3959 81331 3960 81343 3961 81349	81353 81359 81371 3962 81373 81401	3963 81409 3964 81421 3965 81439 3966 81457 3967 81463	81509 3968 81517 81527 81533 3969 81547
"2	3957	3958 3959 3960 3961	1   36	3963 3964 3965 3966	3968 
,2	3993 3994 3995 3995	3997	3998 3999 4000 1001		6   6 6
N	847 821 585 627 307	633 733 1001 959 917	849 1133 907 897	571 945 541 747 969	441 779 634 1091 177 811 428 1033 267 875
$ \overline{N} $	611 501 404 223 42	197 578 423 268 649	184 694 326 655 584	100 358 351 293 602	441 634 177 428 267
Exponenten	3945 81001 02, 4, 3, 20020 3946 81013 02, 4, 3, 3000 81017 02, 4, 3, 4, 20 3947 81019 02, 4, 3, 402 81023 02, 4, 3, 7	3948 81031 e2, 4, 2e4, 3 — 81041 e2, 4, 2e2e3e 3949 81043 e2, 4, 2e2e2, 2 — 81047 e2, 4, 2e2e3, 2 3950 81049 e2, 4, 2e2, 2, 2e	81071 e2, 4, 200004 81077 e2, 4, 2002000 81083 e2, 4, 200302 81097 e2, 4, 2, 2, 2020 81101 e2, 4, 2, 2, 200	81119 2, 4, 2, 25  8131 2, 4, 2, 3002 3952 81157 2, 400500 3953 81153 2, 400402 81173 2, 40030000	3954 81181 e2, 4003, 300 3955 81199 e2, 4002004 3955 81199 e2, 4002004 81203 e2, 4002, 2, 2, 2
2	81001 02, 4, 81013 02, 4, 81017 02, 4, 81019 02, 4, 81023 02, 4,	81031 81041 81043 81047 81049	81071 81077 81083 81097 81101	81119 81131 81157 81163 81173	81181 81197 81199 81203 81223
:22	3945	3948 3949 3950	381	3952 3953	3954 3955
255	3945 3980 3980 3981 3981	38   38   38   38	3984 3985 3986	3988 3989 3990	3991
N	719 1317 1183 745	369 947 160 689 702 1133 395 901 741 1025	989 421 385 623 437	133 431 337 609 583	395 709 589 579 789
×	585 500 683 513 578	369 702 395 741	804 808 808 807 87	120 256 81 379 217	327 450 411 463
Exponenten	80737 ez, 3ezez, 4e 80747 ez, 3ezezeez 80749 ez, 3ezezee 80761 ez, 3ezek, ze 80777 ez, 3ez	2, 3 3, 3 2 2, 3 3, 3, 4 2, 3 3, 2 2 2, 3 3 3, 3	2, 3932, 2, 2 2, 3936 2, 394, 5 2, 394 93 2, 394 83	2, 4, 9 2, 4, 6, 2 2, 4, 6, 4 2, 4, 5	3942 80929 02, 4, 4040 1978 — 80933 02, 4, 402000 3943 80953 02, 4, 4, 3, 20 1979 — 80963 02, 4, 304, 2
7	3931 80737 3932 80747 3933 80761 80777	3934 80779 80783 80789 3935 80803 3936 80809	80819 80831 3937 80833 80849 3938 80863	80897 80909 3939 80911 3940 80917 3941 80923	3942 80929 
24	3931 3933 3933	3934 3935 3936	3937	9 6 6 6	3943 3943 3944
·w	3%   3%	3971	3973 3974 ————————————————————————————————————	3976	3978

72	= 12	Z	Exponenten	X	- <b>-</b>	255	",2	Z	Exponenten	×	N	22	1,2	2	Exponenten	N	N
\$     \$0\$	3970		4 4 4 4		531 585 763 817			81817 81839 81847 81853	02, 7, 2, 2, 20 02, 7004 02, 70003 02, 70003			4030 4031	3995	3995 82051 — 82067 — 82073 3996 82129	3995 82051 000605, 2 82067 00060202, 2 	135 244 376 381	293 577 531 487
4004 4009 1010 1010	3972	81569 81611 81619 81629 81637 81647	02, 500.040 02, 502, 2002 02, 502002, 2 02, 5020300 03, 503, 2000	4 10 8 8 9 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	499 797 781 619 641	1	3983 3984	81883 81883 81899 81901 81919	2, 8, 2, 2 2, 8 22 2, 9 22 2, 9 22 2, 14	4 000 1 60	315 299 239 211 43	1 63   63	3998	2997 82139 3998 82153 — 82163 3999 82171 4000 82183	3997 82171 0000, 2020 3988 83153 0000, 3020 — 82163 0000, 4, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,	232 395 135 113	527 527 521 455 371
4011 4013 4013	3974	81649 81667 81671 81677	2, 5.4, 3. 2, 6, 6, 2 2, 6, 5, 3 2, 6, 4, 2 2, 6, 3, 2	295 117 98 256 338	387 253 313 433		3986 3987 3988 1989	81931 81943 81943 81953 81953	8 8 9 9 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	67 125 61 142 55	169 157 215 171 249	1 \$ 1 \$ 1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	4001 82189 	4001 83189 00054, 200 4002 83207 000593, 5 — 82317 0005020020 4003 82319 0005020002	311 368 77 556 345	525 465 405 767 901
4104	3976	81701 81703 81707 81727 81737	2, 6, 2020 2, 6, 202, 3 2, 6, 2002 2, 6, 2000 2, 6, 2, 6 2, 600202	382 161 262 14 E	663 685 539 539	<u>5   5  </u>	3   3   3	81971 81973 82003 82007	8, 2, 2, 2 8, 2 0 0 7, 2 0 7, 2 0 7, 2 0 7, 2 0	136 217 199 124	327 353 473 447 421	2   2	1 5 5 6	4004 82231 4005 82231 — 82241 4006 82261	8223	134 191 305 322 641	613 707 553 379 1037
4019 4019 4019	1017 1018 — 3978 1019 — 3979	81749 3978 81769 	2, 6000000000000000000000000000000000000	438 274 381 318 91	709 337 529 551 295	4 6 2 9 1 1 2 1 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	3994	4027 — 82013 4028 — 82031 4029 — 82031 4029 — 82037 — 3994 82039	007, 2, 200 007, 204 007, 300	222 291 262 95	395 461 337 429 357	1 4038	100 100 100 100 100	82267 82279 82301 82307 82339	4007 8225 00050022 2, 3 4008 82279 00050050 2, 3 82301 00050050 2, 5, 2 4009 82339 0005, 2003, 2	339 242 202 327	923 769 447 441 745

>	747 379 331 637 849	941 779 455 815 999	971 851 385 859 937	884 1425 633 1121 856 1475 499 591 772 1073	259 557 220 699 504 1189 827 1331 465 1253
N	205 306 115 271 539	3,78 3,88 1,88 1,87 1,87	399 226 53 53 739	884 633 856 499 772	2 2 2 2 2 3 4 2 4 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
Exponenten	004, 4003 004, 5, 4 004, 702 0030502, 2	00004, 2000 00004, 302 0000006 0000000 00000000000000000000	00303, 3, 2, 2 00303, 303 00303, 7 003020400	83093 000302020000 884 1425 83101 00030200, 300 633 1121 83117 0003020000200 856 1475 83137 000302, 2, 50 499 591 83177 000302, 3, 50 1073	4043 83207 00030005, 3 220 599 83207 00030005, 3 220 599 83219 00030003000 4044 83221 000300000 827 1331 4045 83227 00030003 202 465 1253
2	82903 82913 4032 82939 4033 82963 4034 82981	82997 83003 83009 4035 83023 4036 83047	4037 83059 — 83063 4038 83071 4040 83089	83093 4041 83101 83117 4042 83137	4043 83207 83207 83219 4044 83221 4045 83227
1,2	4032 4033 4034	11155	4038 4039 4040	12121	21122
,2	4068 4069 	4070 4071	4073	4075 4075	4077 4078
N	697 903 776 1267 364 1013 725 993 409 1117	581 783 611 901 977	763 1053 622 971 273 895 470 1213 560 999	408 937 740 1027 166 785 256 723 301 557	655 1057 104 565 250 559 514 705 323 837
N		307 504 397 397	763 622 273 470 560	408 740 166 256 301	655 104 250 314 323
Exponenten	00044000000000000000000000000000000000	4024 82657 0004003, 40 4025 82699 0004, 2, 4002 82721 0004, 2, 204 4026 82723 0004, 2, 203, 3	9994, 2, 299929, 1053 9994, 2993999 622 971 9994, 2993, 3 273 895 9994, 299399 560 999	004, 202, 3, 2 004, 2020020 004, 20204 004, 20402	82837 0004, 3, 2000 82847 0004, 3, 2, 5 82883 0004, 4, 2 82889 0004, 4, 2020 82891 0004, 4, 2020
Z	4021 82609	4024 82657 4025 82699 83721 4026 82723	4027 82729 —— 82757 4028 82759 —— 82763	82787 82793 82799 82811 4029 82813	1065 108837 1066 108883 1067 108889 1067 108889 1067 10889
1,2	4021 4022 4023	4025 4025 4026	4027 1028	4029	103   103
72	4054	1056	40.58 40.59 40.60	4063 4063 4064	1000
N	907 671 651 645	659 491 625 427 851	769 865 783 619 681	421 1085 500 613 387 887 579 949 48 353	319 367 223 717 398 1019 127 683 872 1205
N	526 145 452 412 321	60 4 4 8 4 6 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	2 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	500 387 579 48	319 367 223 717 398 1019 127 683 872 1205
Exponenten		82303 0005, 302, 20 82421 0005, 5000 82457 000404, 2, 20 82463 000404, 5		4015 82507 000402002 4016 82531 000402, 2, 40 4017 82549 000402, 3 2 82559 000402, 7	440063 4404,3 4402,5
2	82349 4010 82351 82361 82373 4011 82387	4012 82393 82421 82457 82463 	4013 82471 4014 82483 — 82487 — 82493 — 82499	4015 82507 82529 4016 82531 4017 82549 82559	4018 82561 4019 82567 82571 4020 82591
.,2		<u> </u>	4014 1014	1010	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
,z	9   5	4043 4045 4045	1047 4048 4049	\$     \$	1   5   5

7,	,,2	7	Exponenten	N	N	,2	"2	7	Exp	Exponenten	N	N	*2	,,2	2	Exponenten	N	×
6201	188	83231	83231 00030003, 5	142	749	4090	18	83477	63,	83477 0003, 2, 40000		630 1013	4102		83813	0003, 302, 2000		1181
4080		83243	83243 0003000000	632	632 1651		Ī	83537	3, 2,	83537 0003, 2, 200030	846	846 1079	4103	12	83843		4 4 0 4 4	539
	47	83257	4047 83257 90030002, 3, 20 83267 900300004, 2	476	799 1147 476 1055	100	<u> </u>	53557 83561	8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8	4001 83557 6003, 2, 2,2,200 857 1359 83561 6003, 2, 2, 20020 918 1273	918	857 1359 918 1273		4074	4074 83857 4075 83869	•••3, 4, 2•3• •••3, 4, 2, 3••	561 467	713 829
<u> </u>	1048	83269	4048 83269 000300003000	849	849 1325	Ī	4062	83563	•••3, 2	4062 83563 6663, 2, 2, 26662 563 1481	2 563	1481	4104		83873	0003, 40040	478	583
<u>2</u>	8	83273	4040 83200 000300002020	H		4093	<u> </u>	83579	83579 0003, 2, 2, 4 83501 0003, 2004.	83579 0003, 2, 2, 402 83501 0003, 2004, 3	330	929	4105	Π	8389 I	0003, 402, 2, 2	384	931
188	ا ق ا	83311 83339	4050 83311 0003000204 	23 188		4095	11	83597 83509	6, 6,	83597 eee3, 2ee3, 2ee 83609 eee3, 2ee2, 2, 2e	•			4076	4076 83911 83921	6003, 5, 3, 3	185 450	613 577
	1051	83341	4051 83341 0003002, 3, 200	715		1	4063	33617	963, 2	4063 83617 0003, 2000040		887		-	83933		334	599
<u>5  </u>	522	83357 83383	4052 83383 0003002, 2, 300	331	676 1199 331 1235	4097 4098	<u> </u>	83621 33639	4 6 9 6 9 6	83621 <b>6663, 2666266</b> 83639 <b>6663, 266626</b> 3		984 1555 352 1311	4109	11	83939 83069	•••3, 6, 3, 2 •••2•10•	218	505
1 8	1053	83389	4053 83389 00030020400	500	929		4064	33641	963, 2	4064 83641 0003, 20003, 20 4064 83643 0003, 202, 3000		801 1153	.   =		4077 83983		85	351
· 1	1054	33401	4054 83401 0003003, 2020	787		4099	Ì	33663	83663 0003, 202, 2,	9, 2, 4		230 1017		Ī	84011	96295	848	600
13	1055	83407	4055 83407 0003003, 2, 4	80		Í	4066	83689	3, 2	4066 83689 0003, 2030020	773	773 1075		Ī	84017		474	611
4080 4087		83417 83423		1168	748 1005 114 659	1 5	<u> </u>	83701 83717	83701 0003, 204000 83717 0003, 3, 5000	4007 83701 0003, 2040000 83717 0003, 3, 5000	579 418	953 645	4114		84047	00020402, 4	178	178 775 764 1235
1	1056	8343ı	4056 83431 0003004, 2, 3	253	873		4068	4068 83719 0003,	9993, 3	3, 5, 3	191		4116	1	84059	00020400202	408	1109
1	1057	83437	4057 83437 00030040200	531	923	Ì	4069	83737	<b>•••3</b> , 3	4069 83737 0003, 3, 3, 2, 20		941	١		84061	4078 84061 00020400300	523	931
	1058	83443	4058 83443 0003005, 2, 2	303	745	ÌÌ	4070	33761	4070 83761 <b>000</b> 3, 3, 2, 2,	4070 83761 <b>000</b> 3, 3, 2, 2, 3 <b>0</b>	689	891	;		84067	4079 84067 666264, 2, 3, 2	397	900
4088		83459	83459 0003, 2, 7, 2	186	397	4101		33777	83777 0003, 30050	9050	462			4080	84121	4080 84121 00020302, 2, 20	829 1171	171
1089	Ť	83471	83471 0003, 2, 5, 4	136	269	Ī	4072	33791	4072 83791 0003, 3002,	1002, 4	213	935		4081	84127	4081 84127 00020302, 5	145	777

_	A 0 m 10 10	1 M L C C	0 5 0 2 11	10010	0000
N	689 817 787 1879 1141 1623 836 1495 1032 1435	226 1081 324 923 362 411 215 909 928 1309	683 1649 917 1317 1140 1559 721 1861 672 1831	710 1031 389 1099 650 1009 291 941 813 1055	329 1229 492 1177 443 549 231 799 394 519
N	689 787 11411 836	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	917 1140 721 672	710 389 650 291 813	320 443 231 394
Exponenten	920 1193 — 4104 84673 •••20•••2, 5 3741395 — 4105 84691 •••20••22, 2 7671201 — 4106 84697 •••20••22, 2 2321029 4146 — 84701 •••20••233•2 9581553 4147 — 84713 •••20••33•2	84719 0002000304 84731 0002002.70 84737 0002002.70 4107 84751 0002002.4,4	259 259 — 4108 84787 •••2••2, 2, 2, 2, 3, 477;1123 — 4109 84793 •••2••2•2, 2, 3, 2, 308;10934152 — 84809 •••2•2•2•2•2 586 1033 — 4110 84811 •••2•2•2•2•2 1022 1409 4153 — 84827	635 1657 4154 84857 00020024, 20 9621567 4111 84859 0002002402 4061337 4155 84869 0002003, 400 2971297 4112 84871 0002003, 4, 3 9891711 4113 84913 0002003, 4, 3	4114 84919 eee2ee4ee2, 2 4115 84961 eee2ee5, 4e 4116 84967 eee2ee5, 4e 4116 84967 eee2ee5, 2, 3
2	84673 84691 84697 84701 84713	84719 84731 84737 84751 84751	84787 84793 84809 84811 84827	84857 84859 84869 84871 84913	84919 84947 84961 84967 84977
,,2	4105	;			4   5
,2	1 1 2 4	351 4148 685 4149 037 4150 775 865 4151	1 5   5	4155	1136
×	920 1193 —	494 1351 4148 554 685 4149 745 1037 4150 161 775 352 865 4151	259 289 — 4771123 — 3081093 4152 — 5861033 — 0221409 4153	635 1657 962 1567 406 1327 297 1297 989 1711	2051 1765 1961 2089
$\overline{N}$ N	920 374 767 232 958	494 554 745 161 352	259 477 308 308 586 1022	635 962 1406 197 1989	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
Exponenten	528 1201 4131 — 84401 900202, 202, 30004 1387 4132 — 84407 900202, 30300 413 919 4133 — 84437 900202, 3, 2, 4 588 1403 4134 — 84437 900202, 3, 2, 4	94915374135 — 84443 •••222, 30202 134. 7634136 — 84449 •••222, 4, 4 3091061 — 4095 84457 •••222, 4022 391 957 — 4096 84463 •••222, 404 298 5554137 — 84467 •••222, 5, 2, 2	339 — 4097 84481 •••2••8• 787 — 4098 84499 •••2••42, 2 817 4138 — 84503 •••2••4•3 1235 4139 — 84509 •••2••4, 3•• 1407 4140 — 84521 •••2••63	7021811 — 4099 84523 •••20003 2000 77318414141 — 84533 •••20003 2000 113916174142 — 84551 •••2000203, 3 8441505 — 4100 84559 •••20002, 4 1831027 — 4101 84589 •••2002, 2020	4128 — 84347 ***********************************
2	84401 84407 84421 84431 84437	84443 84449 84457 84463 84467	84481 84499 84503 84509 84521	84523 84533 84551 84559 84589	84629 84631 84649 84653 84659
2,2	\$	5 5	\$ \$	6   1 1 1	1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
-21	4131 4132 4133 4134	4135	1138	12211	\$1123
×	528 1201 4131 — 2004 1387 4132 — 4094 413 919 4133 — 588 1403 4134 —	9491537 4135 134 763 4136 309 1061 — 391 957 —	41 339 — 194 8174138 347 1235 4139 4181407 4140	702 1811 773 1841 139 1617 844 1505	863 863 1417 1679 1507
×	528 1 1004 1 2381 413 5881	1346 1349 1399 1391	401 1404 1474 1781	702 773 1139 183	396 467 1062 1062 445
Exponenten $\overline{N}$ N	4118 — 84131 0002030003, 2 4119 — 84137 00020300002 4120 — 84143 0002030004 — 4082 84163 000203, 2, 4, 2 4121 — 84179 000203, 2002, 2			4126 — 84299 6002020002 7021811 — 4099 84523 60020003, 2000000000000000000000000000000	4128 — 84347 •••222•6402 4129 — 84377 •••223,2,2,3,4,130 — 84359 •••22,200200000000000000000000000000000
Z	84131 84137 84143 84163 84179	84181 84191 84199 84211 84221	84223 84229 84239 84247 84263	84299 84307 84313 84317 84319	84347 84349 84377 84391
2.2	1     80	4084 1084 1085	408 4087 1088	1689 1090 1091	\$     \$
72	4118 - 4120 - 4121 - 4	4123	4124	1   1   1	4139

N	731 1257 418 925 898 1227 693 1235 666 817	1243 1189 1251 949 911	504 1291 698 1237 574 1307 989 1563 450 1253	326 1075 229 1013 951 1541 730 1161	670 1079 530 643 616 885 347 963 632 987
N	731 1 418 898 1 693 1	364 I 488 I 763 I 337 283	504 508 574 989 450	326 229 351 730	670 530 616 532
Exponenten $ \overline{N} $	295 839 — 4143 85549 9002, 3, 300200 731 1257 468 1387 4182 — 85577 9002, 3, 2004, 2 418 925 468 1193 4182 — 85577 9002, 3, 200200 898 1225 971 1255 — 4144 85597 9002, 3, 200300 693 1235 403 1493 4184 — 85601 9002, 3, 2, 2, 40 666 817	668 7874185 — 85607 •••• 3, 2, 3, 2, 354 1243 81419394186 — 85619 ••• 2, 3, 2, 3, 488 1189 3172131 — 4145 85621 ••• 2, 3, 2, 3•• 763 1251 868 1133 — 4146 85627 •• 2, 3, 4, 42 337 949 603 1471 — 4147 85639 •• 2, 3• 4, 3 283 911	7491087 4187 85643 6002, 3003002 71111034188 85661 6002, 3002, 300 61914114189 85667 6002, 30003, 2 6461565 4190 85691 6002, 3000200 0191665 4190 85691 6002, 300030	100 673 4191 — 85703 0002, 302, 3, 3 3271081 — 4149 85711 0002, 302, 3, 3 5541435 — 4150 85717 0002, 30200000 7811335 4192 — 85733 0002, 303, 2000 608 1089 4193 — 85751 0002, 30403	154 743 4194 — 85781 6002, 4, 30000000000000000000000000000000000
2	85549 85571 85577 85597 85601	85607 85619 85621 85627 85627	85643 85661 85667 85669 85669	85703 85711 85717 85733 85733	85781 85793 85817 85819
"2	3   1   1	1145	11121	1 5 5 1 1	11121
, 2	295 839 — 4143 468 1337 4182 — 9711255 — 4144 4031493 4184 —	£ 5	749 1087 4187 — 619 1411 4189 — 646 1565 — 4148 1019 1665 4190 — 619 1619 6190 — 619 1619 6190 — 619 1619 6190 — 619 1619 619 619 619 619 619 619 619 61	100 6734191 — 4149 3271081 — 4149 5541435 — 4150 78113354192 — 60810894193 —	195
>	337 387 1193 1255	668 787 814 1939 (317 2131 868 1133 603 1471	103 141 1565 1565	673 1435 1335 1089	
×	295 468 971 403	668 868 603	749 711 619 646 1019	327 327 781 608	154 483 456 402 375
Exponenten $\overline{N}$ $N$ $z'$ $z''$ $Z$	663 — 4130 85243 eee2, 2, 2, 562 501 4170 — 85247 eee2, 2, 2, 8 591 4171 — 85259 eee2, 2002, 2, 30 889 — 4131 85303 eee2, 2002, 2003	6641141 4172 — 85313 0002, 2000050 626 897 4173 — 85313 0002, 20000002, 2 718,1119 — 4133 85333 0002, 200000000 913,1295 4174 — 85361 0002, 20003, 30 149 829 — 4134 85363 0002, 20003, 3, 2	5121173 — 4135 85359 0002, 20004, 20 8751387 — 4136 85,81 0002, 202, 4000 2141005 — 4137 85,411 0002, 202003, 2 7721205 4175 — 85,427 0002, 20202, 2, 2 436, 501 — 4138 85,429 0002, 20202000	2, 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2, 20404 2, 3, 50 20 2, 3, 402, 2
Z	85243 85243 8525 8525 85293	85313 8533 85333 85363 85361	8538 8538 8541 8542 8542	85439 85447 85447 85453 8545	85487 8551 8551 8551 8552 8553
1,2	4131	1   1   1   1   1   1   1   1   1   1	4135 4137 4138	1 4 1 3 1	11112
'n	1177	4173	1112	4177	5   5
×		897 1119 1119 829	5121173 8751387 2141005 7721265 436. 501	1335 1603 1565 1405	1229 1321 1237 1329 1153
z	269 4 4 69 393 393		878 875 214 772 436	788 593 1026 268	360 360 766 701
Exponenten $\overline{N} N z' z''$	4117 84979 0002006, 2, 2 4118 84991 0002010 4119 85009 0002, 2, 5, 300 4120 85021 0002, 2, 5, 300 4121 85027 0002, 2, 403, 2	4158 — 85037 0002, 2, 400200 4159 — 85049 0002, 2, 4, 3, 20 4150 — 85061 0002, 2, 30300 4123 85087 0002, 2, 3002, 20	4161 — 85091 6002, 3, 3, 2, 3, 2 512 II 73 — 4124 85093 6002, 3, 3, 2000 875 I 387 4162 — 8509 6002, 3, 3004 214 I 005 4163 — 85109 6002, 3, 30000 772 I 265 4164 — 85121 6002, 2, 2060 436 501	4165 — 85133 6002, 2, 203, 200 7881335 4176 — 85439 6002, 20206 — 4125 85147 6002, 2. 202, 202, 203, 3, 3 — 4126 85159 6002, 2. 202, 203, 2156 4177 — 85451 6002, 203, 203, 4166 — 85193 6002, 2, 2, 2, 20201026 1405 — 4140 85453 6002, 203, 2004 4167 — 85199 6002, 2, 2, 2, 4, 268 1183 4178 — 85469 6002, 2039390	— 4127 85201 6002, 2, 2, 2030 9511229 4179 — 85487 6002, 20404  4168 — 85223 6002, 2, 2, 2030 730,1321 — 4141 85513 6002, 3, 5020  4169 — 85229 6002, 2, 3, 3, 3, 3, 360,1337 4180 — 85517 6002, 3, 5, 200  4169 — 85229 6002, 2, 2, 30200 766,1329 4181 — 85533 6002, 3, 402, 2  4129 85237 6002, 2, 2, 40000 701 1153 — 4142 85531 6002, 3, 4, 202
2	84979 84991 85009 85021	85037 85049 85061 85081	85091 85093 85103 85103	85133 85147 85159 85199	85201 85213 85223 85223 85237
z' z''	4 4 4 4 4 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2	4158 — 4159 — 4160 — 4122 — 4123	4161 4162 4163 4164 1164	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	127
<b>'</b> %	11111	4158	4161 4163 4164	4165	1   8   1   1   1   1   1   1   1   1

N	406 757 364 783 961 1215 1160 1867 652 1757	1427 1969 144 919 610 2207 877 2309 322 1521	589 1089 479 1047 1081 1471 814 1929 1128 1463	039 1497 526 1175 154 1871 437 1591 751 1345	505 1167 416 1023 641 1057 259 743 285 319
×	406 364 961 1160	1427 144 610 877 322	589 479 1081 814	1039 1497 526 1175 1154 1871 437 1591 751 1345	505 416 641 259 285
Exponenten	833 4257       87293       9000000000000000000000000000000000000	548 1439 4261 — 4219 87337   000000000000000000000000000000000	983 1253 — 4221 87421 000000000000000000000000000000000000	9251567 — 4224 87481 000000023, 20 1039 1497 77318394266 — 87491 00000003, 4, 2 5261175 8832311 4267 — 87509 0000000300001154 1871 2762083 — 4225 87511 0000000030003 437 1591 4691745 — 4226 87517 0000000033300 751 1345	820 1957 — 4227 87523 00000004, 3, 2 132332143 4268 — 87539 00000005, 2, 2 11921695 — 4228 87541 00000005000 9091577 — 4229 87547 0000000000 778 1019 — 4230 87553 0000002, 80
Z	87293 87299 87313 87317	87337 87359 87383 87403	87421 87427 87433 87443	87481 87491 87509 87511	87523 87539 87541 87547 87553
$\overline{N}$ $N$ $z'$ $z''$	1   21   1	21   21   21   21   21   21   21   21	4221 4223 1223	1224 1225 1225	4227 4228 4229 4239
~	833 4257 — 967 4258 — 373 — 4218 223 4259 — 619 4260 —	1 5 5 1 5	1   1   2   2	1857	18
N		611 1429 603 1025 1177	983 1253 — 789 1405 — 920 1591 — 249 1169 4265 642 1643 4265	925 1567 773 1829 883 2311 1276 2083 469 1745	820 1957 32321434 1921695 9091577 7781019
X	360 607 197 202 459	118 548 97 464 270	983 789 920 249 642	925 773 883 1276 469	820 1323 1192 192 909 778
Exponenten	1298 2051 4245 — 87011 000002, 5, 3, 2 4661735 — 4205 87013 000002, 5, 2000 129 853 — 4206 87037 000002, 80 1182 1619 4246 — 87041 00000090 487 1769 — 4207 87049 0000006020	766 945 4247 — 87071	534 1481 — 4210 87121 000000300300 555 1231 4251 — 87149 0000003, 2020 1181 1615 — 4211 87151 0000003, 204 1100 1807 4252 — 87179 00000003, 204	3.3 2141 — 4212 87181 000002222 3 3 3 3 128 3 — 4213 87187 000002222 3 3 3 41007 — 4214 87211 000002002000 5 5 0 1517 — 4215 87221 000002002000 5 5 0 1517 — 4215 87223 000002002003	418 1417 4254 — 87251
Z	87011 87013 87037 87041 87049	87071 87083 87103 87107 87119	87121 87133 87149 87151	87181 87187 87211 87211 87223	87251 87253 87257 87277 87281
",2	1205	1   5	2   12	tara tara tara tara	12   12
,,2 ,2	1   1   1	1249 1249 1250	1251	11121	1254 1255 1256
$\overline{N}$ N	2051 1735 853 1619 1769	766 945 4247 229 1095 4248 508 1245 — 4208 50 429 4249 — 734 1297 4250	555 1231 4251 1181 1615 1060 1807 4252	13232141 5391383 2341007 86510994253 5601517	1417 1183 1133 1075 933
N	1298 466 129 1182 487	766 229 I 508 I 50	534 555 1181 1060	1323 539 865 865	418 255 786 686 728
Exponenten	4239 — 86693 ***********************************	4232 — 86753 •••••2••3, 4• 423 — 86771 •••••2••4, 2, 2 4234 — 86783 ••••2••8 4235 — 86813 ••••2, 2, 3, 3••	4236 — 86837 — 66843 — 2, 2, 2000 4237 — 86843 — 2, 3, 300 — 4199 86851 — 2, 2004, 2 — 4200 86857 — 2, 2000 4238 — 86861 — 2, 2000		4241 — 86951 ************************************
7	86693 86711 86719 86729 86743	86753 86767 86771 86783 86813	86837 86843 86851 86851 86857	86869 86923 86927 86929 86939	86951 86959 86969 86981 8693
, z , z	1 1 2 1 6 1 1	E	1   5 5	1 2   5	
'n	4239 4230 4231	4232 4233 4234 4235	4236 — 4237 — 4199 — 4200 4238 —	1   2   3	4241 — 4242 — 4243 — 4243 — 4244 —

-	A 4 4 W 4		<b>***</b>		m > 0 m >
2	345 607 599 975 407 477 806 1117 609 793	588 1391 158 847 935 1611 878 1137 448 997	795 1243 624 769 712 1235 339 383 251 797	784 991 577 1361 520 1441 058 1803 701 1909	463 1583 732 1927 256 1099 1130 1823 437 1567
N	345 599 407 806 609	288 158 935 178 878 448	795 624 712 339 251	784 991 577 1361 520 1441 1058 1803 701 1909	
Exponenten	4255 88117 60002, 6, 300 4256 88117 60002, 5, 2000 4257 88129 60002, 4650 88169 60002, 4, 20020 4258 88177 60002, 4, 3, 30	88211   00002, 3022, 2 88223   00002, 302, 5 88237   00002, 300020 88241   00002, 3002, 30 88259   00002, 3, 4, 2	848 4469 — 4260 88261 60002, 3, 3, 300 347 981 4300 — 88289 60002, 3, 3, 40 253 819 4301 — 88301 60002, 3, 3020 3261171 — 4261 88321 60002, 2070 785 1111 — 4262 88327 60002, 205, 3	884,1223 — 4263,88337 ——————————————————————————————————	769 — 4265 88423 ••••2, 2••2, 2, 3 967 4305 — 88427 ••••2, 2, 3, 4 727 4306 — 88463 ••••2, 2, 3, 4 353 4307 — 88469 ••••2, 2, 2•••• 397 — 4266 88471 ••••2, 2, 2••3
Z	88093 88117 88129 88169 88177	88211 88223 88237 88241 88241	88289 88301 88321 88321	88337 88339 88379 88397 88411	88423 88423 88463 88469 88471
"2	1255 1256 1257 1258	1259	1261	4263 4264	1265
"" '"			1838	283 4302 223 — 043 4303 451 4304 683	1305
N		582 1057 4296 8691357 4297 1036 1417 274 1203 4298 3941349 4299	848 1469 — 347 981 4300 253 819 4301 3261171 —	884 1 1 2 8 3 4 3 0 2 8 8 4 1 2 2 3 3 7 9 1 0 4 3 4 3 0 3 3 7 8 4 5 1 4 3 0 4 3 0 5 6 8 3 4 5 0 4 1 4 5 0	769 — 967 4305 727 4306 353 4307 397
	760 1251 316 901 295 637 864 1219 937 1613	5821 8691 0361 2741	848 1469 347 981 253 819 326 1171 785 1111	811 I 884 I 279 I 378 305	2 4 0 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4
Exponenten	468 719 4280 — 87797 *********************************	609 I 103 4283 — 87869 66663, 2, 466 426 1393 — 4247 87877 666636366 648 1785 4284 — 87881 666636223 31 I 1359 4285 — 87887 6666362, 4 210 1717 4286 — 87911 66666362, 4	903 1913 4287 — 87917   00000302020 865 1061 — 4248 87931   000003,423 358 1351 — 4249 87943   000004, 4, 3 81 601 4288 — 87959   000004, 2003 452 985 — 4250 87961   000004, 2003	661 1693 — 4251 87973 ••••••4••2•• 1079 1369 4289 — 87977 ••••••4000000000000000000000000000000	5931651 4291 — 88007 000005, 3, 3 128 849 4292 — 88019 000005, 2 4311421 4293 — 88037 000006, 200 478 1737 — 4254 88069 0002, 800 713 935 4294 — 88079 00002, 7, 4
Z	87797 87803 87811 87833 87853	87869 87877 87881 87887 87911	87917 87931 87943 87959 87959	87973 87977 87991 88001 88003	88007 88019 88037 88069 88079
""	11212	12111	12213	15   25   25   25   25   25   25   25	1     5
,x	719 4280 — 685 4281 — 779 — 4245 273 4282 — 537 — 4246	609 1103 4283 — 4247 1248 1785 4284 — 4247 311 1359 4285 — 1210 1717 4286 —	128		5931651 4291 128 849 4292 431 1421 4293 478 1737 — 478 1737
N	719 685 779 1273	1393 1393 1785 1359	1913 1351 601 985	661 1693 079 1369 288 2077 546 1847 429 1975	1651 849 1421 1737 935
N	468 217 149 562 975	609 1103 4283 426 1393 —— 1048 1785 4284 3 11 1359 4285 1210 1717 4286	703 865 838 81 81 81 81	1079 1288 1288 546	593 128 431 478 713
Exponenten	269 — 87557 ••••••2, 6••  4232 87559 •••••2, 6, 3  270 — 87587 ••••2, 4, 5  270 — 87587 ••••2, 393, 2  4233 87589 ••••2, 392••	4271 — 87623 6000002, 3, 400 4272 — 87623 6000002, 203, 3 4272 — 87629 6000002, 202, 200 4273 — 87641 600002, 202, 4			4278 — 4242 87739 ***********************************
7	87557 87559 87583 87583 87587 37589	87613 87623 87629 87631 87641	87643 87649 87671 87679 37683	87691 87697 87701 87719	87739 87743 87751 87767 87767
1,2 ,2	4232 K	\$     \$	1 23   23	<u> </u>	<u> </u>
-2	4269 — 4231 — 4231 4270 — 4233	4271 — 4272 — 4272 — 4235 4273 —	4274 4274 4275 4275	1 427	12/2/2

_	533 811 587 453 193	601 755 719 493 819	76 26 26 29 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30	685 267 931 567 613	95
N N				372 685 495 1267 218 931 972 1567 936 1613	977 1595 818 1177 823 1405 382 1387
2	430 466 121 157 18	357 321 511 95		272 218 218 9721	3881
Exponenten		4295 89101 00003, 6, 200 4297 89107 00003, 52, 2 4298 89113 00003, 5, 2, 20 4299 89119 00003, 5, 5 69123 00003, 403, 2	678 1637 — 4300 89137 66663 4, 2, 3 6 647 763 4335 — 89153 6669 3, 2, 2 667 1745 1745 — 89189 66663, 3, 2, 2 667 1745 — 4301 89203 66663, 3, 3, 2, 2 667 1745 — 4302 89209 66663, 3, 4, 2 6	317 1201 4337 — 89213 eeee3, 3, 5ee 372 685 791 1077 — 4303 89227 eeee3, 2e3ee2 4951267 693 8454338 — 89237 eeee3, 2e2eeee 972 1567 626 1641 4340 — 89261 eeee3, 2eeee2ee 936 1613	796 1033 —— 4304 89269 eeee3, 2ee2eee 977 1595 729 1051 4341 —— 83273 eeee3, 2ee3, 2ee 818 1177 492 899 —— 4305 89303 eeee3, 2, 2, 2ee 823 1405 667 855 4342 —— 89303 eeee3, 2, 2eee3, 382 1387
7	8890087 890071 890071	4295 89101 00003, 4297 89107 00003, 4298 89113 00003, 4299 89119 00003,	8 8 9 13 3 7 8 9 13 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	892213 89227 89231 89237	89269 89273 89293
, z 'z		4296 4297 4298 4299	\$     \$ \$	§	\$   \$   \$
`x	4331 1332 1333	1111 \$	133	4337 4338 4339 4340	1 2   2
2	405 1393 4331 — 632 4394	477 1217 — 972 1565 — 611 1387 — 1173 1619 4334	678 1637 4300 647 7634335 415 1361 4336 415 1361 4336 4301	317 1201 4337 791 1077 693 8454338 930 1471 4339 626 1641 4340	1033 1051 899 855
2	405 632 859 730 503			317 791 693 930 626	796 729 492 667
Exponenten	4280 88807 6662663, 2, 3 88811 6662662 4281 88813 666266366 	4283 88843 eeesse, 4ees 88853 eeesse, 3, 3ee 4284 88861 eeesse, 3, 3ee 4285 88867 eeesse, 2e3, 2 4286 88873 eeesse, 2eesse	4287 88897 600020, 2, 2, 2, 2, 4288 88903 600020003, 3	4299 88951 00002303 4290 88969 00002303 4291 88993 000023004 88997 00002300200	56512594328 — 89009 000020302, 30 12772069 — 4292 89017 000020303, 20 114816334329 — 89021 00002030400 1781019 — 4293 89041 00002040030
7	88811 88813 88813 88817 88819	88843 88853 88861 88867 88873	88883 88897 88903 88919 88937	88951 88969 88993 88997 89003	89009 89017 89021 89041
, N		4283 4284 4285 4285			4292 1293 4293
`*	042 1797 — 680 1647 4320 561 667 — 592 1533 4321 442 1021	927 723 4322 741 — 821 —	715 1843 4323 097 1399 288 2083 493 1781 4324 684 1861 4325	1951657 20517035 30320594326 88523174327	43.28 1 3.29
8	042 1797 680 1647 561 667 592 1533 442 1021	927 723 741 821	1399 1399 1083 1781 1861	1657 1365 1703 1059	633
N	56801647 4320 561 6647 4320 551 553 4321 4421021	550 927 173 723 142 741 679 821 5241159	715 1843 1097 1399 1288 2083 493 1781 684 1861	1195 1657 1076 1365 1205 1703 1303 2059	565 1259 4328 12772069 — 1148 1633 4329 178 1019
Exponenten	88499	4268 88591 00002005, 200 4268 88591 00002005, 4 4269 88609 00002004, 5 4269 88609 00002003040	4270 88651 0002002003 4271 88657 0002002003 88661 000200200000 4272 88667 00020020003	4273 88681	4277 88771 000022002, 4, 2 4278 88789 000020002000 — 88793 00002002020 — 88799 0000200203, 20
7	88493 88499 88513 88523 88547	88589 88591 88607 88609 88643	88651 88657 88661 88663 88667	88681 88721 88729 88741 88741	88771 88789 88793 88799
:,2	130	4268 4269	1271 1271 1272	4272 4275 4275	1278
74	4308 4309 4310 4311	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1318	15111	1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1

,,	2,,	7	Exponenten	%	*	,2		7	Exponenten	N	N	*22	1,2	7	Exponenten	N	×
1 2	4307 89	329	89329 eee3, 2, 4, 3e	587	587 769	4357	ا ا	89597	89597	202		4369		89867	89867	262	669
	308 89	371	4308 89371 00003003, 202	479				89603	0004, 7, 2	166	355			89897	89897 0005, 20020	628	867
1345	<u> </u>	387	89387		648 1693	4359	<u> </u>	4319 09011	00004, 5002	314	845	4372	1 23	89909	89909 0005, 2, 2000		309 1017 572 933
4346 -	_ <u>_</u>	393	89393 66663662, 2, 36		858 1100	4360		80633	90007. 3070	462	\$50	1	1332	80017	4332 80017 00005, 2, 400	333	605
4347	8	399	89399 **********************************		356 1319	1	4320 8	39653	•	661 1077	1077	Ì	1333	89923	4333 89923 00005004, 2	277	615
¥   3	309 89	413	4309 89413 eeee3eee3ee		863 1347	4361		39657	89657 00004, 3, 3, 20	564	808	4373		89939	89939 **********************************	404	963
\$   \$	131089	431	4310 89431 000030000003	<del>-</del>	443 1603	4362		89659 89669	89669 0004, 3, 302	319	967	4374	134	89959 89963	4334 89959 6060562, 2, 3	348	917
<del> </del>	31189	443	4311 89443 000030002, 3, 2		571 1311	Ì	1322 E	4322 89671	00004, 203, 3	273	893	1	4335	89977	4335 89977 000504, 20	353	513
*	312 89	644	4312 89449 0000300020020			4363	Î		•	722	921	Ī	1336	89983	4336 89983 000507	33	259
	<u>ဆိုး</u>	459	89459 **** 2, 2	530	1293	1	4323	4323 89689	00004, 2002, 20 773 1097	773	1001	Ī	4337	8668	4337 89989 ********************************	307	477
1 350	5 8   ₹	4777	4313 80401 0000302, 4000		905	4304		89753	••••4••2, 2, 20 752 1063	752	1063		4338	90001	4338 90001 00006, 2030	383	487
			- (-) (-) (-)			2			C (3)	?	<u>.                                    </u>		500	) )	,	?	7
-	<u>@</u>	50 I	89501 0000302, 2, 300		668 1185	Ī	4324 89767	39767	••••4••••2, 3	339	339 II47	4375	I	11006	90011 00006, 2, 202	246	299
-	<u>&amp; </u>	513	89513 0000302000020	Ĕ		1	4325	4325 89779	4	497	1203	4376	Ī	2000	90017 00060040	322	393
	<u>8</u>	519	89519 00003020004	238		4366				88	288 1073	1	4340	61006	4340 90019 00006003, 2	251	573
	314 09	521	4314 69521 666636262, 36	9	601 103	Ī	4320		••••4•2, 3•••	8	953	$\overline{}$	1	90023	90023 0000002, 3	8	110
*	315	527	4315 89527 00003020203	325	325 1213	İ	4327 89809		••••4•2••3•	965	851	Ī	4341	16006	4341 90031 00000000	601	507
*	31689	533	4316 89533 00003020400	499	116	911 4367	Ī	9819	89819 00004020202	90	400 1093	4378		90053	90053 00007, 3000	276	433
<u>_</u>	1354 89	261	89561 ***** 20	724	724 1031	Ì	4328	12868	4328 89821 ••••4•2•3••	507	907	4379	1	90059	90059 0007, 2002	200	519
*	31789	563	4317 89563 00003030202	417	_	Ì	4329 8	39833	4329 89833 0004030020	619	861		4342	29006	4342 90067 00007002, 2	205	49I
1355	4355 — 89	591	89597 ***********************************	156	601	1368	<u>د ۽ ۾ </u>	9839	4330 89839 000040304	135 354	517	1380	1343	90071	1380 — 90071 ••••7•••3 — 4343 90073 ••••7•2, 2•	124	453

_					
×	730 1189 271 1001 847 1157 227 991 969 1567	554 1457 388 715 583 1327 1105 1527 622 1505	778 1217 339 1117 856 1095 895 1273 139 795	178 851 212 675 787 1267 441 1189 134 709	860 1357 553 1335 436 967 548 1493 660 811
N	730 271 847 227 969	554 388 583 583 622	778 339 856 895	178 212 787 741 1441	849 554 660 660
Exponenten		90731 ee2, 3e2, 2ee2 90749 ee2, 3e2, 5ee 4373 90787 ee2, 3eeee3, 2 4374 90793 ee2, 3eeee22 90803 ee2, 3eeee22	4375 90821 902, 3002, 3004 4375 90823 902, 302, 3, 3 90833 902, 3002003 4376 90841 902, 300202, 20 4377 90847 902, 300205	90863 ee2, 3e3, 4, 5, 3 e93 e4, 4378 90907 ee2, 3, 2, 3eeeee	4380 90931 0003, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
2	90677 90679 90697 90703	90731 90749 90787 90793	90823 90833 90833 90841	90863 90887 90901 90907 90911	90917 90931 90947 90971
,,2	1369 1370 1371	1373	4375 4376 4377	1378	<del>g</del>
,2	44°6	\$\$     \$	\$1211	##     #	# 1 4 1 4 1 4 1 4 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5
N	731 775 591 873 949	630 983 277 907 723 1147 772 1071 571 745	267 583 169 725 409 1107 120 649 551 671	742 1173 453 1097 257 935 208 717 296 433	455 469 613 823 901
N	287 439 488 385	630 277 723 772 571	169 169 120 120 551	453 453 257 208 296	0 4 4 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Exponenten	4355 90379 ees, 4e4ees 4356 90397 ees, 4e3, 3ee 90401 ees, 4e2e4 4357 90403 ees, 4e2e3, 2	90437. 002, 4000330 90439 002, 4003, 3 90469 002, 4002, 200 90473 002, 4002020 90481 002, 4003, 30	66, 4, 3, 4, 6, 66, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,	ee2,4,2ee2ee,742 II73 ee2,4,2e2,2,2453 IO97 ee2,4,3ee3 257 935 ee2,4,4,2,3 208 717 ee2,4,6,2e 296 433	4367 90619 ee2, 4, 6e2 4368 90631 ee2, 3e6, 3 90641 ee2, 3e4ee3 90647 ee2, 3e4ee3 90659 ee2, 3e3e3, 2
2	90379 90397 90401 90403 90407	4358 90437 4359 90459 4359 90469 4360 90473	4361 90499 4362 90511 4363 90523 	90533 90547 90583 90599	90619 90631 90641 90647 90659
",2	4355 4356 1357	135	4361 4362 4363 4364	1365	1367
,2	4395	1397		\$11±±	1 1 2 4 5 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
N	321 169 203 193 447	469 343 641 461 737	631 663 611 569 229	497 765 487 873 659	757 479 533 395 525
N	230 58 151 47	195 196 106 106 456	171 244 144 134 148	155 214 91 632 509	553 757 366 479 140 533 184 395 341 525
Exponenten	90089 eee8ee2e 90107 eee10e2 90121 ee2, 902e 90147 ee2, 9, 4	90163 ee2, 7, 2, 2, 2 90173 ee2, 7, 4 ee 90187 ee2, 662 ee 90191 ee2, 662, 4 90197 ee2, 6666	002, 600003 002, 600000 002, 6, 20020 002, 6, 3, 2, 2	90247 ee2, 5e4, 3 90263 ee2, 5e2e3 90271 ee2, 5e2, 5 90281 ee2, 5eeee2e 90289 ee2, 5ee2, 3e	90313 -e2, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
2			90199 90203 90217 90227		
22	11 \$ \$ 1	1384 1385 1385 1386	1348	435° 4351 4352	1393   1394   1354   1394   1394   1354   13
<b>~</b> 22	4381 4382 1383	1385	1387 1388 1389	1 3   5	1393

N	1120 1807 670 1623 1057 1727 878 1265 104 699	341 1127 723 1151 162 781 191 735 698 983	582 1519 326 1205 99 623 1142 1847 1055 1463	8861533 3791067 7121103 10451477 181 975	654 1489 292 1349 625 139 596 707
$\overline{N} \mid N$	670 670 670 878 104	3411 162 191 191	582 326 1 420 1 420 1 555	379 379 712 045 181	654 292 625 596
Exponenten	74412194443 — 91541 ee2, 2002, 200001201807 5791555 — 4407 91577 ee2, 20020202, 2, 2 6701523 797 9594445 — 91577 ee2, 200203, 20 8781265 45315314446 — 91583 ee2, 200206	015 1749 — 4408 91591 002, 2003, 3, 3 482 1073 — 4409 91621 002, 2004, 200 356 1223 4447 — 91631 002, 200404 913 1269 — 4410 91639 002, 200503 758 1315 4448 — 91673 002, 2, 2, 2, 4, 2, 20	695 1143 4449 — 91691 002, 2, 2, 300002 582 519 293 833 4450 — 91703 002, 2, 2, 3, 203 3261205 351 397 — 4411 91711 002, 2, 2, 3, 6 99 623 564 869 4451 — 91733 002, 2, 2, 20000011421847 593 1399 — 4412 91753 002, 2, 2, 200001055 1463	167 881 4452 — 91757 ee2, 2, 2, 2, 2e2ee 8861533 11981653 — 4413 91271 ee2, 2, 2, 4e2 3791067 6511181 4453 — 91781 ee2, 2, 2e4ee 7121103 680 801 — 4414 91801 ee2, 2, 2ee2, 2, 2e10451477 5591239 — 4415 91807 ee2, 2, 2ee2, 5 181 975	438 1435 4454 — 91811 902, 3, 200003, 2 1130 1793 — 4416 91813 902, 3, 200002001 738 1943 4455 — 91823 902, 3, 200004 767 1113 — 4417 91837 902, 3, 2000400 912 1241 4456 — 91841 902, 3, 202, 50
Z	1541 1571 1573 1577 1583	1591 1631 1639 1673	1691 1703 1711 1733 1753	1757 1271 1781 1801 1801	1813
-	<u> </u>			1 1 1 1 1 1	12121
$\overline{N} \mid N \mid z' \mid z'' \mid$	74412194443 — 6421519444 — 7591565 — 4407 — 4407 — 45315314446 — 45315314446 — 45315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315314446 — 65315315314446 — 65315315315315315315315315315315315315315	482 10749 — 4408 355 1223 4447 4409 913 1259 — 4410	1 2 2	2   2   1	1 2 1 2 1 2 1
	19 44 65 65 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64		695 1143 4449 293 833 4450 351 397 564 869 4451	167 881 4452 198 1653 651 1181 4453 680 801 659 1239	21212
N .	4 4 9 7 6 4 1 5 1 9 1 5 1 9 1 5 1	10151749 4821073 3561223 9131269 7581315	695 293 8 351 39 564 86	20 H 0 Q	8 0 1 7 2 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
N	57 79 45	_ <b>H</b>	9 2 8 8 8		•
Exponenten		002, 202, 2, 4, 2 002, 202, 3, 4, 2 002, 202, 3, 2, 3 002, 202, 30020 002, 202, 3020		4437 — 4403 91423 ••2, 20003, 5 4436 — 91453 ••2, 20002, 400 4438 — 91457 ••2, 2000050 4405 91459 ••2, 2000050	1161 4440 — 91463 000, 2000003, 3 1333 4441 — 91493 000, 200000000000000000000000000000000
2	91253 91283 4394 91291 4395 91397 4396 91303	4433 4434 4434 435 436 436 4373 438 436 4373 438 4373 438	4399 91381 4400 91387 4401 91393 4402 91411	437 4437 4444 4444 4444 4445 4445 4445 4	1463 1499 1513 1513
'\z   'z	1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	\$     \$	5 1 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	1 5 1 5 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	11151
72	4431 — 4432 — 4394 — 4395 — 4395	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	11121	1 2   2	80 497 4439 —— 86521161 4440 —— 5551459 —— 4406 681 887 4442 ——
2	337 203 409 093 071	781 871 849 939 445	479 389 313 427 473	553 747 827 805 851	80 497 652 1161 841 1333 555 1459 681 887
	772 1337 733 1203 353 409 426 1093 757 1071	4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	4041 405 407 407 407	439 308 177 594	80 6521 8411 5551
Exponenten N	4381 90999 902, 3, 2020200 4382 910099 902, 3, 3, 900 902, 3, 3, 3, 902 91019 902, 3, 3, 3, 2, 20	91079 002, 4, 3, 3 4384 91081 002, 3, 4, 2020 91097 002, 3, 402, 20 4385 91099 002, 3, 40202 91121 002, 3, 6, 30	4424 — 91127 002, 3, 6030 4425 — 9139 002, 208, 2 — 4387 91141 002, 20700 4426 — 9155 002, 206, 4		4429 — 91199 ees, 2e4, 6 4430 — 91229 ees, 2e3e3ee — 4391 91237 ees, 2e3, 3, 2ee — 4392 91243 ees, 2e3, 2ees — 4393 91249 ees, 2e3, 3, 3e
2	90989 90997 91009 91019	91079 91081 91097 91099	91127 91129 91139 91141	91153 91159 91163 91183	91199 91229 91237 91243
- N	1381	1387	1386	1388	1392
12 - 22	41.9 1.420 4420 438.1 1.383	1 2   2   2	4424 	11515	4429   4430   4392   4393

	NAR-E	10 10 6 15 15			
N	877 779 583 621 855	714 1865 991 1705 671 1619 117 745 1158 1583	499 1805 690 1879 327 1055 833 1413 432 1549	043 1475 105 1747 957 1241 241 1069 618 1477	136 785 575 711 303 1045 532 699 360 489
×	184 595 313 289	714 991 671 117 1158	499 690 327 833 432	1043 1475 1105 1747 957 1241 241 1069 618 1477	136 575 303 532 260
Exponenten	4446 92399 002003, 304 4446 92401 002003, 4, 30 4447 92413 002003, 600 4448 92419 00200206, 2	627 4480 — 92459 ee2ee2eeee2 957 — 4451 92467 ee2ee2e2e 979 — 4452 92479 ee2ee2e2, 5, 2, 2 899 4481 — 92489 ee2ee2ee2	4453 92503 ••2••2••••••3 4454 92551 ••2••2, 2, 4, 3 4455 92557 ••2••2, 2, 3, 2•• 92567 ••2••2, 2, 2••3	4456 92569 002003,3,2,20 1043 1475 4457 9558 1002003,2002000 1105 1747 4458 92593 002003,203,30 957 1241 4459 92623 002003,3,2,4 241 1069 92627 002003,3002,2 618 1477	858 1097 4485 — 92639 ••2••2, 3•5 901 1281 — 4466 92641 ••2••2, 4, 4• 662 1183 — 4461 93647 ••2••2, 4, 3, 3 141 803 4486 — 92657 ••2••2, 5, 3• 466 1073 4487 — 92669 ••2••2, 7••
7	92399 92401 92413 92413 92419	92459 92461 92467 92479 92489	92503 92507 92551 92557 92567	92569 92581 92593 92623	92639 92641 92647 92657
,,2	13144	1521		4458 4457 4458 1459	1 5 5 1 1
,2	5	347 6274480 — 445 731 957 — 445 634 1079 — 445 500 1189 4481 —	184   184		858 1097 4485 901 1281 —— 662 1183 —— 141 803 4486 466 1073 4487
N		H H	433 1177 — 653 1129 4482 734 997 — 667 1181 4483	906 1561 447 1243 533 631 772 1207 576 1489	858 1097 4485 901 1281 —— 662 1183 —— 141 803 4486 466 1073 4487
N	352 261 328 371 280	347 323 701 634 500	433 653 734 361 667	906 447 533 772	858 901 141 466
Exponenten	4467 — 92177 ••22•663• 4433 92179 ••22•662, 2 4468 — 92189 ••22•6, 3• 4434 92203 ••22•55•••2 4469 — 92219 ••22•5, 322	4435 92221 ••20•65, 4•• 4436 92221 ••20•646, 2 4437 92233 ••20•6402, 20• 92243 ••20•6402, 20•	4438 92251 es2e44es2e2 4439 92269 es2e64, 2e2ee 92297 es2e63632e 4440 92317 es2e6362e63	60 1091 — 4442 92347 00200300 447 1243 — 667 1151 — 4443 92357 002003, 2, 500 572 1207 431 1045 4475 — 92357 002003, 2, 2002 772 1207 — 439 905 4475 — 92357 002003, 2, 2002 576 1489 4484	4476 — 92369 eezee3, 2ee3, 858 1097 4485 — 92639 eezee2, 3e5 — 4444 92377 eezee3, 2e2, 2e 901 1281 — 4460 92641 eezee2, 4, 4e
7	92177 92179 92189 92203	92221 92233 92233 92237	92269 92269 92311	92333 92347 92353 92357	92377 92377 92381 92383
z, z,,	1 2 2	1435	4438 4440 4441	12211	11111
,×	567 1549 4467 — 4433 4459 — 4434 4434 653 839 — 4434 699 1133 4469 —			843 4473 091 — 151 — 045 4474 905 4475	633 4476 — 4444 433 4477 — 4445 315 — 4445
×	I H H	364 1227 229 1051 875 1427 740 1063 4470 94 605 4471	523 617 682 1217 494 1135 4472 894 1241	619 843 4473 667 1151 431 1045 4474 349 905 4475	633 799 433 479 479
<u>N</u>	567 649 663 663	8 4 8 4 9 8 6 4 9 4 9 4 9 4 9 4 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	523 682 894 330 330	619 460 667 431 349	4 1 8 4 8 4 8 8 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
Exponenten	4418 91867 002, 2, 20202 4419 91873 002, 2, 203, 40 4420 91909 002, 2, 3, 5000 4421 91921 002, 2, 3, 3030 4422 91939 002, 2, 3, 203, 2	4423 91951 000, 2, 3, 200, 3, 4424 91957 000, 2, 3, 2, 200, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	4425 91969 ee2, 2, 3ee5e 91997 ee2, 2, 3ee93e 92003 ee2, 2, 3e2, 3. 9 92009 ee2, 2, 3e2e2e 92033 ee2, 2, 4, 6e	4426 92041 003, 2, 3020 — 92051 003, 2, 3003, 2 4427 92077 003, 2, 400200 4428 92083 003, 2, 402, 3, 2 4429 92107 003, 2, 5, 2003	— 92111 002, 2, 2, 4 4430 92119 002, 2, 5003 4431 92143 002, 2, 604 — 92153 002, 2, 8, 20 4432 92153 002, 2, 8, 20
7	1867 1909 1921 1939	1943 1957 1967 1967	1969 1997 1997 1999 1999	2041 2077 2083 2107	20110 20110 2015 2015 2015 2015
	44 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 5 5 1 1	<u> </u>	2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	143 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2,		4458 4458 4458	14461	4464 — 4426 — 4427 — 4428 — 4428 — 4428	4465 — 4430 4466 — 4431

, x	72	Z ,,,z	Exponenten	N	$\overline{N}$ N	,,z   ,z	,,2	Z	Exponenten	N	N	,2	,,2	7	Exponenten		N.	N
1488	1462	92671	4462 92671 00200023 9	31	789 4500	188	4475	2899 2921	7894500 — 92921 00200005, 20	593	593 1367	111	4485	93187	4485 93187 00202, 8,		159 337 121 503	337
1489 1490	11	92683 92693 92699	4403 92083 9228624 489 92693 9229994, 292	379 808 460	379 903 4501 808 1299 — 4476 460 1237 4502 —	1502	5	2941	379 903 4501 — 9447 9424 9426 4 200 4 6 1237 4502 — 92951 90296 3 3 9 9 3	707 388	707 1195 4515 388 1383 —	fs rs	184	93239	707 x195 45x5 — 93239 eeses, 4, 2e3 388 x383 — 4488 9324x eeses, 4, 3, 2e		268	989
1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1651	92707 92717 92723 92737	491 — 92717 ••2•••3•3, 2 492 — 92717 ••2•••3•2• 4465 92737 ••2•••25• 493 — 92753 ••2••25•	541 622 641	541 1225 4503 908 1561 622 1499 4504 641 753 4505 1108 1413	1504	1	2957 2959 2993 3001	908 1561 — 4477 92957 0020002, 3, 300 622 1499 4504 — 92987 0020002, 3, 5 641 753 4505 — 92993 0020002005 1108 1413 — 4478 93001 0020002002	726 169 526 664 1159	726 1283 4516 169 895 526 1459 4517 664 783 4518 1159 1585 4519	4516 4518 4518	18	93251 93253 93257 93263	4489 93253 00202, 304, 2 4489 93253 00202, 303000 93257 00202, 30202 93263 00202, 302, 4 93281 00202, 3, 2, 4		396 875 709 1105 856 1169 230 1003 652 799	875 1105 1169 1003 799
	4466 4467 469 469	92761 92767 92779 92789	4466 92767 e22eee2e2, 2e 4467 92767 e22eee2e5 4468 92779 e22eee2, 2ee2 4469 92791 e22eee2, 3eee	1189 193 741 984 355	1189 1687 4506 193 1077 4507 741 1949 4508 984 1613 4509 355 1339 4510		11111	3047 3053 3059 3077 3083	93047 ••2••2•3•3 93053 ••2••3, 5, 2 93059 ••2••3, 5, 2 93077 ••2••9, 2••••	326 464 364 992 540	326 1235 464 859 4520 364 797 992 1601 540 1463 4521	5     5     5     5	\$   \$ \$	93283 93287 93307 93329	464 8594520 — 933283 00202, 3, 2, 2, 3 58 1221 364 797 — 9491 93327 00202, 3, 402 339 953 992 1601 — 4492 93319 00202, 204, 3 301 967 540 1463 4521 — 93323 00202, 203002 538 1377	8, 8, 4, 8 8, 8, 8, 8, 8	35 8 3 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	1157 1221 953 967 1377
4495 1496 1497	\$ \$	92801 92809 92821 92831	4470 92802 00200000000000000000000000000000	536 1041 1303 1160	536 617 4511 1303 2101		1 2 3 1 1	3089 3097 3103 3113	4479 93097 essee3ee4e 4480 93103 essee3ee4 — 93113 essee3394 — 93131 essee4, 2002	716 1049 245 754 478	716 873 4522 245 1137 4523 754 1087 4524 478 1239 4525		\$	93337 9337 93371 93377	4493 93337 eezes, zeze3e 884 IIIII 4493 93337 eezes, zez,z,ze 993 I403 93377 eezes, zeses 500 I391 93387 eezes, z, z, 5e 590 699 93383 eezes, z, z, 5, 33 372 Izzz	02,2,2 03,2 03,5 0,2,5 0,2,3,3	88 8 4 993 500 590 372	(12) (403) (39) (225)
1 4 1 6 1	474	92857 92861 92863 92867 92867	4472 92857 002000003, 20 4473 92867 00200000400 4473 92867 002000005 4474 92893 00200002, 4, 2	1079 1553 736 1341 131 867 574 1279 855 1529		11115	1 4 4 8 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	)3133 )3151 )3151 )3179	4481 93133 0020004, 2, 200 4482 93139 0020004002, 2 4483 93151 002000405 4484 93169 0020006, 30 93179 002000702	673 497 107 397 164	H H (	151 4526 189 4527 623 — 523 473 4528	1494	93407 93419 93427 93463	151 4526 — 93407 00202, 2, 205 154 879 159 452 1457 0023	, 205 , 3002 , 4, 2, 2 3003 202, 3	154 879 1552 1457 1443 1085 367 1307 438 1475	879 1457 1085 1307 1475

25	"2"	7	Exponenten	N	N	,2	1,2	7	Exponenten	N	N	,2	,, <del>2</del>	Z	Exponenten	N	2
	4496	93481	3.	1153 1591		4540		93809	93809 00203, 2, 3, 30	899	871		4523		94063 002040204	153	
529	4497 	93407	93497 002020004	670	670 1617	454I	<u>.</u>	93827	93827 ee2e3e5, 2, 3, 4, 465 1155 93827 ee2e3ee5, 2 328 715	328	715	•	4524	94079	4524 94099 00205, 202, 2	341	
1	4498	93493	•	1063 1733		4542		93851	93851 00203002, 202	512	512 1385	4553	1	94109	00205, 2,	388	_
4530	Ī	93497	93497 00202002, 3, 20	905	902 1295	İ	451I	9387I	93871 0020300004	243	243 1123	1	4525	4525 94111	00205, 2, 5	87	475
		200		91.		747	Ī	2887	03887	6	61.1		4634	7117	000000000000000000000000000000000000000	620	827
4531	;	93303	93303	200		2	CISI	93880	4512 03880 0020300 50	, 6			3	04121		575	
	4499	93320		1167 1657		4544	1	93893	93893 0020302, 3000	710		4555	1	94151	94151 00206, 3, 3	148	
	4501	93553		845		Ì	<b>6513</b>	193901	•	743	743 1269		4527			397	
4532	1		93557 ***********************************	916	1503	4545	Ī	93911	93911 00203020003		342 I243	4556	1		••2•6•2, 2•	364	519
										-			-				
	4502	93559	93559 00202000303	320			4214	93913	4514 93913 002030202, 20	600	-		4520	94201	94201 66269, 26	143	
4533		93503	93563 00202000402	004		4540		93923	93923 0020303, 3, 2	60			4529	94207	94207 662612	7	
4534	1534	93581	93581 0020202, 3, 200	788		İ		93937	4515 93937 0020304, 30	507				94219	94219 003, 8002	123	
	4503	93601	4503 93601 00202020040	769				9394I	93941 0020304000	540		4557	Ī	94229		270	•
	4504	93607	4504 93607 0020202002, 3	433	1467	Ì	4516	93949	4516 93949 002030600	257	481	4558	I	94253	••3, 6••2••	330	577
4535		93629	93629 00202020400	556	556 1015	Ī	1517	93967	4517 93967 00204, 4, 4	139	589	I	4531	94261	••3, 6, 2••••	373	607
	4505	93637	4505 93637 0020203, 3000	731		4548	1	12666	93971 00204, 302, 2	384		1	4532	94273	4532 94273 003, 5050	257	301
4536	1	93683	93683 0020205, 2, 2	324	797	Ì	4518	93979	4518 93979 00204, 3, 202	35 I		I	4533	94291	94291 003, 50002, 2	331	787
4537		93701	93701 00203, 6000	352	541	4549	Ī	93983	93983 00204, 3, 5	106		4559	I	94307 003,	003, 5, 2, 3, 2	280	641
1	4506	93703	4506 93703 66263, 6, 3	163	515	Ī	4519	03997	4519 93997 00204, 200200	643	LI07	I	4534	94309 003,	003, 5, 2, 2000	479	759
-				2,0		881		2007	04007 66264 2 262	6	300		20.24	7699		201	9
4530		93719	4507 02720 06283, 4063	9 6		<u> </u>	1620	7000	4520 04000 00204, 2, 2, 20	677			4030	10000	4500 94041 600, 0, 0, 0, 0	7 2	
1630	֝֞֓֞֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓֓	727.59	4307 93751 06263, 3050	484	260		1521	04033	4521 04033 00204000030	2//		4560	<u> </u>	04321	04331 003, 5, 402	102	530
ا ۋ	4508	03763		300		1551	1	94040	94049 0020402, 40	402	605	4561	١	04343		178	
١	4500	93787	4500 93787 00203, 200202	517	1407		1522	94057	4522 94057 00204020020	685	951	4562	I	94349	94349 003, 403, 200	4	
									_			-					

N	466 1297 003 1625 778 1237 319 1097 576 755	649 821 305 1087 438 1181 626 759 814 1401	548 1323 392 1419 149 839 557 1467 204 965	667 871 722 1185 369 683 291 637 236 763	433 1173 323 1095 662 859 616 845 648 1081
N	466 1 1003 1 778 1 319 1 576	649 305 643 643 643 644 644	392 1 149 257 1 204	667 722 369 291 236	433 323 662 616 648
Exponenten	804 1297 4586 — 94907 69, 2000032 569 1009 — 4564 94933 605, 20020000 638 919 4587 — 94949 603, 2003, 2003 357 995 — 4565 94951 603, 2003, 3, 3	861 — 4566 94993 ee3, 2, 2, 3e3e 679 — 4567 94999 ee3, 2, 2, 3ee3 377 4589 — 95009 ee3, 2, 2, 2e2 485 4590 — 95009 ee3, 2, 2, 2e4e 933 4591 — 95021 ee3, 2, 2, 2ee2e	95027 003, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	526 1431 — 4570 95089 • 63, 2, 263. 9 503 1153 4595 — 95093 • 63, 2, 2630• 6 356 1215 — 4571 95101 • 63, 2, 2650• 751 1231 — 4572 95107 • 63, 2, 3, 5, 2 604 875 4596 — 95111 • 63, 2, 3, 4, 3	457 — 4573 95131 663, 2, 3, 2, 262 473 — 4574 95143 663, 2, 362, 3 3274597 — 95153 663, 2, 362, 36 5454598 — 95177 663, 2, 4, 2626 359 4599 — 95189 663, 2, 400000
2	94907 94933 94949 94951	94993 94999 95003 95009	95027 95063 95071 95083 95087	95089 95093 95101 95111	95131 95143 95153 95177
255	4564	4566 4567 	1568	4570	4574
""   "	297 4586 — 4564 909 4587 4565 571 4588 —	861 679 — 377 4589 485 4590 933 4591	135 4592 919 4593 811 121 183 4594	153 4595 4570 2215 4571 875 4596 —	1597 1598 1598
N	569 1297 4586 569 1009 638 919 4587 357 995 —	861 679 377 485 933		1431 1153 1215 1231 875	411 473 — 411 473 — 939 1327 4597 1118 1545 4599 365 1359 4599
N	804 569 638 357 99	541 412 177 154 347	471 641 719 866	526 503 356 751 604	
Exponenten	601 4575 — 94613 003, 3, 2, 200000 167 — 4550 94651 003, 3, 2, 3, 30 677 4576 — 94649 003, 3, 203, 20 439 — 4551 94651 003, 3, 20302 111 — 4552 94687 003, 3, 305	977 — 4553 94693 *** 3, 4, 2*** 5154577 — 94709 *** 3, 5**** 759 — 4554 94723 *** 3, 2**, 2 799 4578 — 94727 *** 3, 2**, 2** 605 — 4555 94747 *** 3, 2**, 3**	247 — 4556 94771 003, 203, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,	385 853 4581 — 94811 ee3, 2e2e2e2 219 959 4582 — 94823 ee3, 2e2, 2, 3, 2 2574 1367 — 4560 94837 ee3, 2e2, 2, 2 136 763 4583 — 94841 ee3, 2e2, 4, 2e	597       733       4584       94847       963       202,7       62       457       —         703       1217       4561       94849       993       200       911       473       —         242       915       4562       94873       993       200       939       1327       4597         523       811       4585       993       993       1327       4599         477       1069       4563       94903       993       200       355       1359       4599
2	94613 94621 94649 94651	94693 94709 94723 94727	94771 94777 94789 94793	94811 94819 94823 94837	94847 94849 94873 94899
"2"	4550 4551 4552	4553 4554 4555	4556 4557 4558	4559 4560	4561 4562 4563
72	1575	977 — 4553 515 4577 — 4554 769 — 4554 799 4578 — 4555	247 — 4556 941 4579 4558 867 — 4558 551 4580 —		1584
×			247 775 941 867 551	853 1261 959 1367	597 733 4584 — 4561 242 915 — 4562 523 811 4585 — 4563
×	141 446 372 67 686	358 418 224 575 127	30 399 458 468	385 740 1 219 574 1	597 703 848 523
Z Exponenten $\overline{N}$			569 — 94463 ee3, 4, 8 — 4541 94477 ee3, 3e4, 2ee — 4542 94483 ee3, 3e3e2, 2 — 4543 94513 ee3, 3ee5e 570 — 94529 ee3, 3ee65e	571 — 94544 94531 ee3, 3eee4, 2 385 853 4581 571 — 94541 ee3, 3eee2, 2e 740 1261 4545 94543 ee3, 3eeee2, 4 219 959 4582 572 — 94547 ee3, 3eeee2, 2 574 1367 573 — 94559 ee3, 3eeee5 136 763 4583	4546 94561 ee3, 3ee2, 4e 4547 94573 ee3, 3ee2e2ee 4548 — 94583 ee3, 3ee3e3 — 4548 94597 ee3, 3, 2, 4eee 4549 94603 ee3, 3, 2, 3ee2
2" 2	4537 943 — 943 — 943 4538 943 — 944	1     0 39   944 40 944 444	41 944 42 944 43 945 - 945	4544 945 4545 945 945 945	46 945 47 945 48 945 49 946
- 12	4563 4564 	4566 4567 4568 1 45	4569 	4571 	\$ \$ 1 \$ \$ 1 \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$

ī — -			<del></del>		
×	1053 755 523 393 813	1015 1183 881 915	706 1101 538 1387 665 867 379 699 388 447	751 1021 574 1359 397 1343 887 1529 583 1411	769 1107 533 1379 914 1481 347 1261 415 957
N	398 307 357 184 461	302 193 638 361	706 538 665 379 388	751 574 397 887 583	769 533 914 347
Exponenten	625 — 95723 ee3ee64ee2 4600 95733 ee3ee65, 2, 2 4601 95737 ee3ee6, 2e 626 — 95747, ee3e2, 7, 2 4602 95773 ee3e2, 4, 3ee	745 4627 — 95783 ••3•2, 3•2, 3 1341 4658 — 95789 ••3•2, 3••2• 1357 — 4603,95791 ••3•2, 3••4 1719 4629 — 95801 ••3•2, 3, 2• 1489 — 4604,95803 ••3•2, 3, 3•2	95813 00302, 20300 95819 00302, 20200 4605 95857 00302, 2, 3, 30 4606 95869 00302, 2, 50 95873 00302060	4607 95881 ee3e2ee3e2 751 1021 4608 95911 ee3e2ee22, 2 574 1359 4608 95911 ee3e2eee2, 3 397 1343 4609 95917 ee3e2eee2ee 887 1529 4610 95923 ee3e2eee2, 2, 2 583 1411	4611 95929 003020003, 20 4612 95947 0030202, 2002 4613 95959 003022200003 4614 95971 0030203, 3, 2
7	95723 95731 95737 95747	95783 95789 95791 95801	95813 95819 95857 95859 95869	4607 95881 4608 95911 4609 95917 4610 95923	95929 95947 95957 95959 95971
,,2	100	1 6 6		4609 4609 4610	
,2	1625 1626		163 1631 1632	1   633	1   \$   1
N	613 1463 777 1235 499 1317 180 859 221 843		576 1045 1054 1441 1013 1293 799 1425 890 1541	544 1327 421 487 644 999 735 1247 826 1049	562 1281 853 1383 439 1201 489 605 630 1003
×	613 777 499 180 221		576 1054 1013 799 890	544 421 644 735 826	562 853 439 630 630
Exponenten	4587,95443 @9302, 2002, 2 4588,95467 @9302, 3, 200 4589 95467 @9302, 3002 4590 95471 @9302, 403	95483 e39e2, 5e2 95507 e39ee3e2, 2 4591 95527 e39ee2e2, 3 95531 e39ee2e22 4592 95539 e39ee2, 2, 2, 2	95561 e33eee224 4593 95561 e33eeee223 4594 95581 e33eeee23e 4594 95597 e33eee222		4594 95707 00300030000000000000000000000000000
7	95443 95461 95467 95471 95479	95483 95507 95527 95531 95531	95549 95561 95569 95581 95597	95603 95617 95621 95629 95633	95651 95701 95707 95713
,,2	4587 4589 4589 4590	4591 4592	1 593	4595	4597 4599 4599
2,2	1   fe 13	169 4614 379 4615 671 655 4616 769	915 4617 737 4618 867 — 885 405 4619	4620 4621 4622	4623 
N	893 641 689 547 167	169 379 671 655 769	915 4617 737 4618 867 —— 885 —— 1405 4619	504 1325 750 1019 4621 367 1313 718 873 4622	1069 1477 4623 955 1559 —— 449 1249 —— 768 1201 —— 850 1087 4624
N	245 277 396 222 16	153 121 477 372 340	664 162 235 203 869	130 504 750 367 718	1069 955 449 768 850
Exponenten $ \overline{N} $	4575 95191 003. 2, 40003 4576 95203 003. 2, 5, 3, 2 	4577 95233 0030090 4578 95239 003007, 3 4579 95257 003005, 2, 20 95267 003005, 300	95273 ee3ee4ee4 95279 ee3ee4ee4 4580 95287 ee3ee4, 2e3 4581 95311 ee3ee3e2, 4 4582 95317 ee3ee3ee	608 — 95327 e3ee3ee2 608 — 95339 e3ee3. 2ee2 609 — 95369 e3ee2e2e3 610 — 95393 e3ee2ee3	4585 95401 ************************************
Z	9519 9520, 9521, 9521, 9523	9523 9523 9525 9526	9527. 9528. 9528. 9531.	9532 9533 9536 9538	9541 9541 9541 9542
"2	4575	4577 4578 4579	4580 4581 4581	1583	4584 4585 4586
,×	1   6 6 6	11188	6 6 1 1	4609 4609 1610	1   6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
!					

	356 551 247 469 546 546 718 197 523 500		4648 4649 4659 4628 4631 4654 4655 4655 4655 4655 4655 4655 465	4627 96289 — 96293 — 96323 4628 96331 4629 96337	19 004, 5040 13 004, 50200 13 004, 404, 2		27.1		.660	-	=			
4617 4619 4620 4620 4621 4621	744 469 469 469 181 181 181 182 183 409 409			28 9633 29 9633 29 9633	50 04, 40 05	•	374		<u> </u>	1637		004, 20002002	693	1259
4619 4620 4621 4621	487 I 342 I 197 523 500		5 55 55 1   5   5   5   5   5   5   5	29 9633		• 4	490	669 801		633 1639 1640	4639 96643 4640 96643	64, 2, 2, 5, 2	265	579
4622	342 197 197 523 500 500		653 653 653 1	2	_			613				1-		1001
4619 4620 1 4621 1 4621	342 197 500 500				-		378		1664			004, 2, 2, 2, 5		639
4621	523			- 96377	7 004, 4, 4, 20		360	521		4642	4642 96697	004, 2, 203, 20 004, 2, 205	581 60	837
4621				- 96419	-	a	382		4665	1		~	336	919
4622 4622	_	-		- 96431	11 004, 300004		172	793	4666	<u> </u>	96737	••4, 2, 4, 4	376	465
4622		_	1656 —	96443		•	306	851	1 5	4644	4644 96739	004, 2, 4, 3, 2	287	663
4622	4 4 2	821		31 96457		. 8	623			1645		004, 2, 50000	367	605
4622 96181 0030402000	346	839 4	4657	- 96461	•	•	556	949	1	1646		••4, 2, 6•2	149	427
	545	891	- 6	4632 96469		••4, 3, 2000000 681 IIO3		103	1	1647	4647 96769	••4••8•	171	101
4023 901 99 00305, 3, 3	165		4658 -	- 96479		205	96	547	4668	Ī			242	615
4624 96211 00305002, 2	287		4633	33 96487		e (			1	1648		00400402, 2	313	737
_	9	357 4	1659	34 90493	7	4, 30	1 04	520		1649	4649 96799	004004, 300	304	475
	- 5		· ·						,				, ,	
4626 96250 964 9 2	333	176		4035 90517	7 004, 2050		359	553		١٤	1660 0562	004003, 20000	028	1023
4645 - 96263 004, 8, 3	4		<u>\$</u>			0.20	769 1061	_		1		004003, 302		841
	204	343 4	1991	- 96557			662 1139		1	1651 S		00400202, 4		843
4647 - 96281 -4, 6, 2, 2	298	419 4	4662 -	<b>–</b> 96581		••4, 20003000	644 1005	_	4672	<u>.                                    </u>	96851	0040020002, 2	508	1209

122	",2	7	Exponenten	N	N	72	25.	Z	Exponenten	N	N	2	"2	Z	Exponenten	N	N
4673		96857 96893	96857 ************************************	752	752 1067 326 601		4663 4664	4663 97171 4664 97177	**	369 559	875 791	18	4677	97501	••5, 2, 283•• ••5, 2, 3, 2, 3	391 190	699 653
	1652	11696		419 184	419 1073 184 787		4665	4665 97213	00403003, 2	338	771 561	4699	}	97543	005, 2, 4, 2, 2	242	583
	4053	99931		104	-			97431	+ ( > ( + ) +	\ ;	24.		2	9/349	,	100	393
4670		96953		070 82	82 543	4689 689		97241 97259		212	567	1 3	4679	97553	005003, 2, 20	473	521
1   2	155	96973 96979 96989	4054 90973 944992, 2, 244655 96979 944992939	503 534	503 1201 534 955	66	1667	97403 97301 97303	97303 ee5, 5eeee 97303 ee5, 5eea	318	511	121	1689	97577 97579 97579	0 5 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 0 0 0 2 0	516 608 377	839 985
1 62	1656	10026	4656 96997 ee4eee3, 2ee-	627 658	997	1602	8991	4668 97327	ees, 4ee4	103	469	4704	11	97583	••5••2••4 ••5•••3,3	146	669
1 8	1657	97003			1059		4669	97369	97369 <b>••5, 3••2, 2•</b> 97373 <b>••5, 3••3••</b>	497 370		1,00	1681	97609	0050002020	599 538	819 917
1	4658	12046	•	237	443	4694	1	97379	005, 3, 2, 3, 2	278	637	4707	Ī	97649	0050003, 30	442	577
1 5	4659	97039	4659 97039 00402, 4, 4	135	571		4670	4670 97381	97381 005, 3, 2, 2000	475	753	1 %	1682	97651	0050003, 2, 2	307	749
	4660	97081		573	823	4695	3	97397	97397 005, 3, 3000	8 6	685	11	4683	97687	00502, 2003	211	757
Ī	4661		. •	533	951	1	1673	4673 97429	005, 2020000	575	927	Ī	4685	97729	00503, 50	263	313
4683	-	97127	, 2, 3	272		Ì	4674	97441	4674 97441 005, 200040	435	529	Ì		12226	005040002	215	569
4684 4685		97151	97151 0040207	4 6	325		4676	97453 97459	4676 97459 665, 2662, 2, 2	553 365	953 883	170		97777	••5•5•3	102	317
1686	1662		97159 00403, 4, 3 97169 00403, 2030	179 506	579	4696 4697		97463 97499	97463, 005, 200203 97499, 005, 2, 20202	308	789 841	ÌÌ	<b>4688</b> 4689	97789	••5•7••	309	497

$\overline{N} \mid N$	299 191 381 477 443	407 471 373 403 491	457 421 295 133 221	395 593 417 443 499	527 581 637 209 209
N	123 104 149 296 164	179 341 81 145 190	126 265 62 118 103	234 376 230 200	413 170 368 181 166
Exponenten	2, 8, 3, 2, 2 2, 8, 500 2, 70300 2, 702000 2, 702, 202	2,7003,2 2,70002 2,70004 2,70302 2,7,2,202	2, 7, 2003 2, 7, 3, 200 2, 7, 304 2, 6670 2, 666, 2	2, 664, 2 2, 664, 2 2, 664, 2 3, 664, 2 666, 2 666, 2 4, 2	2, 66 6 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
7	98419 98429 98443 98453	98467 98473 98479 98491 98597	98519 98533 98543 98561 98561	98573 98597 98621 98627 98639	98641 98663 98669 98689 98711
25	4735 — 4715 4735 — 4716 4736 — 4737	4717 4718 4719 4720	4739 4721 4740 — 4741 — 4722		4747 4748 4748 4749 4749
,2	4735 4736 4736 4736 4737	4717 4718 4719 4720 4738	4739 4740 4741 4741 4722	4743 4744 4745 4746	• • • •
N	491 501 373 277 191	197 345 347 313 257	141 181 103 185 52 77 27 79 71 119	90 113 67 157 44 155 101 263 112 131	203 277 146 347 237 383 89 303 142 373
N	301 194 292 49 87	36 218 201 129 99	141 103 52 27	90 67 44 101	203 146 237 89
Exponenten	•7, 2, 2••• •7••2• •7••5 •8, 5, 2	68, 2, 5	000030 00030 0012,20 001202 2,11,20	2, 100230 2, 1002, 2 2, 10003 2, 100003 2, 8050	98387 2, 882229 98387 2, 8822, 2 98389 2, 882229 98407 2, 8, 2, 2, 3
7	98123 98123 98129 98143 98179	98207 98213 98221 98227 98251	98257 98269 98297 98299 98317	98321 98323 98327 98347 98369	4712 98377 4713 98389 4714 98407 — 98411
,,2	4700 4701 4702	4703 4704 4705	4706 4707 4708 4709	15151	4712
,2	4725	4727	1 729	4731	4734 4734
×	555 421 557 503 449	425 535 481 647 675	209 409 579 609 669	527 699 417 535 593	305 279 133 293 267
N	352 326 231 136 313	192 343 110 179 248	28 127 226 170 484	1114 428 187 376 217	247 191 15 216 220
Exponenten	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	66, 28.4.2 66, 28.3.2 66, 28.3.4 66, 28.4.4 66, 28.8.4	•6, 2, 7 •66•4, 3 •66•2•2 •66•2•3		••6•3, 4• ••6•5, 2• ••6•8 ••7, 4•2•
Z	97829 97841 97843 97847 97849	97859 97861 97871 97879 97883	97919 97927 97931 97943 97961	97967 97973 97987 98009 98011	98017 98041 98047 98057 98081
,,2°	469°	4692 	1694	4695 4696	4697 4698 4699
,2	4710	4713 4714 4715	4716 4717 4718 4719	4720	4697 4699 4723 4724

N	451 751 727 565 611	607 537 373 503 567	607 777 521 329 709	751 687 791 643 869	115 617 794 1097 323 719 250 823 677 927
N	370 360 392 392	355 377 226 214 353	181 298 404 53	550 539 232 137 513	
Exponenten	2, 5, 30040 2, 5, 300, 2, 2, 2, 2, 5, 303, 20	2, 5, 4, 2, 20 2, 5, 40, 2, 20 2, 5, 6000 2, 5, 6000 2, 40, 20 2, 40, 20 2, 40, 20	2, 40402, 3 2, 404002 2, 404, 2, 30 2, 404, 6 2, 4030000	2, 463.20 2, 463, 2, 2, 3, 2, 463, 2, 464, 204	2, 40202, 5 2, 402, 2, 4, 2 2, 402, 2, 4, 2 2, 402, 2, 3, 3
7	99233 99241 99251 99257 99259	99277 99289 99317 99347	99367 99371 99377 99391 99397	99401 99431 99431 99439	4758 99487 — 99497 4759 99523 — 99527 4760 99529
1,2	4747  4748	4749 4750 — 4751	4752 — 4753 4754	4755 4756 4757	47.58 17.87 47.59 17.88 47.60
,2	4778 4779 4780 — 4748	4781	4783	4785	4787 — 4758 4788 — 4759 4788 — 4760
N	651 871 967 697 819	743 767 645 449 715	417 607 511 439 841	651 721 579 389 601	883 857 833 621 707
N	479 368 612 538 220	560 146 364 412	131 238 404 83 533	142 260 319 330 271	518 540 481 164 197
Exponenten	2, 55 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2, 5002, 3000 2, 5002, 2020 3, 5003, 4, 2, 5003, 40	9, 5, 9, 5, 3 9, 5, 9, 4, 0, 9 9, 5, 9, 3, 0, 9 9, 5, 9, 9, 5 9, 5, 9, 9, 5 9, 5, 9, 9, 5	2, 5, 2, 2 004 2, 5, 2, 2, 302 2, 5, 2, 2, 400 2, 5, 2005 2, 5, 2005	, 5, 5, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,
2	98953 98963 98981 98993	99013 99017 99023 99041 99053	99079 99083 99089 99103	99119 99131 99133 99137	99149 99173 99181 99191
122	4738	4739	4740 	4743	
72	4762 4763 4764 4765	4766 4767 4768 4769	4770	4773	
N	567 539 647 757 481	637 555 281 307 253	569 365 665 715 539	611 785 635 859 709	485 583 533 557 455
×	304 468 289 371	393 203 214 80 173	354 302 276 439 376	187 461 498 361 398	801 404 801 900
Exponenten	2, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,	2, 6, 3000 2, 6, 3020 2, 6, 5, 30 2, 6, 50 2, 6, 50	2, 5040000 2, 503040 2, 503, 2, 2, 2 2, 503, 2000 2, 503, 3, 20	2, 50203, 3 2, 50202, 20 2, 502003 2, 5020003 2, 502003 2, 502003	2, 502005 2, 502, 204 2, 502, 3, 30 3, 502, 402 2, 5005, 2
7	98713 98717 98729 98731	4728 98773 4729 98779 — 98801 — 98807 4730 98809	98837 98849 98867 98869 98873	98887 98893 98897 98899 98909	98911 98927 98929 98939 98947
72	4725 	1728		4732 4733 4734	
<b>'</b> 12	4750	4753	4754 4755 4756 4757	4758 4759	4760 4761 4761 4761 4737

,	1	z'' Z Exponenten N N $z'$ Z	2	2	'n	- - 2,		Exponenten N N	>	×	'n	<b>`</b> v	z' z" Z	Expo	Exponenten	≿	×
1200	99551	4789 — 99551 2, 402, 205	104			5 69 21	9796	2, 40000500	337	623	1	4777	99859	- 4777 99859 2, 4, 2, 402, 2	402, 2	307	
4761	99559	2, 402, 3, 2, 3	239	821	4796		99713	821 4796 — 99713 2, 4002, 60	326			4778	12866	4778 99871 2, 4, 2, 4, 5	, <del>,</del>	89	
1790	99563	4790 99563 2, 402, 30002	374	987	4797	Ī	61/66	987 4797 99719 2, 4002, 4, 3	224	723		4779	99877	2, 4, 2,	<b>——</b> 4779 99877 2, 4, 2, 3e2eee	583	919
4762	12566	4762 99571 2, 4e2, 4, 2, 2	301	737	1	1770	19721	4770 99721 2, 4002, 3020	621	845	4803	1	99881	2, 4, 2,	4803 99881 2, 4, 2, 300020	652	
4763	99577	4763 99577 2, 4e2, 5, 2e	363	529	1	1771	99733	4771 99733 2, 4002, 200000 763 1231 4780 99901 2, 4, 2, 3, 400	• 763	1231		4780	10666	2, 4, 2,	3, 400	365	199
1791	99581	4791 — 99581 2, 402, 600	2 8	425	4798	<u>_</u>	1926	425 4708 90761 2, 400202.30	650	843		4781	99907	4.	650 843 — 4781 99907 2, 4, 2, 204, 2	325 710	710
4764	20966	4764 99607 2, 40003003	257	915	4799		19260	2, 40020203	264	985	4804	:	99943	, 4 , 2	985 4804 99923 2, 4, 2, 20002, 2 492 1171	492	1171
1792	11966	4792 — 99611 2, 40003, 202			1	1772 5	19787	997 - 4772 99787 2, 4003, 2002	395	1023	4805	Ī	99929	2, 4, 2,	395 1023 4805 - 99929 2, 4, 2, 2002, 20 728 1033	728	1033
4793 —	9963	4793 99623 2, 4000202, 3	308	1037	1	1773	99793	308 1037 4773 99793 2, 40030030	577		1	4782	19666	2, 4, 2,	739 4782 99961 2, 4, 2, 2, 4, 20 481 697	48I	697
4765	99643	4765 99643 2, 40002, 302	359	995	4800	<u> </u>	99809	995 4800 — 99809 2, 4004, 40	384	475	4806		12666	475 4806 99971 2, 4, 2005, 2		274 597	597
4766	0000	4766 00661 2 400002 200 727 1230	727		<u>`</u>	774	7 180	7.7.800	7	717	4807		08000	,	7084	183	1961
4767	00067	4767 00667 2, 40000002, 2,563 1341	263			775	0823	4775 00823 2. 400404		435		4783	10000	2, 4, 2	4783 00001 2. 4. 2002003 303 108K	30,	1084
4768	0670	2, 4000005	133	747		776	0820	4776 00820 2. 4005000	373	615		:	1	F (		,	
1794	99689	4794 — 99689 2, 400020020 818 1135 4801 — 99833 2, 4006, 20	818	1135	4801	:	0833	2, 4006, 20	283								
1795	99707	4795 - 99707 2, 4000402	286	807	4802	<u> </u>	9839	286 807 4802 - 99839 2, 4009	8								
	-	١		1		=	-		-								
Ã	ringt m	Bringt man alle Primzahlen der vorliegenden Tabelle gleich jenen der dyadischen Primzahlentabelle von 5 bis 16381 in	len de	er vor	liegen	den T	abelle	gleich jenen	der d	yadisa	then P	rimza	hlental	belle vor	n 5 bis 1	6381	.5
Canada		Courses mit is sinon commission with the North was been identified Tillian Ass mit North was britable	1 000	Months	, .	77	.0.04	iomot die iemei	11:00	72510	7	74. 47	No.		ac do do	D	Š

von der Form 6l-1 oder einer solchen (Z") von der Gestalt 6l+1 liefert, so ergibt sich folgendes Zahlenschema, in welchem mit N' oder N", je nachdem die Verwandlung derselben in Kettenbrüche die charakteristischen Exponenten einer Primzahl (Z') Gruppen mit je einem gemeinsamen Werthe von N und bezeichnet die jeweiligen Zähler der mit N als Nenner versehenen Bruche jede gleichzeitig in zwei Rubriken auftretende Specialisirung von N mit einem Sternchen versehen ist, um hiedurch die Zusammengchörigkeit der bei solchen Zahlen räumlich getrennten Primzahlengruppen zu markiren.

N"         Z"         N         N"         Z"         N"         Z"           23         349         *47         41         4129           23         373         49         30         347         31           15         499         30         347         31         331           19         1543         49         30         347         31         331           10         1543         13         953         19         431         431           24         136         45         32783         11         1951         46         326           24         551         45         32783         11         1951         46         326         11         953         46         326         12         13         12         <
*47
*47
× * 4 4 7 2 8 3 8 3 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
83 S1 S1 S1
2/, 349 349 409 409 409 1543 1543 1536 1536 1536 1536 1539 1789 1
259 419 419 419 777 2081 40961 112359 65543 65543 15359 15359 15359 15359 15359 15359 15359 15359 15359 15359
X 40 4 9 8 8 8 8 4 4 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6
× + + + + + + + + + + + + + + + + + + +
N" Z" 483 29 463 39 463 39 463 39 463 39 463 39 463 39 463 39 463 39 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49
8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
389 2039 2039 2063 761 773 1409 2111 443 443 443 443 443 443 443 2063
∑ 14
33 33 33 33 34 8
7,7 4093 139 157 199 4099 4099 12289 12289 12289 12389 12389 12389 12389 139 139 139 139 139 139 139 13
N
227 449 107 107 101 503 6143 1031 1031 1031 149 179 3377 1151
* 3 3 3 11 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
7 7 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
239 239 239 239 239
<u>γ</u> α ω 4 4 α α α νω νο 4 μ α α ο α α α α α α α α α α α α α α α α
× 8 9 1 1 8 1 1 6 1 6 1

83* 52 21503 72 8287  85 62 1181 46 3049  48 1481 31 7039  26 1181 19 312707  27 1607 27 777  28 1677 27 777  29 1203 33 1399  13 16193 5 1327  76 16411  87 64 1163 55 1327  88 2 56 68 3 4 853  *89 55 68 3 4 853  *89 55 68 3 4 853  51 2141 25 1363  61 2341 25 1363	652
52 21503 62 1181 63 1181 18 1973 47 3011 74 4133 76 1647 13 16193 76 17923 66 17923 66 17923 66 17923 66 17923 77 3203 14 8069 77 8231 77 8231 78 1847 77 8231	_
X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	37
	3023
	49
<b>~</b>	
N''   Z'   R   1053	4603
2 8 8 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	63
7 1931 2309 22309 22309 22309 2212 2212 2212 2323 2323 2323 2323 232	10091
	13
N 77 19 18 81 883	
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	7297
× × × × × × × × × × × × × × × × × × ×	23
Z 8 2 2 8 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	34 1571 23
	34
*69 73 73	*77
27', Z', 2179 23 1759 111 2011 250 2179 25 32779 26 613 27 65 2179 27 65 2179 28 22 1783 29 6271 28 1279 29 1597 20 15	62 32833
17   17   1947   19   19   19   19   19   19   19   1	
	53
× 69 65 69 84 69 80 60 80 60 800 800 800 800 800 800 800	
N", Z", 49 16447 9 322 57 1063 34 733 226 787 111 1997 221 1777 111 1999 22 3457 7 8167 8 81 8 81	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
N.         Z           331         743           76319         743           7 16319         743           31         743           31         3041           32         3041           33         3041           34         3041           37         2687           31         2281           31         2281           31         2281           32         2687           33         65519           565519         65519           24         1667           16         1913           25         3269           25         32831           3137         3137           3137         314001	33791
	51
S S S S S S S S S S S S S S S S S S S	

		**
,2	88 8881 80 9343 70 10369 62 11779 42 13567 34 14401 16 16239 81 18439	41 1741 31 1867 23 7927 70 2719 64 2953 42 3463 42 3463 65 5569 67 5647 67 5647 8353 90 17401 47 26113 39 28663
N".	40 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88	T control of the cont
2	21 [5887 28 30713 57 49139	46 1037 20 12263 35 12263 37 12263 37 2 2269 47 2 2939 21 3989 48 6719 48 67
N'	188 7	04 7 7 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 8 7 9 9 8 7 9 9 8 7 9 9 9 9
×	601	H 6
,2	62 2833 109 59 5953 88 8443 68 10303 86 34303 47 1579 47 1599 88 2281	70 2437 33 3559 30 3727 31 220 15937 31 28927 32 28927 32 28927 32 28927 32 28927 32 28927 34 2169 13 218 10 65497 10 65497
N".	0 E 2 8 0 8 4 4 8 8 7 7 1 8 2 0 0	
2	3911 1373 1493 2417 3779	
N'	277 277 23	28 1 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20
N	*105	601 *
,2	H H 4 0 00	1723 3319 3319 3319 3319 15877 1623 2873 32727 32727 1847 1847
N''.	1	
,Z	HH (1	73 2447 73 2447 265 2657 265 32657 16 8093 81 8831 81 8831 81 8831 81 8831 81 8831 81 8831 81 8831 81 8831 82 10271 83 83 8699 84 949169 85 103 87 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88 88
N'	_	Ī.
N	*101	
Ζ''	1171 1609 2293 3343 3613 3889 32803	1 40001
N.		
Z.	33 14321 76 1109 662 1307 66 1361 26 1901 77 2 2153 57 2831 23 3851	⊢ 4.ΩI I
ķ	-	7 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
N	*95	66
,,2	31 7159 19 7873 17 7951 42 12301 36 13309 51 94207 27 1831 27 1831 28 3571 29 3571 20 3571 20 3571 21 3571	3313 3853 4177 4231 31741 2137 3037 8233 35839
\ \		8 2 2 2 2 8 2 3 8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
2	39 3167 74 4337 13 16253 66 1187 71 2237 71 2237 73 3323	12 8147 55 1250 56 1250 57 1261 64 5087 14 8111 82 16481 84 16481 87 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 37 1721 38 1721 39 1721 30 1721 31 4007 31
` <u>`</u>	39 141 131 131 132 132	2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
>	68 *	* 89 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80

',Ζ	96 9601 32 15373 32 15373 26 63493 71 98047 70 98047 70 98047	53 6673 109 17377 23 32377 24 40897 105 4287 105 4561 105 6673 56 1324 56 13327 22 16141 121 16477 72 49123
N.	0 2 2 2 3 3 4 4 5 6 6 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	001 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00
.Z	30 7793 96 115 8297 54 109 8573 32 101 9203 26 79 11379 71 117 32993 120 65657 92 80897 62 98561 13 7703 56	29   7549 29   7549 29   7377 29   7377 30   727   84   2767 30   7823   105   5857 118   1663   75   6073 60   25343   56   13249 48   28607   54   1337 36   32507   11   16477 59   51   197   72   49   123 50   81   929   125   65587
Ŋ	30 1115 1109 117 117 120 120 621 131	H
×	135	137
,Z	2957 56 3187 *133 3299 101 4447 4271 59 6199 4733 23 8017 6089 110 8329 6089 100 16189 8387 107 16903 9281 55 25603 9281 65413 7393 7393	55 1621 30 377 30 3877 57 6367 64 8713 72 12097 70 12253 58 12547 54 13183 18 16267 16 65287 28 2 2749 28 2 2749
N"	001 001 001 001 001 001 001	25 0 0 7 4 4 4 7 7 8 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
2	H H A A	76 1451 55 100 2267 36 100 4253 104 77 11393 104 61 12323 72 59 12479 70 103 35327 58 62 98369 54 16 75 2969 82 16 75 2969 82 16 16 16 17 18
N.		
N	961	1 8 1 %
,2	76 2803 87 5023 29 7741 23 7993 19 8101 68 12163 24 15889 09 16519	93 2339 100 2203 79 2693 92 2383 71 2999 80 2671 49 3389 70 3019 35 3761 103 4327 72 5903 77 5623 74 7087 33 7669 81 6703 68 12241 20 32321 28 15619 53 52223 107 16831 12 65921 114 32839
Ν,	0 8 4 6 1 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	100 80 80 103 103 77 77 73 33 104 114
Z	33 3209 76 2803 27 3929 29 7741 96 4547 23 7993 56 6257 19 8101 6077 68 12163 97 12263 97 12263 97 12263 97 12263 97 12263 97 12263 97 12263 98 16607 98 16607	93 2339 100 2203 779 2693 92 2383 771 2999 80 2671 49 3389 70 3019 35 3761 103 4327 72 5903 77 5623 40 7187 37 7393 40 7187 33 7669 108 16703 68 12241 20 32321 107 16831 112 65921 114 32839
N,	H H	935 239 335 34 40
×	125	127
,2	38 14347 57 98317 71 1429 76 2531 76 2683 35 7417 96 8719 94 12541 54 12541	52 3217 101 4271 95 4513 91 4621 85 5059 73 5641 109 16453 65 24547 23 31873
N',		
Z	23 15881 106 65789 106 65789 87 2423 45 3547 37 3623 38 6 4871 19 8117 65 12225 65 12225	53 12671 29 15377 14 32687 93 36353 13 65423 76 1367 52 3217 76 1367 95 4513 72 29 91 4621 80 20543 85 5059 20 32261 73 5641 16 32609 109 16453 110 65729 65 24547
N'		H H
×	* 121	123
<i>,</i> Z	98 33151 *119 7241983 81 1237 52 3109 42 3517 97 4201 93 4339 98 9151 99 16633	07 2344 49 1627 53 6211 55 6211 73 1381 73 1381 76 2617 76 2617 36 3643 37 7489 30 8431 74 11257
N.	722 729 729 729 729 729 729 729	
2	54 98321 24 7919 22 7949 11 8087 61 12269 48 26111 87 36857 53 49409	83 2441 49 24 14303 89 16889 53 3441 89 25 3449 89 25 3449 89 36 37 15329 100 25 15809 72 15800 72 15800 72 15800 72 15800 72 15800 72 15800 72 15800 72 158
ķ		8 4 4 9 8
N	113	#119

-		
1,2	61 26881 33 56553 35 66553 75 9832 75 9832	2393 II2 2473 2789 IO0 2677 376 IO0 2677 377 IO 88 IO0 2677 377 IO 83 IO 87 472 II2 834807 472 II2 834807 6101 IO 93 0193 IO 93 0193 IO 93 0193 IO 93 0193 IO 93 0193 IO 93 0194 IO 93 0196
Ŋ,	135 103 103 75	1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
Z	H H H H H H H M M M M M M M M M M M M M	Ойнини
Ŋ	129 89 73 134 96 72 137 137 140	211 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
N	*157	0.00 0.00
,,2	(4,0) 4.	113 4729 99 5233 33 7879 118 9187 32 15859 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 23 32479 24 5201 25 5201
N.		H
2	55 3539 64 41 3803 56 94 5507 95 88 5879 83 70 5197 59 127 33797 95 128 67577 91 100 57 3491 68	108   5009   113   4729   47247   4
Ŋ	97 55 41 94 88 88 70 127 128 128	8 4 8 9 8 8 4 8 9 9 4 1 6 9 6 4 1 6 9 6 4 1 6 9 6 8 4 6 9 6 9 4 1 6 9 6 8 8 8 8 8 9 9 9 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1
N	153	*157
Ϊ,Ζ	88 11339 68 12403 54 14083 46 14461 125 16879 91 22273 83 24061 132 32911 114 36617 135 65617	117 70057 108 42 3301 101 4657 3469 55
N".	8 8 8 8 4 4 9 8 E H E E E E E E E E E E E E E E E E E	1
2	70 24611 58 26879 20 32573 54 14083 113 36833 46 14461 101 40949 17 65393 81 24061 13 24061 13 25 16879 17 65393 18 33991 18 356517	89 2843 92 2797 118 4463 56 3469 104 5081 111 4657 94 5381 57 6907 127 8423 47 7207 129 8609 128 8377 100 9791 116 9091 101 17107 131 16573 120 17417 125 16573 120 13287 90 45061 130 65579 16 65437
Ň	113000	8 2 1 1 0 0 4 4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
N		181
,Z	6487 20 65029 44527 20 65029 11203 3 3547 4703 52 3547 4703 52 3547 4703 52 3547 60517 104 3637 60517 104 1939 8369 331 65647 8693	64 3181 62 3229 62 5277 65 6277 32 155749 20 65082 101 81409 104 26508 44 2971 123 4243
N"		
2	H H 4 701 H	68 24623 83 2963 64 53 3533 62 82 6011 65 109 1052 100 1001 101 1001 102 1001 103 1001 104 1001 105 1001 106 1001 107 1001 108 1001 108 1001 108 1001 108 1001 108 1001 108 1001 108 1001 109 1001
N		н
N	*	*149
,2	2467 2467 2469 237 2469 2	4 W W 4 W H H W
N.	80 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 0	H H H H
.2	H H 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	H .
N	H H	14 11 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10
N	139	* 143

N"'	8669 160 32869 2041 8249537 4657 66 55807 5229 60103 60217 8947 19623 2903 133 4663 2903 133 4663 2441 79 6343 2442 79 6343 2521 71 6012049 78 1121 10012049 78 1121 10012049
Ŋ,	0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
.2	
×	179 145 539 539 130 130 144 144 144 126 130 130 130 130 130 130 130 130 130 130
N   N'	181
,.Z	41 7717 419 145 42 8647 8647 7179 125 11251 37 137 17791 37 137 17791 37 137 17791 37 137 17791 37 137 17791 37 137 17791 37 144 155 179 179 177 179 179 177 179
N"	
2	175   47   3797   128   2347   248   2471   248   24847   248   24847   258   24847   258   24847   258   24847   258   24847   258   24847   258
Ν'	
N	5331   138   138   139
	*
Z	100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
N''	27337 27337 28829 28829 288383 2444 24537 2533 2647 27589 2957
2	109   10337   110   10267   131279   44   15331   15647   32   15919   34   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   3343   144   1534   102   100   10
Ŋ	169 109 73 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37
N	171
,Z	46 3739 *169 10337 110 10267  74 12511
N.,	44 8 9 9 1 3 1 3 1 3 1 3 1 4 4 5 1 4
2	7.74.75 7.7
×	104 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
×	165 101 167 199 499 499 1199 1199 1199 1199 1199 1
,,Ζ	
N"	
Z	95 2837 66 3307 34 7901 57 7129 103 10433 136 8389 47 14783 60 13831 25 16187 50 14431 28 24509 122 36843 86 24509 122 36843 86 24509 122 36843 87 109 132 36843 120 4643 91 6007 90 6029 103 21247 130 4849 36 62467 110 122 38697 110 122 38697 112 126 18047 112 126 18047 112 126 18047 113 126 18047 114 13583 115 126 13831 115 126 13831 116 136637 117 49199
$N \mid N$	<u> </u>
N	161

N".	444 I 4507	5347 5347 5437 6037	09 0373 01 7309 148 1547 147 19647 53 30697 53 30697 76 3499 151 5521 164 8731	146 9859 86 13063 169 17167
N"	159	36 129 127 113	162 162 163 164 164 164 164	146 86 169
2	107 49031 95 49193 55 60413 160 4397 159	172 16763 36 1605/ 5430467 121 90121 47 61949 157 9137 129 534/ 131 10463 127 543 173 33599 113 603	27 65183 01 27 65183 01 48 48 48 137 16 16 16 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18	61 14717 146 86 169
ž	107 95 95 55 160 155	57 47 47 67 131 173	6 4 4 6 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	26
N	*201 107 49031 95 49193 55 60413 203 160 4397	205 157 173 173 173	207	
,.2	23.89 83.90	45 7789 56 8863 56 9863 90 111071 88 12553	70 4481 63 63 14407 27 63 14407 27 63 25057 63 28729 63 11 158 34849 657 7 116 657 7 207 116 64 47 7723 9283 77 723 657	149 18457 62 57853 127 84991
N''		249 249 249 249 249 249 249 249 249 249	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	9 6 6 6
' Z	165 )3857 137 40193 117 45119 104 98207 123 2729 144 84 6440 115		175 32999 70 165 33809 62 33809 62 891 158 158 76 6899 83 593 158 158 158 158 158 158 158 158	
N.	8 4 4 6 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	145 1137 1109 1104 1106 1106 1106 1106 1106 1106 1106	118 76 76 76 76	3 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
N .	*197 165 )3857 137 40193 117 45119 104 98207 199 123 2729			
΄.Ζ		86 12577 74 13759 449 18307 92 49207 38 63499	4457 77 6691 4817 71 7069 6779 162 8527 7643 171 16567 9479 159 17383 3187 47 30781 4447 31 32323 6829 60 58111 *201 8371 161 68611	<del>*</del>
N"		113 86 149 149 88 88	***	
2	30 32369 171 32909 123 41981 91 49211 23 65327 118 89087	136   5003   113   5821   148   18413   86   12577   116   22541   74   13759   112   23579   43   31237   25   25   25   25   25   25   25   2		88 25073 46 30911 38 31769
N'		195 136 148 116 112	451 76 76 76 76 76 76 76 76 76 76 76 76 76	88 4 8
N	*193	1 1	4 197 1 197	
N'	65731 3253 3373	5059 8467 11743 15313 15823 16651 19441	8429 88 49411 9839 105 96769 101 98179 4649 149 4519 4943 133 5077 5309 113 5743 5309 109 5923 6053 85 6301 6791 51 7639 7211 121 21499 6667 115 90127	
N"	80 80	158 158 110 110 50 40 40 163 137	105 101 101 103 109 109 109 1133 1133 115	
.2	68 28289 169 65731 193 26 32531 43 62207 18 5471 80 3253 51 8753 74 3373	149 9951 113 5059 121 10559 158 8467 169 13121 110 11743 156 1759 40 15823 156 17159 40 15823 23 553987 163 16651 23 65309 137 19441	00 1	72 27653 68 28547 56 29633
N'	, [нн	121 121 166 156 156 104	90 41 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11	72 68 56
N	*189		*193   *86   90   90   90   90   90   90   90   9	
,.Ζ	53239 53239 5689 5827	142 9103 34 15991 147 17419 73 26641 158 33289 141 73471	116 2707 103 6043 42 15607 133 20287 1129 20287 81 25537 29 32377 60 57367 161 66529	4889 166 33013 5519 146 36097 9311 74 53503
N"	106	144 147 173 178 179 179	1116 103 103 123 129 135 135 135	
.Z	*183 155 33533 106 46591 *189 83 49667 74 53339 77 51713 185 76 6599 109 5689 56 7283 107 5827	67 14087 34 15991 49 15263 147 17419 43 15473 73 26641 112 22511 158 33289 54 29567 141 73471	79 3221 116 2707 22 5189 103 6043 45 8969 42 15607 76 26591 133 1947 53 59399 129 22287 29 32377 60 57367 161 66529	
N	155 83 77 76 56	127 67 43 112 137	120 120 145 145 53 53	134 116 139
N	185		187	*189 134 116 139
			·	

,2	189   16759   17431   17431   17431   17431   17431   17531	9463 9967 13633 99599 4651 6619 6793 7351 7351 11551
Ν.,	189 1177 1173 1165 1165 1165 1165 1165 1165 1165 116	15.88 1.37 1.37 1.37 1.37 1.37 1.37 1.37 1.37
2	46 31721 189 16759 171 36479 177 17431 139 43013 173 17929 138 87041 165 18481 101 24847 59 30529 51 31039 100 50047 88 53281	98 6359 164 9463 101 13451 128 9967 1101 13451 137 89599 68 29153 137 89599 68 29153 137 89599 134 5261 93 6619 134 5669 87 6793 100 6939 67 7351 100 6947 176 8971 178 6947 176 8971 179 8783 132 11551
N'	171 139 4 138 8 138 8	1 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
N	e .	**************************************
,Z	65 7243 *223 65 7341 121 24097 110 24337 160 37633 130 45121 122 48121 86 53377 68 57727 62 55011	
N''	20 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0	19996 1831 1793 1773 1773 1773 1773 1773 1773 17
7 2	33 44927 67 7243 53 61463 65 7321 49 62459 111 24097 160 37633 130 45121 132 48121 86 53377 68 53377 62 59407 32 65011	84 6863 96 12739 14. 10487 183 16921 14. 10487 183 16921 97 12641 179 17341 87 13331 157 19489 47 15761 155 19963 160 19073 103 98563 64 2663 82 6311 157 4957 83 69837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 175 8837 144 10321 177 187 187 187 187 187 187 187 187 187
N.	8 8 4 8 8 9 4 8 8	4 6 6 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
N	1 612	*223
7.,2	400930 57850 57850 65677 81943 4783 5869 8569	*
N''	146 40939 114 49081 66 57859 62 59377 193 65677 141 81943 157 4783 153 4933 139 5209 178 8563	120 12043 181 13804 171 17599 175 18397 165 18397 179 18691 179 24049 179 24049 179 24049 179 24049 179 24049 179 24049 179 24049
Z   1	67 28711 *215 117 48647 146 40939 *219 133 44927 53 29191 29133 114 49081 53 61463 29191 29133 29191 29133 291911 291911 291911 2919191 2919191 2919191 2919191 2919191 29191 29191 29191 29191 29191 29191 29191 29191 29191 29191	150 20231 120 12043 118 24329 82 13807 38 32159 171 17599 37 64499 165 18397 158 75773 159 18691 158 75773 159 18691 158 75773 159 18691 158 75773 159 18691 158 75773 159 18691 158 75773 159 18691 173 32969 95 6379 151 40577 83 6883
<u>``</u>	78 127 127 189 156	15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15.
N	*215	210
,.Z	67 28711 29 32533 184 33037 178 33601 178 53601 187 65809 183 65301 143 81901	4793 124 11527 5237 119 18301 5573 74 57283 3049 75583 6559 74 57283 5583 6921 6559 79 6921 7577 159 18493 5401 139 20611 4443 9924709 8541 29 32563
N".	70 60 60 60 60 60 60 60 60 60 6	119 119 133 133 139 139 139
2		
N.	112	1
2	116	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
,,2	167 17389 *211 112 24533 49 30817 135 41729 28 65119 51 61469 91 6361 27 65267 164 10159 134 10399 124 11287 64 14479 48 15493	155 16451 213 154 155 16451 255 165 136 136 136 136 136 136 137 137 137 137 137 137 137 137 137 137
N.,	16 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	20 8 9 4 7 7 9 4 5 5 5 4 4 5 6 6 7 5 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6
2	167   17389   49 30817   28 65119   29 2741   91 6361   81 3371   164 8839   138 5387   144   10159   118 5927   134   10399   56 7607   124   11287   75   14177   64   14479   45   5737   48   5493	140   19973   155   16451     46   31247   89   25609     112   31793   142 40933     112   37919   142 40933     113   1557   15757     114   124   124     124   124   123     125   125   124     125   125   124     125   125   125     125   1
ķ	129 130 118 118 172 172 172	74 4 1
2	209 129 130 130 256 256 256 256 256 256 256 256 256 256	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
	_ <u>*</u>	

,	707 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	6 4 0 0 E H 0 0
	12149   148   11197   15227   136   1197   197	7 302 2 4 7 0 4 9 0 4 9 0
N.,	4 E O C I E C O O O O O O O O O O O O O O O O O O	0 4 E E
2	243 133 12149 148 11197 65 15227 136 11971 55 15569 10126119 67 60161 77 28723 218 65687 214 32983 218 65687 214 32983 192 17729 106 12781 172 19937 104 12829 144 22787 86 14293 193 35671 11124841 59 61487 43 32143 226 65927 52 63103 227 68 7529 179 4759 203 8637 55 15559 201 8627 159 20731 215 33071 7788549	207 33773 67 30223 181 37379 142 47041 105 51263 132 49009 140 94463 112 49669
$N \mid N' \mid$	13. 15. 19. 19. 19. 19. 19. 19. 19. 19. 19. 19	207 181 105 140
N	24 2 2 2 2 2 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	
,.Z	141	6421 9007 9349
ν.,	181 141 141 141 141 141 141 141 141 141	103
2	37 64763 181 73699 184 72701 162 81899 186 4523 147 5581 92 6833 141 5749 189 8849 89 6967 93 13553 98 13291 55 15791 64 15241 104 25589 205 16963 84 28631 199 16963 65 30203 157 20521 171 39041 71 29437 165 39229 210 33049 77 57383 208 33223 216 65699 202 33769 198 68351 168 40063 110 49633	154 5273 103 140 5867 188 157 10313 178
.V.	6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 7 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6 8 6	154
N	239 182 183 183 183 193 193 193 193 193 194 195 195 195 195 195 195 195 195 195 195	*243 154 140 157
,.Z	5090   148 42751   4473	
N'.	8 40 80 4 90 90 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80	182 72 38
2	41 16091 148 42751 126 19709 127 42673 104 25097 74 28751 153 41057 153 41057 165 2823 145 5563 167 9887 206 33091 175 9109 182 18191 125 4973 165 139 165 16943 146 44029 182 18191 182 18191 183 5849 165 13339 165 15319 165 16943 164 44029 184 18515 185 1957 189 18339 186 1757 189 18339 187 18757 189 18339 188 17657 189 24439 170 19469 180 17657 189 24439 170 19469 180 17657 189 24439 170 19469 170 19469	36 34441 182 36739 195 34367 156 41017 185 35969 72 58363 83 57287 38 64609
'n	1001 1001 1001 1001 1001 1001 1001 100	8 8 9 8 8
N	*235 1666 1044 1044 1054 1054 1054 1054 1056 1056 1056 1056 1056 1056 1056 1056	
,Z	15   13197   95   26371   *235   41   16091   148   42751   *239   37   64763   181   73699   *243   133   13149   148   11197   162   12473   136   1197   126   124473   126   1	149 10529 62 15289 139 11321 181 18169 129 12113 69 29443 51 15683 31 32587
N.		62 69 31
,Z	231 125 12197 95 26371 89 54269 31 65147 128 96263 142 5514 138 11399 143 551 199 8599 144 551 190 8599 145 138 11399 147 138 1139 1244 3731 156 20357 151 20593 160 20357 151 20593 160 20357 151 20593 178 18311 159 20443 160 20357 151 20593 178 18311 159 20443 178 18311 159 20443 178 1831 159 20471 160 20357 151 20593 173 36897 60 45977 167 38903 32 65071 101 51071 185 69697 235 146 5399 63 7603	149 10529 139 11321 129 12113 51 15683
<b>%</b>	25.7.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2	149 139 129 51
N	* 24	
Ν".	107 17911 107 17911 108 19421 39 32233 186 34297 98 51 169 98 51 169 135 68865 135 68865 135 10421 135 10421 135 10421 135 10421 136 10421 137 10421 147 10421 1	7853 190 8521 9377 106 12379 10739 62 15199 11801 107 24691
.V.'.	7.17.17.17.17.17.17.17.17.17.17.17.17.17	190
.2	5861 5861 7886 11897 11893 114753 31991 3191 31	
*	4 2 2 1 2 2 3 3 5 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	169 145 131
N	#327 130 130 130 130 130 130 130 130 130 130	

38

,2	59 31219 41 32359 112 51217 76 59359 58 62473 58 62473 125 98347 1125 98347 1126 20983 1126	79 7333 74 14983 74 14983 70 15307 173 2559 71 30469 236 32941 61 507
N".	01 4 1 6 7 8 4 8 8 9 8 9 9 4 8 8 8 9 8 9 8 9 8 9 8	7 2 4 7 7 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
2		98 7001 79 7333 314423 172 10357 61 62081 70 15307 142 98081 173 20599 153 63 659 151 30469 226 33957 224 33757
N	263 151 208 119 208 141 83 224	80 8 15 1 4 1 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1 4 1
$N \mid N$	265	267
,.2	10657 *259 229 32933 39;32443 *263 15147087 10657 228 65981 192 36913 12451 84 38977 13377 82 57457 13593 157 82 57457 12503 1250 9127 12613 250 165281 260 9127 1262 16823 184 9871 1712569 17714813 1723 194 73751 182 10009 17714813 1743 194 73751 182 10009 177 14813 1783 194 73751 182 10009 17893 1783 1783 1783 1783 1783 1783 17893 17893 1784 184 9871 17893 17893 17893 178649 1787 1787 1787 178813	111 6451 111 6451 111 6451 11 7573 11 8629 12 12 13 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
ž	8 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	163 1111 109 171 181 181 633
2	229 32933 3932443 228 65981 192 36913 228 65981 192 36913 184 38977 220 15581 20 9127 220 16523 188 9983 221 34721 184 9871 194 73751 182 10009 109 26107 230 32971 230 32971 230 32971 231 34273	154 5741 163 5431 100 6857 111 6451 207 8819 109 6547 203 9041 71 7573 185 12071 78 14653 122 24677 181 20347 120 24821 97 27901 223 33503 93 28537 205 35831 63 30757
N.	2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$N \mid N$	25 26	* 263
,,2	188 4691 181 4951 108 6473 162 10657 177 10163 118 12373 151 11399 106 13177 1139 12203 98 13693 1139 12203 98 13693 1139 12203 98 138513 106 21521 53 31723 112 25409 91 28513 112 25409 128513 112 25409 128513 112 25409 128513 113 25409 128513 114 25301 135 98251 115 50111	6709 8803 11887 12517 12823 20233
$N^{\prime\prime}$	181 1162 1165 1165 1455 1455 1456 1456 135	101 146 116 1110 1101 191
Z	188 4691 181 4951 198 6473 162 10657 177 10163 118 12373 159 10883 116 12451 151 11399 106 13177 113 12511 165 20743 113 12511 165 20743 176 20411 97 27631 160 21521 53 31723 112 25409 39 32413 92 284097 146 47137 92 284099 128 135 119 49391 135 98251 115 50111	109 51329 45 64319 163 10343 100 6709 167 10343 204 8803 168 10691 146 11887 113 12689 116 12517 107 13151 110 12823 73 14867 191 18553 55 15773 179 20233 188 18959 93 28351
N   N'	257 108 108 177 175 1139 1149 1160 117 117 117 117 117 117 117 11	109 167 107 107 108 188
N	257	*259
,,2	12987 14319 15767 15739	173 81007 117 98809 117 98809 17 98621 77 29167 208 34369 188 37117 181 78079
٧٣.	171 181 182 190 190 190 190 190	173 163 77 77 77 77 188 188 181
Z		194 72959 173 81007 188 73757 117 98800 45 112 6317 163 5227 *259 183 71 14969 89 28621 167 217 33377 53 31087 113 188 37117 731 188 37117 551 181 78079 188 1
Ν'.	251 221 221 205 205 205 205 205 205 205 205 205 205	194 188 112 7 17 2 17
N	25.3	25.5
,2	95 6841 *251 158 10513 92 13921 46 15973 143 23539 146 45823 32 65401 32 65401 163 81967 163 1833 76 14563 74 14713	99 17443 883 18913 03 2055 1 03 2643 99 26647 99 28753 77 28933 39 3237 1 37 3491
N''	995 944 145 165 181 181 181 174 175 175 175 175 175 175 175 175 175 175	1899 1833 1033 177 77 77 77 33 33 33 33 33
.2	249 76 7253 95 6841 197 8741 158 10513 151 11243 92 13921 206 16931 46 15973 110 2121 143 23539 211 33521 146 45823 179 38783 56 64201 133 49019 38 64783 59 6631 32 65719 29 65357 223 65719 20 65357 223 65719 20 65357 223 1671 21 104 6551 181 4813 207 8501 162 162 10333 173 11051 147 5737 207 8501 162 10333 173 11051 147 17513	109 12743 199 17443 89 14243 183 18913 55 15641 163 26551 214 16661 99 26647 174 20399 79 28753 172 20399 77 28933 148 22721 39 32371 54 31481 37 32491
,,,	1976 1977 1979 1979 1979 1979 1979 1979	008 008 008 008 008 008 008 008 008 008
×	**************************************	

.2	5531   109   6871   8861   167   23071   8861   167   23071   26557   87   26557   17   26557   87   26557   17   26557   17   26557   17   2657   17   2657   17   2657   17   2657   17   2657   17   2657   27   27   27   27   27   27   27
N.	1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100 110
Z	
×	74444 40 40 10 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
×	289
Z	192 40843 50 62983 58 63439 197 79867 175 96001 175 12071 186 12071 186 12071 187 12071 188 14419 189 14817 181 21001 181 21001 181 24733 176 43777 181 24733
.X.	0 4 0 8 E V V V V V V V V V V V V V V V V V V
Z	281 86 28961 200 38923 193 40709 1924 40849 87 57791 60 62983 130 98801 58 63439 213 73581 221 89933 175 5449 221 8993 175 5449 221 8999 208 14419 127 12503 86 14533 107 13799 88 14419 127 12503 86 14533 172 2243 234 33889 231 3347 225 69661 246 66179 203 77761 238 67791 203 77761 238 67791 65 15643 246 66179 203 77761 246 66179 131 24733 124 24419 131 24733 124 2469 176 43777 104 2815 168 65561 53 63809 34 65323
N N	283 193 201 30 201 30 201 30 201 30 201 30 201 30 201 30 201 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30 30
*	281 867 193 193 193 193 193 193 193 193 193 193
ž	
۲,,,	44487 608 70 0 64 6 70 0 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70 7
Z	277 202 18911 174 10729 170 22079 122 12601 168 22481 84 14557 156 23801 76 15091 44 3309 233 16843 241 3308 3107 27073 228 68099 75 30241 228 68099 75 30241 220 73079 65 30853 241 30847 176 10639 107 13577 106 13729 83 14621 221 175 21693 163 46073 151 24391 115 52733 247 65839 202 76289 149 98041 115 52733 247 65839 120 17789 163 11719 129 1181 181 20719 120 17789 167 22591
$N \mid N$	2011 4 4 6 6 7 6 7 7 7 8 9 9 1 7 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
×	*277 200 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
,,Ζ	\$6899 \$60159 \$60159 \$6029 \$6029 \$6029 \$602 \$602 \$602 \$602 \$602 \$603
λ,	100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
7	
N N	271 201 121 121 121 120 120 120 120 120 12
>,	<del>*</del>
٤,,	
$Z \mid N''$	165 175 175 175 175 188 183 183 183 173 173 173 173 173 173 173 173 173 17
/	
$N \mid N$	269 104 713 713 714 717 719 727 119 729 189 189 187 171 171 171 172 172 172 172 173 174 174 177 177 177 177 177 177 177 177
N	269
	Ü

69 15443 162 12109 *299 212 19553
47 32299
56 31817 232 35323
203 40697 I74 45439
63 62981 257 66109
57 03527 233 70141
138 98543 201 81799 301 187 10799 115 6823
297 215 9539 214 9649
205 10133 134 12457
230 I 798I 64 I 5733
164 24113 241 17293
122 26399 161 24379
56 31859 218 37369
203 40841 263 65827
61 63467 257 66337
۱,
4303 116
299 215 9689 183 5557
193 10331 186 10771
127 12821 122 13267
125,13043 84 14887
111 13859 237 17449
246 17033 131 25339
220 18593 105 28579

				Ę	-		_	_		_	_	_		_			_	_	_	_		_	_	_
Ž	87 15269 229 20389 270 17117 145 25183	232 19727 127 27103 102 28871 125 27457	100 29063 57 32203	78 30809 278 33547	205 43019 244 30901 187 47130 178 48700	129 53441 130 53269	85 61403 120 56311	62 63727	149 99391			89 15173 231 19993	230 20129 183 24091	86 30677 143 25579	50 32429 101 29023	279 33647 97 29473	243 37361 226 40867	205 43517 214 41221	187 47363 186 47623	79 61559 126 54787	288 66161 88 60943	274 67709 213 82939		
N.	145	127	57	278	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	130	120	05	256	242	202	231	183	143	01	6	326	214	186	126	88	213		
2	5269	9727	9063	6080	3019	3441	1403	_	221 202 11057 256	121 14057 242	4153	5173	0129	0677	2429	3647	7361	3517	7363	1559	1919	7709	250 / 1003	228 81281
	87 I	132 1	00	783	805	29 4	85	_	-  -	212	1 61	89	130	863	503	1793	143	205	874	790	88	74 6	100	80
N N.	320		_				_		3	2		_							=	_				
i.Z	67 31699 *329 87 15269 229 20389 61 31849 270 17117 145 25183	277	1017	559	399	143	8923	821	- 1 68 E	840	673	7897	6961	903	_	620	947	1367	649	707	666	289	870	747
N	67 31699 61 31849	124 54277	74 62017	62 63559	50 64399	201 86143	\$4 8	84 I	24	37.2	2 2	36 37	8	27 75		95 29629	91 29947	68 63367	62 63649	93.6	05.8	181 96289	22 1	79 16
Z		н н			•	4 (4	49 2	33 I	39	7 09	16	512	60	00	. SI					13	717	-	101	31
							325 189 11549 254	119 14033 184 11821	252 17939 124 13681	94 29669 137 25849	281 33191 121 27673	229 39551 236 37897	183 47609 48 64969	99 58109 227 79903	178 97151	327 209 10457	137 13007	101 57839	71 62723	59 64013 293 65707	214 81971 205 85999	_	*329 211 10391 132 13879	89 15131 279 16747
N N	<del></del>						5 18	I	25	Ò	8	7	8	ŏ	17	7 20	13	0	7	·	7	_	0 21	<b>&amp;</b>
	*32						32																	
Ñ	321 203 10607 140 12697 *323 133 13103 116 14107	119 13883 98 14503 254 17477 70 15667	224 19997 101 28759	89 29959	59 31981	182 23609										12013	200 20981 120 13411	190 22409 110 14173	90 14551	94 14797	90 29921 253 17761	70 31391 233 19231 275 33350 101 22651	199 44027 127 26683	28429
· .	140	8 %	IOI	8	59									-		142	120	0 0	8 6	9	253	101	127	115
$N \mid N' \mid Z \mid N'' \mid$	203 10607 140 12697 133 13103 116 14107	119 13883	2666	220 20393	200 20753	82,23609	86,30431	50 32183	97,44159	91 45077	49 64781	238 73823	230 77813	194 90089	3	7967	1860	2409	100 23057	132 20501	9921	1391	4027	286 65831 IIS 28429
,- え。	1331	254 1	224 1	12012	2002	8 2	86	50	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	191	49	238/7	230,7	9. 2.	-	2501	2002	000	0 0	32	90	703	90	988
>	321											-	<u> </u>			323	•			·				
<b>1</b> 1	1119	3219	4149	5259	9843	4121	4793	3751	230 37951	192 45007	241 73597	171 97777	3903	7011	9717	5117	6737	7137	4429	o189	1281	4891	259/09147	197 87553
	1 4 8 4 I	30 I	141	84 1	23 1	75.2	45 2	6003	30 51	92 4	1417	719	181	163	125 1	414	252	23	603	224	900	486	0.00	97.0
,X Z	311 258 67607 177 94219 *317 139 12659 194 11119 254 68639 123 13457 184 11587	67 15797 130 13219 242 18329 120 13789	224 19697 114 14149	172 24359 84 15259	142 25031 223 19843	87 60353 175 24121	51 64553 145 24793	258 68993 266 33751	· _ · ·	_		-	9413 118 13903	179 11933 263 17011	188 22751 225 19717	134 25919 141 25117 "323 250 17967 142 12013	56 32141 125 26737	271 33413 123 27127	171 48953 260 34429	61 63599 222 40189	43 65129 206 41281	250 70913 48 64891		
i '!	39 I:	67 1	24	72 2	4 2 6	87.6	51.6	5 8 0				-		191	88	34 2	56 3	713	714	919	436	50 7		
N N	317		_~_	-	Ξ.			<u> </u>				-	319 233	-	_	_	-	-	-			-		
.2	4012	6763	9049	583	616	303	267	879	033	2 0	879	827	85 I	267	453	729	327	779	229	183	391	6571	120	60
: 1	794			8 12	2 12	7 21	5/275	7 281	34 c	2 36	8 37	2 56	7 65	3 66	3.67	9 97.	165,98227	92 14779	88 14929	1 31	268 3339 I	9	80	o i o
<u>×</u>	7 17	7 12	1 2 7	I I3	13	7 19	6	6	7 25	2 10	1 2 2	7 11:	1 27	1 27	9 20	916	10	7	ο O		20	12	7 25	2 2
Z  N''	258 67607 254 68639	313'227 9497 121	93 14627,220	254 17291 138 12583	242 18041 132 12919	218 20063 197 21379 172 24197 191 22303	122 26849 115 27967	116 27773 97 28879	56 32057 258 34033	127 53201 232 36919	75 61511 228 37879	69 62477 112 56827	55 64271 277 65851	214 81671 273 66067	184 91139 263 67453	180 94079 169 97729		315 173 12107	214 81869	184 92153 71 31183	· ·	12171186 5717 131	203 10427 250 8779	177 12011 220 10093
N. N.	258 254	1227	6	254	242	172	122	116	50	127	75	69	55	214	184	180		173	214	184		186	203	177
×	*311	313																315				1.5		
		_	_	==		===	_			_		=	_		=	_		_	_	_				_

	152 50683 183 98221	13032 13032 13032 13032 334487 72577 82171 82171 323311 323311 323341	206 45697 46 65203 241 81439 223 83983
1,74	152	2 448 2 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	200 241 223
2	*347 164 98387 152 5068.	349 243 10037 146 13033 158 248 1187 1158 248 1187 117053 1158 248 1187 117053 1158 25657 2667 2667 2667 2667 2667 2667 266	284 69383 46 65203 284 69383 241 81439 223 83983
N   N'	164	2 4 4 4 4 6 6 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7	108
>	*347	351	
,.Z		9067 10831 188597 54879 71647 10647 10631 17191 17191 17863 179863	34039 37087 18157
Ŋ,		0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	192
2	236 81401	345   193   1198   266   9067   190   90269   345   193   1198   266   9067   124   283   191   285   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   274   275   274   275	121 57251 286 34039 67 63531 256 34039 47 65111 192 48157 292 67343 156 49927
À	236	40 000 440 000 000 440 000 000 000 000	20 4 67 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20
$N \mid N$	343	345	
,.Z	731		
	00 14 47 19	26 6 1 3 2 0 5 0 0 1 3 2 0 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
"X	27 It	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0000
Z	141 13127 100 14731 280 17093 247 19069	**343.278   17.093.447   19.009 238   17.207   13.0059 238   17.207   13.0059 238   20.0991   20.058883 96   29.753   126   55.681 29.5   33.179 13.9   53.177 81   68.29 25.2   72.719 25.2   23.2   23.2   25.2	93 60449 296 66449 270 70529 254 73859
N'	1 141	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2 2 2 6
N	*34		
Z	20389	138 26489 105 23113 62 3105 313 313 279 33851 286 33469 273 34673 154 49603 197 4649 58 64453 185 4849 233 80911 185 4849 233 80911 268 66121 268 66121 226 73607 230 81761 220 82231 196 23327 190 11959 293 3320 11353 196 23327 190 11959 269 34870 74 15661 247 3787 1275 17299 278 68543 241 19479 278 68543 241 19479 278 68543 241 19479	6869246 9433 20371713 962914812637 237 10061 246 9613 19392617977 20111369 208 11161
,,	231 149	10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 1	2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
Z $N''$	242 19421 231 2038 212 21407 149 2511	138 2149   149 2811   138 21489   105 2881   138 21489   105 2881   138 21489   134 619 28   134 619   135 6148   135 6148   136 614	10061
N   N'	242	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	237
×	*337	339	*341
,,Z	14251	3691 239 19429 3691 239 19429 0249 197 22639 6513 202 44959 9723 116 57271 9491 123 6997 9691 123 6997 9691 123 6997 9797 142 12841 7597 259 18023 7709 181 24421 7597 259 18023 7709 181 24421 7597 259 18023 7709 181 24421 7597 257 18223 7709 181 24421 7709 181 2441 7709 181 2441 7709 181 24943 7709 181 24943 7709 181 24943 7709 181 24943 7709 181 24943 7709 181 24943 7709 181 2494 7709 869 246 9433 9629 148 12637 9929 94 14947 1939 261 17977	
N".	88	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	4 4 6 6 6 4 4 10
N Z	333 241 9551 118 14251 *337 242 19421 231 20389 *341 141 13127 100 14731 *343 236 81401 203 11171 88 15277 212 21407 149 25111		<b>H</b>
N N	241	20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 2	1 2 4 3 1 1 8 9 1 1 8 9 1 1 8 9 1 1 8 9 1 1 1 8 9 1 1 1 1
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	333	33.5. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.	<del></del>

,,Z	*369 313 33479 107 29641 257 40127 299 69313 161 50753 281 73477 155 51839 131 56957 230 86027 230 86027 132 28439 104 28819 97 30859 77 63587 79 31513 25 80387 228 44041 25 80387 28 44041 26 9623 154 13159 26 9623 154 13159	110 2943 209 23929 84 31493 259 23929 82 31253 99 30493 313 33749 79 31567 198 98129 242 41149
i.	78 901 72 72 8 4 1 1 4 4 7 8 8 4 7 8 8 4 7 8 8 4 7 8 8 4 7 8 8 4 7 8 8 4 7 8 8 8 7 8 8 8 8	9 8 9 9 4
$Z \mid N'$	20 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2	25.0 3.334.79 25.0 3.334.79 25.0 3.334.79 25.0 3.391.1 25.0 5.0 5.0 5.0 5.0 5.0 5.0 5.0 5.0 5.0	984 31193 13 33749 98 981293 13 33749
N N	313 33479 305 33479 305 33479 155 51839 131 56957 77 63353 132 2860 79103 132 28439 104 298439 71 63587 725 80387 273 9371 109 14027	3133749 3133749 3133749 3133749
×	#369 31 161 161 161 161 161 161 161	
,,Z		919 1623 1623 859
i i		237 82501 269 18919 265 19417 209 23623 167 24859
N		7007 8 8 8 8 1
2	365 107 58943 368 98849 168 98849 168 1255 10067268 9421 161 12653 206 11923 153 18893 140 13687 280 18341 235 20857 280 18341 235 20857 280 18341 235 20857 233 42017 142 28653 149 53189 135 27919 115 57587 77 31627 115 57587 77 31627 115 57587 150 52999	143 13487 269 18919 236 20879 265 19417 206 24029 209 23623 110 29207 167 24859
$N \mid N$	0 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	143 236 206 110
×	36 70 8 8	159 12713 206 11863 222 22409 134 13999 *369 143 13487 369 18919 201 48353 98 15193 255 206 24029 209 23623 209 2362
,,Z	2029 2029 2029 2029 2029 2029 2029 2029	863 3999 7257 851
I 11	1 0 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	34 1 1 1 1 2 2 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
"N Z		<u> </u>
2	361 220 22367 211 23029 84 32941 284 35311 84 32941 284 35311 64 3217 280 35869 255 39419 260 38653 221 44417 256 39103 101 5051 156 51151 99 60383 140 53887 75 6337 126 57241 55 64793 96 60937 49 6599 293 6912 308 66617 225 86029 250 2037 25 203749 130 28849 123 20749 130 28847 171 247 81847 266 74759 47 181847	159 12713 206 11863 222 22409 134 13999 201 48353 98 15193 163 50153 297 17257 109 58379 262 38851
N N	2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	159 222 201 163 109
×	363 **	*365 159 12713 206 11863 222 22409 134 13999 201 48353 98 15193 163 50153 297 17257 109 58379 262 38851
,,2	222 226 246 266 267 267 267 267 267 267 26	
1 1	44800000000000000000000000000000000000	8 2 1 1 2 1 1 2 1
N.		37 25
Z	357 104 29573 220 44017 27 1 36831 128 55755 27 1 36831 128 55757 191 48989 86 61483 137 54287 74 63409 316 5543 265 73783 266 7559 233 82039 267 74747 199 96223 260 757747 199 96223 260 75777 199 96223 260 75777 199 96223 260 75777 199 96223 260 75751 199 17317 150 26099 233 20563 136 27551 223 21601 64 32669 213 22573 277 3669 213 22573 277 3669 11 289999 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209 149 522289 107 29209	19848259 261 9587 208 11731 21311351277 18211 15113037 251 20101
N N	101 101 130 130 130 130 130 130 130 130	261 213 151
8	359	*361 261 9587 208 11731 151 13037 251 20101
,,Z	353 245 10091 222 10711	1 0 0
N.,	4 4 6 4 6 4 4 4 6 4 6 4 6 4 6 4 6 4 6 4	304 3
2	353 245 10091 222 10711 979 12899 204 11679 979 15077 271 18199 286 17333 243 20341 138 26759 195 24103 80 31121 292 33871 301 33317 272 36319 291 34031 242 40771 61 64433 56 4623 274 71693 56 4623 274 71693 56 4623 274 71693 56 4623 274 71693 181973 274 71693 159 2503 274 71693 159 2503 274 71693 159 2503 274 71695 151 159 2503 274 23531 159 2503 274 23531 159 2503 274 23531 159 2503 275 2503 159 2503 277 1857 221 21523 277 1857 221 221 221 221 221 221 221 221 221 22	*357 131 14009 226 10567
	45 1 1000	294 07079 248 79889 216 89603 131 14009 202 23663
N N'	<u> </u>	27   0 0 0
	m   m	*3,

Z	48751 13889 13513 41047 41047 41047 41047 1321 1321 1321 1331 1331 1331 1331 133	
N.	20 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	
Z	391 89 62201 212 48751 81 63419 29773609 61 64709 316 69479 316 69479 316 69479 317 52 5037 152 13513 311 34949 161 26479 233 4579 25 641047 215 48611 254 43123 73 63839 244 43261 322 695747 220 95747 220 95747 221 20333 222 173 274 20201 69 32173 274 20333 224 25631 278 23417 273 80929 278 23417 273 80929 271 40551 271 40551	87 62483 312 70139
N.	8 8 9 11 8 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	312
$N \mid N'$	395	
	173   50129   115   2925   391   89   62201   212   4875   244   85247   265   81649   297   73609   244   85247   265   81649   297   73609   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   64709   261   264709   261709	10037
	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	91 3
N Z	*387   173   50129   115   29251   244   85247   265   81649   389   163   13001   321   16987   151   1345   3001   321   16987   151   1345   3001   321   16987   3001   321   16987   3001   301   3001   301	70 32051 91 30937 113 59357 222 47161
×	E14 E120 80 0 48 8 21 0 0 0 0 8 2 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 0 8 8 5 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	70
$N \mid N$	38 391	
Z		20113 25357
N",	2 0 0 0 1 1 1 1 1 2 0 0 2 4 1 1 1 1 2 0 0 0 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	269 169
Z	383   138   28283   322   33703   114   29283   322   33703   114   29283   322   33703   114   29283   322   33703   116   29284   323   3267   106   60427   204   204   2	212 24281 269 20113 241 43037 169 25357
$N \mid N'$	8 11 8 8 11 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1	212
<u>'</u>	385	95
Z	9829 9829	21391 30949
N.,	8 8 9 0 2 1 2 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2	4 4 9 4 8 9 1 9
$Z \mid N''$	379 231 11177 268 9889 38 3 138 28 28 3 3 2 2 3 3 7 0 3 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	216 23747 241 21391 172 24989 89 30949
N N	1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	216
8	381	
Z	233 4 4 2 2 9 7 3 3 2 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	74623
N.,	2 2 2 2 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	277
Z  N"	373   176   98411   234   42979   379   231   11177   268   9829   170   99317   235   64369   115   14549   399   17203   339   67651   111   14747   275   18973   231   87037   266   19949   215   23593   231   87037   24133   252   22943   299   24133   256   231   87037   24133   256   231   87037   24133   256   231   87037   24133   256   24133   256   24133   256   24133   256   24133   256   24133   256   2	115 58049 277 74623 170 99713 213 94723
$N \mid N' \mid$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	115
×	375	

,,2	5361 5361 3951	3933 3933 3933 5971 6161 6161 3113 3359 6721	1689 1689 21111 21111 33017 8279 0319 1543 7143
N.,	241 91009 415 162 26813 112 60607 219 97927 114 30161 359 66361 227 24109 358 66467 291 79861 304 36979	348 06067 251 90073 328 70079 417 175 1298 242 11593 24 124 2291 112 15187 182 2291 112 15187 182 2293 323 17971 94 31181 173 26161 337 3439 328 35317 329 35081 170 53113 245 45599 355 66721	352 67169 223 97987 286 81533 191 99079 194 98621 155 13901 257 22111 117 14939 245 23017 344 17099 151 28279 368 20879 268 20879 268 20879 268 20879 268 20879 268 20879 268 20879 278 28 29 31543 278 26417 244 46093 124 29327 238 47143
V Z	1613 1673 1673	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2333 1 1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
	2 4 7 8 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	342 00005 328 70079 304 18917 182 2333 94 31181 337 34739 247 45598 89 62989	352 67169 286 81533 286 81533 285 10601 117 14939 330 17609 330 17609 330 17609 341 1709 330 17609 341 1709 341 1709 341 1709
N N	1117	44 C C C C C C C C C C C C C C C C C C	28 9 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
	4		
,2	241 9100 219 9792 227 2410 304 3697	9397 9397 9397 10453 13627 17107	1309 1492 1492
N.,	241 219 327 304	2 2 2 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	20 8 3 0 5 1 1 2 2 8 2 4 2 1 1 1 2 2 8 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 2 2
2	3649	01 37409 41 45821 91 49331 71 64439 62 65957 60 84737 55 10949 57 13721 22 17454 32 23319	44361 44567 1051 1051 1151 1151 1151 1153 39833 3463 3463 4403
N'	241 91009 219 97927 157 13649 227 24109 152 27809 304 36979	301 37409 220 48973 241 45821 146 56929 191 49331 283 81343 362 6957 260 84737 157 13721 264 10453 121 14741 158 13627 250 17957 339 17107 250 17957 339 17107	337 3436 1 25 3 3 4 3 4 3 6 1 2 2 3 3 3 3 4 3 6 2 3 3 3 4 3 6 3 6 3 5 3 4 3 4 3 6 3 6 3 6 3 5 3 4 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6 3 6
N.	409   241 91009 219 97927 411 157   3549 227 24109 152 27809 304 35979	4 W W W W W W W W W W W W W W W W W W W	337 34361 298 38431 335 34667 129 538431 335 34667 152 55813 269 41051 78 63697 125 58271 305 74047 125 58271 186 99833 186 99833 178 13093 161 13463 152 14029 232 23993 116 14923 228 24203 286 40609
	<b>+</b>	22207 9811 17989 19507 33933 53089 53199 8467	
,Z	148 148 165 165 165 165 165 165 165 165 165 165	188 9811 115 17989 189 19507 182 50119 166 53089 128 57529 128 57529 198 63199	8 8 9 1 1 2 2 5 5 1 1 2 3 6 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
N"	2 2 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
Z	9405 239 45377 223 24181 167 52721 308 36787 91 62417 224 48163 73 64019 293 76543	328 09371 303 82307 407 239 11411 288 9811 235 11699 315 17989 171 12953 289 19507 322 17483 336 33937 151 55487 182 50119 145 56843 166 53089 73 64067 128 57529 86 63199	409 121 14669 288 9907 264 20663 33 17239 178 254 21617 289 19699 178 25453 231 23689 120 29431 71 26083 110 30341 107 30637 315 36341 228 48109 161 5337 170 52237 65 64619 124 58237 61 64919 124 58237 298 75743 297 75793
$N \mid N' \mid$	167 167 91 73	123 123 123 121 145 173 173 173 173 173 173 173 173 173 173	121 264 128 120 110 110 110 161 161 161 161 161 161 16
N	405		1 0
,Z	9931	170 25679 317 17509 152 27527 231 23473 144 28349 225 23869 235 48847 153 27361 215 48947 238 45127 216 2213 320 68 111 225 10589 284 9883 225 10589 284 10669	135 1353 1254 1250 1114 114 115 115 115 115 115 115 115 11
N''	282	2317 22224 3822224 103322224	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
,Z	399 338 67061 286 77801 401 314 17783 282 9931 220 24251 246 11047	170 25679 317 17509 152 27527 231 23473 144 28349 225 23869 84 31543 177 25147 235 45824 157 25147 215 48947 238 45127 91 62213 330 68111 324 69497 403 255 10589 284 9883	133   1373   1394   1395   1394   1395   1
1 1	338 67061 286 77801 314 17783 220 24251	170 25679 152 27527 144 28349 235 48647 215 48947 215 48947 310 68111 324 6949 325 10937	888 8978 888 8078 888 8078 888 808 898 888 808 898 888 808
$N \mid N \mid$	401 314 17783 401 314 17783 220 24251	103 B B B B B B B B B B B B B B B B B B B	о н н н н н н н н н н н н н н н н н н н
Z	* 17		
l ii		9803 246 10867 10973 146 13963 13709 287 19183 18617 235 22621 10081 173 2541 11017 93 3087 11018 83 31657 11019 324 34351 11019 324 34351	27440543 12657427 23391393 23391393 143 28387 107 30403 71 32089 124 57697
N''	<b>88 ± 8</b>	2 4 4 4 8 8 7 9 8 4 4 8 8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Z	395 258 82013 252 83903 234 90371 184 98573	281 9803 246 10867 251 10613 242 11173 245 10973 146 13963 151 13709 287 19183 252 20681 173 25411 252 20107 93 30871 24 23741 83 31657 24 42989 326 34183 167 51719 324 34351	254 83459 274 40543 244 88079 126 57427 246 88079 126 57427 23 91393 23 22643 107 30403 220 24137 71 32089 337 33563 124 57697 185 49367 139 57269 340 66683
$N \mid N'$	252 252 234 184	90 90 90 90 90 90 90 90 90 90	22 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
>	\$362	397	366

	00010000000	1201101	<b></b>
,Z	273 21559 81319573 312 38971 312 38971 170 54033 114 61363 84 6358 329 94399	1098/ 3018/ 3018/ 4059/ 4848/ 4848/	9901 10891 12967 24979
N".	273 167 181 3 12 2 2 2 8 0 1 1 7 0 1 1 7 0 1 1 7 0 2 2 9 0 2 2 9 0 2 1 0 0 3 0 0 0 2 1 0 0 0	272 1173 121 284 2484	312 274 186 199 193
".N Z	100 31091 273 21559 315 38873 167 37459 228 41117 81 31957 237 48869 312 38971 181 52727 280 41959 131 58391 204 49333 127 59333 170 54013 99 62351 114 61363 372 67043 84 63589 372 67043 249 94399	441 167 13781 272 10987 310 19889 173 26713 26713 26713 164 2727 121 30181 154 2727 121 30181 159 49823 242 48481 137 57713 374 66977 370 67511 302 81647 286 82307	443 173 13397 318 9901 342 18077 274 10891 314 19571 186 12967 256 23357 199 24979 182 26393 193 25423
*	3315 315 312 372 372	167 167 167 167 167 167 167 167 167 167	24 1 2 3 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
N N	4.39	14	4443
,Z	56569 56893 63073 64663 67531 16981 59617 62851	11059 118601 118601 118601 118979 138791 145343 15843 16863	18061 20143 20269
N	156 154 92 92 93 353 359 122 122 122 122 122 122 122 122 122 12	3 3 3 3 4 7 5 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	305
2	433 237 48593 156 56569 127 58913 154 56893 318 74687 91 63073 296 81677 68 64663 262 90053 363 07531 256 90617 253 92143 435 278 20921 359 16981 154 28517 122 59617 353 34583 94 62851 91 63299 323 7771	129 14090 208 11050 320 18713 256 11467 162 27467 321 18161 130 29243 317 18979 116 30491 315 19267 343 35339 314 38791 305 39983 302 40471 125 5513 132 58321 83 63629 303 80863	65 64937 274 85991 439 268 22283 339 18061 134 29009 305 20143 116 30557 303 20269
N N'	237 127 127 238 2296 250 250 250 278 154 353	8 3 3 4 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	65 274 268 134 116
×	435		439
ι.Ζ	425 164 27107 268 10651 442 280 82037 128 58393 433 237 48593 156 56569 4390 100 31091 273 21559 293 40583 264 43201 431 303 9941 311 19213 318 74687 92 63073 285 41117 81 31057 24099 293 40583 264 43201 431 303 9941 311 19213 3296 81677 68 64663 237 48869 312 38971 21453 312 1904937 76 64123 312 19079 267 21751 2161 55103 100 25169 340 35089 100 31091 275 312 38971 100 25169 340 35089 100 21 310 310 310 310 310 310 310 310 310 31	11443 11701 14683 18013	34729 38593 40693 49711 50053
N.,	128 379 271 271 155 340 100 100 139	22 23 33 33 33 53	350 312 298 196
$Z \mid N'' \mid$	429 280 82037 128 58393 266 86783 379 65899 431 303 9941 311 19213 312 19379 257 121433 312 19379 257 1275 268 21563 243 23761 252 23021 155 28297 190 25169 340 35089 188 25391 300 40177 156 28 81 100 61927 341 34661 339 70639	433 265 11117 254 11443 122 295 135 135 14683 128 148 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18 18	365 33641 350 34729 355 33641 350 34729 351 34631 298 40693 297 40763 196 49711 299 41411 194 50053
$N \mid N \mid$	2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	365 357 351 297 279
N	431		
1.2	425 164 27107 268 10651 156 28001 312 37363 293 4558 264 43201 251 4597 76 54123 191 49937 76 64123 173 53129 66 64747 161 55103 149 57203 122 99581 192 99581	158 27791 307 159 37 179 38 37 18 307 153 37 18 38 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37 37	353 34061 155 28219 353 34061 155 28219 381 31647 304 31159 175 53087 232 48817 125 59141 188 50671
N''	268 312 264 166 76 66	251 153 153 153 153 153 153 153 153 153 1	155 155 304 232 188
$Z \mid N'' \mid$	16427107 1562801 29340583 25145317 19149937 17353129 16155103 14957203 14957203 14957203 14957203	27797 27797 3130647 35897 35897 35897 35897 35897 3587 3587 3587 3587 3587 3687	353 34061 155 28219 353 34061 155 28219 381 51647 304 39163 175 53087 232 48817 125 59141 188 50671
$N \mid N' \mid$	40 10 10 10 11 10 11 10 10 10 10 10 10 10	1158 1159 1159 1159 1159 1159 1159	353 329 181 175 125
N	425		n F
,.Z	47599 49003 59167 74209 17491 17851	231 2430 231 24447 75 32077 75 32077 166 5329 270 7885 270 7885 270 7885 270 7885 270 7885 270 7885 271 2416 271 2416 271 2416 271 2416 271 2416 271 2416 271 2416 271 2416	230 48661 166 53407 160 55171 365 66457 361 66601 299 78721
N".	23.3 33.3 32.3 33.3 33.3 32.3 32.3 32.3	177 177 177 193 193 193 193 194 195 195 195 195 195 195 195 195 195 195	230 166 160 365 299
N   Z	419 341 34499 236 47599 185 43649 224 49003 185 50273 122 59167 123 58889 309 74209 99 61667 87 63389 79 63719 79 63719 232 9581 7491 244 23773 333 17491 178 2573 333 178217	1353 5350 9 29 499 499 499 499 499 499 499 499 49	289 40853 230 48661 263 43133 166 53407 251 45137 160 55171 374 65867 365 66457 361 66601 299 78721
$N \mid N' \mid$	1 1 2 3 3 1 1 1 2 3 3 1 1 1 2 3 3 1 1 1 2 3 3 1 1 1 2 4 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	289 263 374
N	419	423	
	<del></del>		

2	'.N.	.2	×	N   N'	Z	ķ	,2	N N	<u>                                   </u>	Z	N''	,2	2	ż	N Z	N., .	,2	×	× .	2	Ŋ	,2
	374	*443 134 29147 129 29581 447 271 44987 340 36781 451 370 68483 379 67447 457 140 28949 351 34919 374 33577 245 48527 160 56821 258 25331 364 34171 364 68227 377 67231 268 88001 208 88001 208 339 39971 161 58231 350 15050	447	271 245 364	271 44987 340 36781 245 48527 160 56821 364 68927 377 67231 292 82007 307 81421	340 3 160 5 377 6	6781 6821 7231	451	370 350 78 88 106	370 68483 350 71699 278 88001 206 99233	379 6.	*	157	2 1 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	140 28949 321 39839 319 39971 203 41597		•	6	203	461 249 48857 298 41227 203 50417 260 47491 181 53381 134 59233 163 57077 124 60679	200 200 400 400 400 400 400 400 400 400	7491 9233 9679
	2 1 1 3 2 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4	157 56993 324 37567 137 57809 172 53791 119 66737 130 58897 352 69677 122 66223 318 77699 243 97021 258 92177 241 97303		2 2 2 2 2 2 2 3 2 3 2 3 3 3 4 4 5 3 3 3 4 5 3 3 3 3 3 3 3 3 3	290 823 c 1 266 90149 250 95873 449 324 19211 284 10597 282 2267 3 c 1 17877	369 1	0597	453	187 1 107 6 7 1 6 37 0 6	453 187 13163 326 38671 268 22637 134 58687 107 61673 104 61981 71 64679 329 75787 370 68633 277 89083	326 3 134 5 104 6 329 7 277 8	8671 8687 1981 5787	4	8 8 6 7 9 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	205 50033 129 59447 107 61757 386 67 121 358 7 1039				8 4 5 8 5 7 8 4 7 8 4 7 8 8 7 8 9 7 8 9 7 8 9 7 8 9 9 9 9 9 9	145 57527 82 64 189 85 63929 301 82021 406 65963 372 69539 274 90191	30 1 2	2021
	252 94229 208 98459 206 98627			254 248 196	254 23669 325 19087 248 24107 285 21019 196 25367 203 24877	285 I	1019	455	642	455 364 23201 282 10861	282	3861	6.93	114	459 332 19139 331 19249	3311	9249	463	179	463 287 10853 194 13003 179 13523 176 13723 171 13931 128 15013	461	3003 3723 5013
	7 341 1 169 1 169 3 348 7 246 7 246 3 168	445 123 15017 341 18253 132 29303 259 23059 287 41351 169 27487 249 47003 348 35517 97 62687 246 48187 83 63773 168 55249 338 73513 84 63709		176 172 379 263 191 356	176 26729 308 40759 172 27197 70 64717 379 33587 329 74761 263 45887 241 97849 191 51239 315 69767	308 4 70 6 329 7 24 1 9	0759 4717 4761 7849	744070744	0.88 80 4 00 00 11 0.88 00 00 4 4 0 7 8 8	291 41759 188 13147 283 43103 349 18229 388 66629 279 22129 346 73583 191 25951 296 82163 81 32083 292 83009 198 50929	188 13147 279 22129 279 22129 191 25951 81 32083 172 55201	7 4 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	4.7.4	5615	211 49463 271 22669 175 54779 253 24151 161 57191 179 26833 356 71741 127 30013 160 5729 160 5729	271 2269 253 24151 179 26833 127 30013 298 41113 160 57259 337 74719	271 22669 253 24151 179 26833 127 30013 298 41113 160 57259		23 25 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20	260 23831 261 23773 130 29789 203 25321 359 35879 127 30187 325 39887 366 35023 319 40637 294 42013 163 57107 190 52861	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3773 5321 5023 2013 2013 2861
ا منحمد السا	1 351 3 251 7 1 39 7 1 39 7 1 35	262 91121 351 77297 262 91121 351 77797 314 19913 251 25833 260 23087 139 28837 98 31277 125 29833		324 186 367 355 349 163	#451 324 19403 333 18517 20537 205059 2061	333 1 277 2 189 2 177 2 105 3 84 6	8517 2039 5999 6701 1887 3793	457	1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	265 11621 323 19687 169 13907 278 44809 268 22907 106 61933 162 28493 395 66403	209 90619 209 98947 323 19687 278 44809 252 48271 106 61933 395 66403		64 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10	886 2 2 2 2 2 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	356 18059 363 17623 286 21647 321 20071 282 22259 283 22063 180 26801 189 26449 136 29411 179 26893 3108 30869 127 30097 357 35963 352 36643	363 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3		165	22.8	378 68669 138 58477 258 96233 106 62047 256 96353 381 68113 255 96703 255 96703 255 96703 106 31079 344 36973	25 2 3 3 3 4 4 4 4 4 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4	138 58417 106 68113 381 68113 255 96703 128 15061 392 33637 344 36973

,,2	627 737 637 637 733	191 5097 721 721 911	031 051 221 081 143 129
l li	223 98737 223 98737 325 18637 283 22921 370 36541 262 48733	98 66 6 1 1 3	12 2 2 2 4 4 8 8
N"	277 93949 277 93949 223 98737 355 18637 283 22921 370 36541 262 48733	011 88 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	309 299 145 111 316 264 148
R. 1	189 153 741	11 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	177 183 171 171 137 137 147
7	11444	8 6 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 4 0 4 4 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
×	481 277 93949 277 93949 223 98737 483 313 41189 355 18637 311 44453 283 22921 271 47741 370 36541 276 54647 318 468733	143 58631 110 62191 101 63311 272 23879 299 21997 206 25643 279 23509 148 29021 204 51721 409 33623 126 61357 401 33893 86 64231 359 568471 23 98911	376 71777 274 94727 338 20183 309 21031 202 26171 299 22051 176 28211 145 29221 136 29873 111 31081 134 30137 316 41143 283 46271 264 48757 223 49547 148 58129
$N \mid N'$		8 8 2	354 18587 339 19759  367 36677 217 24919 4487 338 20183 309 2203 277 55817 21 25309  177 55817 211 25309  177 55817 211 25309  176 28211 145 2922 258 9787 1406 33589  184 36959 105 31321  185 29871 406 33589  184 34571 264 4875 323 49547 148 5812
	3 69 3 7 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1	777	8 2 2 3 9 9 1 9 9 1 9 9 1 9 9 1 9 9 1 9 9 1 9 9 1 9 9 9 1 9 9 9 1 9
,2	479 334 20021 333 20107 481 294 22073 303 21187 292 22343 291 22453 276 23459 269 23827 188 26699 203 25693 186 26891 201 25969 132 30089 145 20131 112 30893 444 33613	377 35279 344 38833 371 35951 280 46051 345 38651 262 48619 199 52253 202 51679 181 55295 198 52543 135 59471 172 56701 83 64403 168 57193 284 90353 148 57829 282 91127 375 71161	477 214 25013 335 19927 *481 354 18587 339 19759 176 27803 131 30169 104 31337 392 34159 170 5383 34537 406 66749 388 34537 326 81689 268 47629 226 86531 182 54721 224 9845 323 88129 224 9845 328 89989
".N Z	333 303 201 203 203 201 145 404	344 202 202 202 202 117 203 203 203 203 203 203 203 203 203 203	339 269 217 211 105 105 352 304
2	021 073 343 343 699 699 891 893	279 951 651 653 253 253 253 253 253 253 253 253	80007 8007 8001 8001 871
II f.	0 0 0 0 0 0 0 0 0	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	9 6 8 8 9 8
N N	334 294 297 188 132 132	377 377 377 377 377 377 377 377 377 377	354 1367 367 177 173 258
N	479		481
	70H 8H 80	000000000000000000000000000000000000000	*
,2	473 342 76673 216 49627 278 91151 180 54799 274 93179 124 61231 409 66373 359 73651 267 376 77677 201 22150	364 18251 269 23629 206 25523 107 31189 196 26339 392 33967 184 26993 308 41161 401 33581 288 44983 337 39047 276 46273 217 49613 411 66343 167 57143 273 94111 127 60917 261 96799 103 62753	214 25013 335 19927 196 26387 175 28027 176 27893 131 30169 104 31337 392 34159 406 66749 388 34537 326 81689 268 47629 296 86531 182 54721 224 98453 293 88129
N.,	216 180 124 409 309 309 267	269 392 392 392 276 276 273	333 131 131 131 130 130 130 130 130 130
.2	51 79	151 123 139 147 143 177 177 179	10 8 8 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
D II	931	364 18251 206 25233 196 26339 184 26933 401 33581 337 39047 217 49613 127 60917 103 62753	98 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
×	34 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	364 18251 206 25523 196 26339 184 26993 401 33581 217 49613 167 57143 107 69143 103 62753	2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
N N	173		122
	<u> </u>		
,.2	107 31069 332 39199 324 40483 284 45013 146 57649 136 59281 122 61339	279 90163 277 90631 255 97324 263 24019 344 37663 344 37663 110 61819 110 63097	095 3095 779 820 825 055 061 878
 	0 8 4 8 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	25 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	1007 F 20 8 4 6 1 1 1 4 4 8 8 8 4 4 4
	9 C C G	10010777 10010777	974769
Z $ N'' $	5579 5163 5386 5713	279 90163 277 90631 25 97327 70 28229 263 24019 25 40559 40 33427 99 51521 344 37653 89 6368 266 8847 71 64877 110 61819 10 66137 100 63097 32 78977 211 98473	1361 1261 1791 1580 1952 1953
	173 55799 107 31069 111 61637 332 39199 87 63863 324 40483 396 67139 284 45013 146 57649 126 67339 126 63339	279 90163 277 90631 277 90631 178 27611 299 21013 170 28229 263 24019 199 5405 344 37663 89 63689 260 48247 71 64877 110 61819 410 66137 100 63097 332 78977 221 98473	181   13619   292   10957 280 22619   196   13099 174 27917   175 27793 369   35801   171 28201 257   48677   125   30553 217   49523   370   35593 113 61547   324 40813 107 62303   256   48781
$N \mid N'$	*465 203 42689 214 49429 *469 173 55799 107 31069 *473 342 76673 216 49627 263 46601 209 99871 121 61637 332 39199 263 47351 121 61637 324 40483 278 91151 180 54799 263 47351 278 64667 394 67049 302 82193 302 82193 303 82193 304 8216437 305 8216437 305 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437 307 8216437	471 178 27611 299 163 177 90631 178 27611 299 21013 170 28229 263 24019 139 54055 400 33427 199 6369 260 48247 71 64877 110 61819 410 66137 100 63097 332 78977 221 98473	*473 181 13619 292 10957 280 22619 196 13099 174 27917 175 27793 369 35801 171 28201 257 48677 125 30553 217 49523 370 35593 145 57881 328 40423 113 61547 324 40813 107 62303 256 48781
	<b>O</b> H		
,Z	987	9547 112979 12979 27529 34513 35899 3987 39841 40387 53149	7337 7337 900 900 900 900 900 900 900 900
1)	293 42689 214 49429 269 46601 209 99871 263 47351 121 61331 73 64667 302 82193 256 96737	271 11597 338 9547 198 25673 274 11437 211 49787 196 12979 169 56369 177 27529 143 57917 380 34513 143 5935 332 38953 392 67481 328 39841 190 53149	\$2 04279 \$2 04279 \$393 67339 \$345,73999 \$41,75391 \$469 184 26711 338 9643 \$333,39023 285,22441 289 44021 263 23887
"Z   N"	8 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	8 1 2 3 3 3 1 1 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	1 1 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2	293 42689 269 46601 263 47351 121 61331 73 64667 394 67049 302 82193 256 96737	467 271 11597 338 198 25673 274 211 49787 196 169 56369 177 143 57917 380 135 5935 1 362 404 66359 338 392 67481 328 190	267 372 390 440
×	200 200 121 121 304 304 304	271 198 211 169 143 135 392	184 345 2333
$N \mid N$		467	69\$
	•		

N N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N   N   Z   N   N   Z   N   Z'   Z'		5.00 mm c 2.00 m 2.00		N
N         Z         N'         Z'           79         64661         152         58309         \$509         415         34403           270         97847         142         59443         225         46559           28         99347         409         69109         225         46559           313         10859         212         112973         225         50231           313         10859         212         12973         225         50231           298         2269         112973         28843         225         50231           298         2269         1193         27271         228843         228843           286         23321         157         28843         28843         28843           286         23529         141         29881         18843         28843           286         23529         147         29887         28843         28843         28843           297         48197         373         74017         511         394         1873           214         25933         166         333         40487         235         40487           214	,2	22807 2605: 26407 31333 37303 37303 37303 4594 4807: 49453	23901 24323 24495 4495 48859	55321 55321 5547; 63397 64693 64693 373373
79 64661 152 58309 \$509 220 97847 142 59443 228 99347 409 69109 2313 10859 247 409 69109 2313 10859 213 12391 2312 21881 197 26821 232 22529 1193 27271 232 23321 157 28843 286 23691 193 37271 222 23229 141 29881 287 36497 373 74017 511 237 6443 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 237 48993 238 258 2691 238 258 2693 238 258 2691 238 258 2693 238 268 238 258 2001 238 238 238 2583 238	N.	9 4 9 4 8 4 4 9 9 4 9 9 4 9 9 4 9 9 9 9	391 391 317 317 310 310	11 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
79 64661 152 58309 \$509 240 97847 142 59443 228 99347 409 69109 313 10859 247 409 69109 313 128 1891 197 26831 298 22691 193 37271 292 23321 157 28843 286 23691 193 37271 292 23321 157 28843 286 23691 193 37271 292 23321 157 28843 286 23691 193 373 74017 213 76497 373 74017 214 25799 367 19081 214 35799 367 19081 215 57977 350 40519 216 357977 350 40519 217 6643 218 57977 350 40519 218 57977 350 40519 218 57977 350 40519 218 57977 350 40519 218 57977 350 40519 22 232399 351 19543 238 70667 307 3099 352 20917	Z	34403 37853 46559 50231	18131 18743 40289 40487	44351 46817 50423 56807 70019 97301 99089 23159 30509
79 64661 152 58309 ** 279 64661 152 58309 ** 240 97847 142 59443 228 99347 409 69109 313 10859 212 12973 312 21881 197 26831 298 2259 112 12973 286 23521 157 28843 286 23522 141 29881 282 25229 141 29881 282 25229 141 29881 282 25229 141 29881 282 25229 141 29881 284 36497 377 44953 374 42953 374 42953 374 42953 375 6443 377 42953 378 66433 388 664283 106 63313 398 70667 307 90031 398 70667 307 90031 368 18853 355 20011 296 23099 325 20011	N'	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	394 374 355	22 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
N N   Z   N'   Z'   N N   Z   N'   Z'   N N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N'   Z	×	605	511	513
N   N   E   N'   E'   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   N'   E   E   E   E   E   E   E   E   E	,2	58309 69109 73483 736831 12973 12973 227271 28843	29881 37861 55351 74017	19081 35083 40519 63313 90031 19543 20011
N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N   N'   Z   N'   Z'   N   N   Z   N   N   Z   N   N   Z   N   N	N.	152 164 164 363 363 363 167 1167 1167 1167	141 368 188 373	367 350 307 307 325 325 325
N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   N   Z   N'   Z'   N   N   N   Z   N'   Z'   N   N   N   Z   N'   Z'   N   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N   Z   Z   Z   Z   Z   Z		97847 99347 99347 10859 21881 23321	85299 85299 85299 85299 85399 85	25799 30071 57977 64283 70667 72161 19379 19853
N   N   Z   N'   Z'   N   N   Z   N'   Z'   N   N'   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   N   N   Z'   Z'	Ż		154 154 387 317 239 137	114 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
S	×	503		507
87   15   15   15   15   15   15   15   1	,Z	30259 30259 30583 40429 50011 77863	24229 37021 40507 41863 52747 56949	43344A44B
87   15   15   15   15   15   15   15   1	ķ	2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	275 370 346 320 206 206 425 425	1 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
87   15   15   15   15   15   15   15   1		2000 2000 2000 2000 2000 2000 2000 200	24923 45557 48179 61283 85121 98123	10067 26861 26861 337097 45329 45329 53423 53423
87   15   15   15   15   15   15   15   1	N.	25 4 1 1 2 2 3 3 3 3 4 1 2 3 3 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	226 295 295 277 277 131 316 266	317 196 37 37 33 38 105 105
87   15   15   15   15   15   15   15   1	N	909	501	503
87   15   15   15   15   15   15   15   1	1 1	35911 39901 39901 47149 86077 89119 26437 27109 63823	20173 25867 35353 46993 53629 57559 86269	17737 20899 27763
	N.	8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	34 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 3 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
87   57   77   77   77   77   77   77	l il	58403 59273 60953 79997 79997 22307 27701 66377 71633	26183 26423 28979 30323 36713 38993	48779 51131 53777 59663 60167 91199 13613 31541
87   57   73   73   73   73   73   73   7	N	144 130 144 144 148 148 148 148 148 148 148 148	206 204 152 134 379 379 349	193 193 193 193 191 191 106
87   5   87   87   87   87   87   87	>	493	497	*499
87   57   77   77   77   77   77   77	,2	82129 90001 90271 28081 47857 47857 60397 61603 67129	23173 29383 35983 36559 41761 52249	64081 71707 90067 98101 11083 19597 21277 30307
187   15   15   15   15   15   15   15   1	N',	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	285 145 380 376 314 204 142	3 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
87 151 135 135 135 135 135 135 135 144 144 135 151 163 163 163 163 163 163 163 163 163 16	Z	57737 69389 78839 37049 37049 37907 41177 47237 57059	25703 28499 35423 42767 56543 63671	13997 13997 13997 13997 139779 139779 14963
8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	Ŋ	151 135 394 344 1112 361 355 317 173 173	174 174 385 309 177 93	230 230 375 290
4	×	489	491	493

		100 - 00	100 - 50 - 0	1
12		94449	8 8 1 2 8 3 2 5 2 5 2 5 2 5 2 5 2 5 2 5 2 5 2 5 2	15 174 1433 1433
		8 4 7 8 9	8 4 4 7 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	4 4 4 W B H
N".		223 52127 452 33493 191 56783 392 37243 81 64811 342 41521 448 67427 226 51343 430 69557 245 98929 374 79811 372 79967	316 90359 342 20903 408 36709 222 26153 336 42937 116 31379 328 44281 339 44290 411 72727 337 42737 333 86113 424 69821 287 97861 414 71999 241 99823	384,77711 376,79613 286,98009 332,21821,329,22153 142,30539,301,23911 305,48413,412,35434 191,56891,346,41413
.2	141 151 173	83 11 11 11 12 15 17 11 11 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15	00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00	11 13 13 147 13 91
2	783 815 820 962	5521 6674 799 890 890	900 900 901 900 901 901 901	7777 796 986 986 471 471 484 568
٠,٠	376 78341 364 81551 346 82073 296 96221	223 52127 191 56783 81 64811 448 67427 43 69557 374 79811 372 79967 326 89057	316 90359 342 20903 322 26153 116 31379 339 42209 337 42737 424 69821	384 77711 376 79613 286 98009 332 21821 142 30539 305 47147 295 48413
$N \mid N' \mid$	E	533 223 52127 452 3349 191 56783 392 3724, 81 64811 342 4152 448 67427 226 5134, 430 69557 245 9892 374 79811 372 79967	316 90359 535 342 20903 408 36709 222 26153 336 44937 116 31379 328 844281 339 42209 411 72727 424 69821 287 97861 44 71999 241 99823	384,77711 376,79613 286198003 142,30539,301,23911 305,47147,227,25741 295,48413,412,354,331 191,56891,346,41413
	<b>*</b>			
,,2	22 283 141 641	581 880 880 880 880 890 990	304 47059 224 51439 188 56911 186 57139 114 62929 361 81769 329 86209	719 713 907 907 049
	9 2 2 8	7 H 9 8 8 8 8 9 8 9 8 9 8 9 8 9 8 9 8 9 8	7 4 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	4 4 6 7 7 7 8 4 8 7
$Z \mid N''$	407 72223 363 81283 343 82141 245 98641	417 333 333 418 408 333 333 333	4 4 8 8 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	340 41719 340 47713 398 47713 98 63907 391 74257 377 78049
	29	98 98 98 98 98 98 98 98 98 98 98 98 98 9	177	93 97 91 91 53
7	687 979	353 445 445 553 553 667	737	197 269 313 434 505 505
$N \mid N'$	430 68729 407 72223 282 97967 363 81283 343 82141 245 98641	529 449 33461 417 17581 413 35759 387 18757 409 36683 339 20809 321 44039 157 29287 313 45263 418 35053 205 53951 408 36229 197 55337 332 42967 450 66791 308 46099	292 96497 224 51439 292 96497 224 51439 188 56911 186 57139 114 62929 36209 329 86209	374 19793 340 41719 206 26927 298 47713 116 31307 98 63907 329 43487,391 74257 233 50591 377 78049 217 53003
 د	7.0	0		H 60
	\$3	L		\$
,.Z	531 577 041 731	48 8 0 0 4 0 4 0 8 4 0 8 6 0 8 7 1 0 8 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 8 0 8	159 169 169 737 521 889 189 373	609 887 539 139 697 697 693
	9 1 9 9	8 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	93 1 6 6 7 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$Z' \mid N''$	523 334 20939 371 19531 *527 430 68729 407 72223 *531 376 78341 320 22247 325 21577 282:97967 363 81283 364 81551 202 27077 219 26041 346 82073 245 98641 296 96221	361 40529 410 35449 115 62501 408 35803 452 66413 384 37357 426 68879 292 48049 398 73529 120 61987 364 80369 441 67261 433 67699	525 401 36629 296 47521 525 401 36629 296 47521 341 82189 311 90373	185 56551 138 61051 *527 382 19013 373 19609 155 58481427 68581 326 12773 215 26539 37 63803 411 70177 312 22613 145 30139 318 89153 339 82153 321 42929 402 36697 329 4387 329 43487 391 778649 328 96577 285 97231 327 4327 1328 43063 329 43487 391 778049 329 377 78049 329 377 78049
,	53	60 60 60 60	200	79 71 79 79 79 79 79 79 79 79 79 79 79 79 79
	209 222 270 342	24000 24000 24000 24000 24000	366	1 1 2 4 4 6 6 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1
$N \mid N' \mid$	4000	1 2 2 2 3 4 9 4 9 4 9 4 9 4 9 9 8 4 9 9 9 9 9 9 9	91	8 8 8 H E 8 4 8 8 8 8 H E 8 4 8 H E 8 4 8 H E 8 4 8 H E 8 4 8 H E
- ;	E E E E E	<u> </u>		7 B B B B B H H
	'n			* ·
,,2	169	113 737 141 131 361 703	380   18899   381   18787 324   21557   159   29017 320   22037   141   30253 399   3655   424   34501 383   37253   402   36217 309   45017   188   56479 231   48017   188   5479	051 051 177 317 153 153
<b>1</b> ) 1)	27	376 38113 3241737 30246141 3250131 12051361 9863703	8 9 9 4 9 9 7 7 7 7 9 7 7 7 9 7 7 7 7 7 7	92770
$Z' \mid X'' \mid$	193	93333 689888 689888	381 159 141 141 140 140 188 162	85 56951 I 38 61051 55 58481 427 68581 97 63803 411 70177 38 67409 375 77317 18 89153 339 82153 82 97553 36 99377
	149	57 71 71 77 77 59	557 557 551 551 551 551 551 551 551 551	53
	898 370	736 736 736 736 849 9900	188 222 33 34 37 24 80 80	5569 5584 5584 6538 6538 653 693 693 693
N.	93 64037 314 89849 383 37061	323 43057 376 38113 217 52163 332 41737 211 53171 302 46141 398 72953 232 50131 394 73637 220 51361 328 84977 98 63703 314 90059 92 64237	380   18899   381   18787   324   21557   159   29017   320   22037   141   30253   399   36551   424   34501   383   37253   402   36217   309   45161   230   50287   291   48017   188   56479   224   48017   188   56479   224   48017   288   56479   224   48017   288   56479   224   225   22	185 56951 138 61051 155 58481 427 68581 97 63803 411 70177 438 67409 375 77317 318 89153 339 82153 288 96377 285 97231 282 97553
$N \mid N' \mid$	513 157 57923 184 56737 *517 93 64037 155 58313 311 89977 314 89849 515 406 17573 197 27259 519 383 37061 193 27691	** ** ** ** ** ** ** ** **	521 380 18899 381 18787 324,21557 159 29017 320,22037 141 30253 399 36551 424 34501 383 37253 402 30217 309 45161 230 50287 234 4808 43 162 6479	70000
ļ	\$ S			N M M H H H N A
,Z	573; 997; 7259	8 4 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	847	395 395 395 397 397 445
	1 8 2 7 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	4 8 9 9 9 9	30 1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	# # 0 8 7 8 4 5 8 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
N'	31	0 0 0 H H 0 0	37. 191	4 6 8 4 4 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
$Z' \mid N''$	157 57923 184 56737 155 58313 311 89977 406 17573 197 27259	324 21401 302 45817 318 21893 202 545817 304 22679 134 61333 144 29837 116 62383 379 37181 433 67399 313 44867 297 93703 301 46061 111 62927	418 69149 402 71549 298 80447 292 94433 378 18803 373 19219 378 202 2047 191 27847 202 26577 137 30517	190 27953 424 34267 425 34127 334 41263 399 36191 228 50311 371 38867 216 52201 301 46103 108 63331 183 57041 439 66877
	57 17 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20	324 21401 324 21401 304 22679 144 29837 379 37181 313 44867 301 46061	418 69149 402 71549 358 80447 292 94433 378 18803 298 23447 202 26777	7 4 4 0 8 0 7 2
ķ	157	3379 344 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	418 69149 402 71549 358 80447 292 94433 378 18803 298 23447 202 26777	190 4425 4419 399 301 1183
$N \mid N' \mid$	513 157 57923 184 56737 155 58313 311 89977 515 406 17573 197 27259		418 69149 402 71549 328 80447 292 94433 293 294433 298 23447 191 27847 200 22677 137 39517	
	* 10		, ż	•

- 11			1000
ıZ		169 29101 306 48409 250 49999 429 72679 429 72679 421 72113 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 357 83203 365 29401 165 29401 165 29401 165 29401 165 29401 165 29401	2116 4425 5022 5475
N".		164 4 113 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	355 344 248 214
Z	352 84221 298 97829	557 388 20051 169 29101 324 23081 400 38839 239 26309 350 49999 437 35363 429 72679 442 69737 425 73351 256 98939 413 73819 411 74143 359 422 1937 128 31019 165 29401 317 47207 306 48589 456 66701 204 56299 476 66701 204 56299 466 66701 204 56299 466 82883 164 58999 340 89633 124 58653	346 21977 355 21169 206 27983 344 44257 455 34613 248 50227 389 40427 214 54751
$N \mid N'$	352 298	8 2 2 2 3 3 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	346 206 455 389
N	555	559	*561
,Z	395 77377 *555 352 84221 347 84961	551 431 35597 311 23719 343 43049 224 53173 337 44531 214 53773 149 60539 453 68227 149 60539 453 68227 142 60539 453 68227 142 60539 453 68227 142 94529 142 94529 143 6229 428 145 6223 477 69457 145 61223 439 69709 125 6223 447 69457 145 61223 439 69709 125 6223 447 63153 388 79823 359 82237 364 75269 429 77719 388 79823 359 82237 365 96517	326 22811 428 36241 319 47051 356 41539 *561 346 21977 355 21169 452 68897 304 48571 422 7389 232 52177 398 77783 357 98779 389 40427 214 54751
N'	395 347	14466 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	428 356 304 232 257
Z		551 431 35597 311 a3719 343 43049 a24 53173 337 44531 a14 53773 327 4531 a14 53773 125 60539 453 68227 125 63219 299 97423 376 81773 312 94529 379 40787 a29 26227 349 42509 428 35977 225 53147 a22 56263 209 55217 451 68767 153 60029 447 60457 154 61223 439 69709 125 6223 439 777719 388 79823 359 82237 365 5344 21713 149 30391	326 a2811 428 36241 319 47051 356 41539 452 68897 304 48571 422 73589 a32 52177 398 77783 a57 98779
N'		4431 1149	326 319 452 422 398
N	549	553 **	
,.2	547 335 11093 345 21283 *549 380 20147 241 25189	346 21191 201 27961 320 23003 396 38149 220 26297 384 39877 220 28109 316 46723 449 34211 249 648787 449 34211 249 648787 444 69143 323 15 15 81 417 73459 444 69143 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 81 417 73459 323 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15	1119 31387 424 36109 352 41593 170 57787 104 63667
N'	345	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	119 424 352 170 104
Z	335 11093 345 21283 380 20147 241 25189	346 21191 201 27961 320 23003 396 38149 220 28109 316 46723 449 34211 296 48787 427 35771 240 50593 351 41519 198 56359 307 47711 120 62533 231 51581 417 73459 233 55457 399 75583 163 58427 305 96199 444 69143 442 69491 416 73571 402 74561 308 95219 308 95219 308 95219 308 95219 308 95219 337 44129 239 25453 337 44129 239 25453	227 52511 119 31387 197 56711 424 36109 406 73973 352 41593 170 57787 104 63667
N.	335 380	9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	197 197 406
N	547	*549	
,Z	23767 30109	115 31531 444 434231 3230 44641 1128 63330 1118 62659 331 179231 331 179231 341 157 352 41179 352 41179 353 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837 348 10837	44619 48091 49801 94153
N.	305 149	1115 1115	2 6 4 H
2	.537   125   61871   304   47293 *541 205   55073   305   23767   242   49891   454   67493   149   30109	312 93701 115 31531 444 34231 320 44641 320 44641 320 48337 220 53161 18 62659 38 1 79231 37 81157 37 81157 34 419 3629 35241179 34 419 3629 35241179 34 419 3629 35241179 34 418 6611 328 86111 328 86111 328 10837 347 4189 329 348 8611 348 863 323 338 10837 348 8611 348 863 323 328 338 338 338 338 338 338 338 33	307 47391 340 42019 301 48221 304 48091 239 50627 246 49801 143 61211 313 94153 348 83777
$N \mid N \mid$	205 454	2 4 6 6 4 4 6 6 6 4 6 6 6 4 6 6 6 6 6 6	3 4 4 8 9 8 4 8 9 8 9 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9
N	*541	543	
,Z	304 47293 242 49891	2325157 220055333 10455643 10665333 245063799 107293 212331063 21253353 21253353	19381 20773 21061 21319
N''	304	2 2 4 5 0 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	389 347 343
.Z	61871	232 51157 200 55333 194 56443 194 56443 196 19739 346 41491 241 5023 243 50241 241 5023 243 50441 193 56813 420 71153 420 71153 368 81737 248 83843 366 84331 248 83843 248 83843 248 83843	541 376 20123 389 19381 210 26903 347 20773 441 34481 343 21061 235 50957 341 21319
$N \mid N' \mid$	125	141 0 0 0 2 4 4 4 4 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	376 210 441 235
×	537	539	*541

1	NN 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0
,2	338 46147 326 457737 326 477737 326 59809 417 77713 375 82657 405 20149 405 20149 405 20149 330 64378 330 64378 331 94327 331 94327 331 94327 340 4538 340 4538 340 4538 340 4538 340 4538 340 4538 340 4539 340 4539 340 8553	337 03880
N''	3339 3328 4417 4405	337
,Z	581 409 39671 338 46147 325 47733 304 47737 325 54011 162 59809 173 58439 417 77713 270 98663 375 82657 270 98663 375 82657 221 25087 300 43783 221 5087 300 43783 221 5087 300 43783 221 5087 300 43783 221 5049 42 75999 183 57557 403 80923 133 62141 345 90499 490 67433 339 92413 460 70157 331 94327 420 7749 372 83873 268 98927 268 7249 44519	
$N \mid N' \mid$	2000 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
N	8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	
,Z	4517 65071 4517 65071 4517 65071 4517 65071 4517 7937 4517 7937 4517 7937 4518 793 4518	44293
N''	2004 44 44 44 44 44 44 44 44 44 44 44 44	320
$Z \mid N'' \mid$	577 415 38723 132 62071 317 4847751 71359 313 48731 405 79777 259 49991 259 49991 251 56207 259 49991 358 83921 336 92189 328 94253 312 97649 328 94253 312 97649 328 94253 312 97649 328 9425 312 97649 312 97649 312 97649 312 97649 312 97649 312 97643 370 41851 103 64487 25 6 5021 400 80963 242 52189 310 97931 208 56671 310 97931 208 56673 310 97931 208 56673 310 97931 208 56673 310 97931 208 56673 310 97931 208 56673 310 97931 208 56673	473 34487 356 44293
N N	415 411 411 411 411 411 411 411	473
×	579	
,2	413 413 414 413 414 413 414 413 414 414	5958r
N''	E 11 4 4 6 6 1 4 4 6 6 1 4 6 6 1 6 1 6 1	102
Z	573 160 29879 413 19273 *577 415 38723 132 62071 361 42719 340 45139 155 60527 338 4543 364 83987 314 48541 316 96527 122 63031 316 96527 122 63031 316 96527 122 63031 317 4407 75983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 77983 3407 778899 3407 77893 3407 77893 3407 77893 3407 77893 3407 77893 3407 7789	443 30389 102 5958
$N \mid N'$	160 3361 1555 3364 337 337 347 347 347 347 347 347 347 34	443
N	*573 575	
Ζ	\$\frac{461}{4661} \frac{34667}{448} \frac{3527}{3523} \frac{160}{493} \frac{367}{457} \frac{467}{451} \frac{3697}{3974} \frac{312}{457} \frac{6987}{6987} \frac{32667}{3774} \frac{312}{457} \frac{6987}{6987} \frac{32667}{3774} \frac{312}{414} \frac{336}{336} \frac{4777}{4737} \frac{4777}{451} \frac{336}{457} \frac{6987}{3774} \frac{312}{414} \frac{336}{356} \frac{4777}{4735} \frac{326}{3774} \frac{414}{414} \frac{336}{336} \frac{4777}{337} \frac{427}{457} \frac{6987}{451} \frac{326}{327} \frac{457}{328} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{451} \frac{336}{457} \frac{457}{452} \frac{336}{452} \f	18793
N"	84484444444444444444444444444444444444	2 2
2	569 218 27191 351 21961 401 39521 440 36057 401 39531 440 36057 393 40499 348 44533 337 45197 224 53323 337 45197 224 53323 337 45197 224 5309 247 50993 469 68071 217 54767 467 68449 153 66197 364 83471 364 83471 364 83471 364 83471 365 34457 241 25801 441 36607 209 28087 441 36607 209 38087 441 39887 153 394 27 369 41243 440 36313 347 44879 438 36451 121 6311 174 58099 121 6312 313 97684 122 6313 3857 153 394 87 466 67421 323 94687 446 71429 313 97039 324 94343	7573 200 28307 419 18793
$N \mid N' \mid$	44 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	200
×	571	-573
,Ζ		
N''	166 307 307 107 107 107 107 107 107 107 1	
2	561 233 52259 166 58657  563 408 19037 343 22381  254 24917 247 25303  254 2494 171 29077  253 4994 236 51973  209 55439 20 530179  324 93983 164 59149  324 93983 164 59149  325 21107 219 26959  346 22193 466 33997  407 38659 134 67 6599  407 38659 134 67 6337  407 38659 134 67 6337  407 38659 134 67 6337  407 38659 134 67 699  407 3869 135 8091  258 99257  258 99257  258 99257  221 53699 353 86683  199 57179 263 98713  101 64157 257 99349	310 97259
$N \mid N$	8 44 1 8 9 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	310
>	565	

N N   Z   N'   Z'   N N   Z   N N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N   Z   N N N   Z   N N   Z			
N         N         Z         N'         Z'         S'         S' <th>,,2</th> <td>37537 47581 56197 56197 6639 6899 6927 7326 9936 74408 77743</td> <td>77893 89917 88719 86137 21661 23143 24151 54151 72817</td>	,,2	37537 47581 56197 56197 6639 6899 6927 7326 9936 74408 77743	77893 89917 88719 86137 21661 23143 24151 54151 72817
N         N         Z         N'         Z'         S'         S' <th>N''</th> <td>448 a a a a a a a a a a a a a a a a a a</td> <td>4443 3389 3789 3789 3789 3789 3789 469 469 469</td>	N''	448 a a a a a a a a a a a a a a a a a a	4443 3389 3789 3789 3789 3789 3789 469 469 469
N         N         Z'         N'         Z'         N' <th></th> <td>38303 485293 48029 50723 50741 607241 907241 907673 9083 39989 64109 67187</td> <td>97943 18869 37547 3751 3751 82780 84017 84017 990023</td>		38303 485293 48029 50723 50741 607241 907241 907673 9083 39989 64109 67187	97943 18869 37547 3751 3751 82780 84017 84017 990023
N         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         Z         N         N         Z         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         N         Z         N         N         Z         N         N         Z         N         N         N         Z         N         N         N         Z         N         N         N         N         N         N         N         N         N         N         N         N         N		439 439 439 439 439 439 442 442 442 442 442 442 442 44	0 4 4 4 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	N	609	119
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	,Z	4351 90753 90753 90753 15243 16659 17689 17168 17168 17168	1947 4049 44049 0457 77003 19917 14447 11613 11613
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	.V.	1771 1865 1965 1965 1965 1965 1965 1965 1965 19	86 4 4 8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	7 2	200 8 9 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 2
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	.V.	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	4 6 2 2 1 4 6 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	×	603	607
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	,,2	230103 2433103 2405213 240013 2510013	23.33.93.93.93.93.93.93.93.93.93.93.93.93
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	N".	0 4 6 6 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	24 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	1 1	18797 33553 335573 36683 37139 37139 47303 447303 447303 64301 667313 83933	211221 36017 38177 47777 47777 550321 55030 63197 663197 66347 66347
N         N         Z         N"         Z"           593         364         22067         465         17707           463         35747         434         37480           211         56873         430         3801           163         6229         138         61879           484         68687         483         6881           476         98597         321         97549           268         99551         317         9801           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           411         40493         488         34261           426         9871         123         453           49         52103         244         528           49         541357         509         66643	Ŋ	8 6 6 4 4 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	0 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
593 364 22067 348 22853 463 35745 211 56873 163 60293 484 68687 470 69809 276 99551 269 49757 269 49757 269 49757 276 98711 276 436 8477	N	999	1094
593 364 22067 348 22853 463 35745 211 56873 163 60293 484 68687 470 69809 276 99551 269 49757 269 49757 269 49757 276 98711 276 436 8477	1 1	19867 33489 38011 61879 61879 61879 71941 71941 71941 71941 349611 34961 352879	660169 64153 64333 72739 72739 72739 72664 75967
593 364 22067 348 22853 463 35745 211 56873 163 60293 484 68687 470 69809 276 99551 269 49757 269 49757 269 49757 276 98711 276 436 8477	N'.	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1064 1004 1004 1004 1009 1009 1009 1009
S 93 S 93 S 93 S 93 S 93 S 93 S 93 S 93	11	22067 2357453 357474 556873 66869 69869 69869 69869 19541 19	23 36587 441357 441357 52859 52859 7534971
	-11	8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	6 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
7 408 20117 329 23917 346 229 23917 346 229 23917 248 25763 416 39157 248 25763 416 39157 248 25997 230 5349 23917 349 23917 349 23917 349 249 549 549 549 549 549 549 549 549 549 5	2	593	1
7408 20117 329 340 22317 215 346 22937 230 248 25763 416 246 25997 230 249 51473 364 175 58511 346 89 64853 242 486 67961 487 467 35051 248 419 39119 242 488 67853 224 419 39119 242 488 67853 224 488 67853 224 488 67853 224 350 90401 134 488 67853 224 371 488 67853 224 371 488 67853 224 371 488 67853 224 371 371 371 371 371 371 371 371 371 371		23917 28057 35461 39157 53479 55819 55821 69859 7773 89071 26347 34953 448311	67783 78367 80953 93967 34381 52981 52981 67141 68473 83137 85009
7 408 20117 346 221317 346 221317 346 221317 248 25763 248 25763 371 42743 371 42743 175 58511 89 64853 486 67961 412 31397 1128 31397 467 35051 419 39119 488 67853 350 90401	N"	84444 8444	4447 4447 4447 4447 4447 446 446 446 446
N 0 4 2 2 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 3 2 3 3 2 3	2	20117 22317 22739 25763 25997 53639 37019 37019 54743 58511	67961 81527 96293 31397 35051 90401
.    <i> </i>    .    .    .    .    .		408 370 346 246 246 371 371 800	486 404 404 467 467 350 350
88 88	N	587	591

	483 73561 343 97711 373 22963 263 26317 229 28309 376 45361 370 46327	250 53401 144 62323 537 67273 527 67723 409 82963 393 87811 359 95107 295 98773	26263 26263 37699	51043 51043 56713 67189
N''	483 343 373 229 376	144 144 537 537 393 393 393 446	2 2 3 9 4 6 8 8 8 8 9 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	362 278 230 541
	635 637 264 26189 373 22963 267 51977 263 26317 486 73361 229 28309 388 89567 376 45361 346 67370 370 46327	296 98669 250 53401 144 62323 537 67273 527 67723 409 82963 393 87811 359 95107	461 38447 286 50101 391 44483 539 67213 518 69257 464 75797 352 96671 661 471 37307 265 26263	225 5773 410 41131 147 62003 362 47389 150 6601 352 56743 456 77867 230 56713 364 94307 541 67189
Ŋ,	264 267 486 388 346	296	39 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 6 4 6 6 4 6	147 520 456 364
×	637	630	£641	
,.Z	629 398 21179 443 19801 655 495 35291 365 23197 191 58169 384 44563 637 516 68489 244 53857 1384 59023 381 90007	397 21397 488 36651 446 39367 440 40039 278 50383 176 59791	495 70753 375 90199 367 92353 448 39229 284 50023 437 81031	45541 55411 59929 61291
N.,	365 365 384 124 138 381	7884 4844 6444 1778 1978	3375 3375 3375 448 437 437	374 236 176 166
.2	398 21179 443 19801 495 35291 365 23197 191 58169 384 44563 516 68489 244 53857 230 55209 184 59023 381 90007	631 390 21839 397 21397 445 39443 488 36061 389 43997 484 36457 185 58937 446 39367 278 59383 176 59791	633 499 35153 448 39229 385 44819 284 50023 349 48281 437 81031 412 8139 370 92111	635 469 37013 374 45541 269 51407 236 55411 456 77681 176 59929 292 98897 166 61291
$N \mid N'$	398 495 191 516	3 4 4 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	499 385 349 412 370	469 269 456 292
N	629	631	633	635
,Z	27943 55339 57637 59743 91711 93151	39301 42223 44053 52963 53617 5341	224 56773 146 51813 116 51853 116 51853 517 6774 429 81463 265 25747	527 67429 479 73243 457 75709 433 81019 365 92221
N''	222 232 194 174 365 281	4 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	224 176 116 116 517 265 255	527 479 457 433 365
.2	623 382 22133 229 27943 451 38153 232 55339 449 38561 194 57637 433 4041 174 59743 393 42557 365 91711 367 45533 361 93151 275 50291 281 99709	111 64151 432 80849 625 513 34217 442 39301 493 3599 396 42223 393 42863 384 44053 381 44687 256 52963 361 466751 236 55243 271 51059 232 55441	241 5425 1224 56773 229 5681 176 59497 173 5999 146 61813 456 75527 116 63853 404 82457 517 67741 429 825 25747 527 238 27599 256 53047	169 60659 527 67429 514 68567 479 73243 457 75709 433 81019 365 92221
N.	382 445 449 393 367 433 367	5513 5513 393 393 361 361 361 361	241 173 173 404 404 823 355	514
$N \mid N'$	623	625	627	
'.Ζ	67369 73327 91969 99487	446 19301 239 27091 511 33941 229 27799 449 37967 181 29527 439 39089 173 29851 379 41399 452 37693 261 51683 376 44917 167 60611 362 46021	256 52489 170 60337 162 61261 525 66973 448 71569 445 74527 445 77563	448 38449 224 56509 136 62581 361 92419
N''	519 471 361 279	239 181 173 504 376 362	256 1170 1162 525 4483 383	224 136 361
.Z	217 57131 519 67369 167 60497 471 73327 133 62921 351 91969 536 66221 279 99487 524 66851 358 92801 334 97547	619 446 19301 239 27091 511 33941 229 27799 449 37067 181 29527 439 39089 173 29851 339 41299 452 37693 261 5168 376 44021	522 67247 256 52489 502 69239 170 60337 474 73121 162 61261 424 81629 525 66973 400 82493 483 71569 445 77563	621 340 97157 448 38449 284 99191 224 5559 136 62581 361 92419
N.	11 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	446 449 439 377 261	2 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	340 284
N	<b>4</b> 617	619		621
,.Z	363 90217	39181 48523 57751 60901 67759 70717 71419 83911	339 96337 389 21193 227 27883 2268 50821 218 56989 497 69481 373 89923	19237 38371 58831 67021
N''	363 281 279 379 237 181	4881 460 460 460 460 460 460 460 460 460 460	339 389 227 228 218 497 373	445 446 182 523
.2	611 281 98887 281 98887 279 99259 613 432 19763 379 21817 388 21149 237 27043 380 21701 181 29389 376 22100 474 36073	451 37199 434 39181 239 53693 336 48523 179 59123 190 57751 506 67901 164 60901 450 74729 507 67759 444 17628 349 170717 398 82223 391 83911 396 82529 357 92179	615 388 21269 389 21193 615 388 21269 389 21193 179 59183 227 27883 1338 96779 268 50821 218 56989 218 56989 373 89229	*617 378 22157 445 19237 364 22709 446 38371 362 22877 182 58831 381 43781 523 67021
N	432 388 380 376	3998 3998 3998 3998	362 3388 338	378 364 362 381
N	*611 613		615	*617

N	,×	2	N"	,,2	N	Ŋ	2	N"	,.Z	×	N N'	2	N,	,2	×	$N \mid N'$	,Z	N"		N	$N \mid N' \mid$	.7	N".	Ζ
*641			497	497 71761 445 80671	*647	373 265	373 46877 280 51109 265 52967 274 51427	280	51109	•653	203	249 54773 472 38377 203 57689 396 4497	472 396	38377	*65¢	354	97373	427 391	497 71761 *647 373 46877 280 51109 *653 249 54773 472 38377 *659 358 97373 427 82393 *665 467 39863 183 30133 445 80671 265 52967 274 514257 526 34981	*665	467	467 39863 183 30133 421 42257 526 34981	183	30133 34981
			439 381 361	439 81637 381 90187 361 95203		229 512 300	229 57047 238 55837 512 69899 509 70621 300 98729 393 89839	238 509	55837 70621 89839		173 149 117	173 61043 240 55903 149 62129 176 60661 117 64091 537 68209	240 176 537	173 61043 240 55903 149 62129 176 60661 117 64091 537 68209	.99	290	661 478 19163 183 29989 290 25301 464 39883 521 35171 422 41911	183	29989 39883 41911		306	207 57653 202 58147 306 98867 198 58441 186 59659	202 198 186	202 58147 198 58441 186 59659
643	466 188	643 466 19031 379 22741 188 29531 373 2327	373	22741	649	192	649 192 29339 457 19813	347	347 97879		354	474 75833 354 97511	411	474 75833 411 85513 354 97511		51,	517 35603 406 4407 279 51599 288 5083	288	517 35603 406 44071 279 51599 288 50833				178 507 383	178 60889 507 73453 383 03037
	415	4/1 3/39/ 450 3909/ 415 41333 525 68659 235 56249 399 86533	525 399	39097 68659 86533		477	477 37277 502 36037 415 41777 404 43051	502	36037 43051	CC	479	35537 37571 44771	294 284	355 513 35537 399 44993 479 37571 294 49993 399 44771 284 51061		13.	239 56393 154 61843 177 60869 144 62701	154	239 55393 154 61843 177 60869 144 62701		515	667 515 36131 387 23203  373 47951 293 25261	387	23203
	187	187 59207 359 96097 542 67289 291 99439	359 291	96097 99439		397	397 44519 366 47497 249 54293 248 54559	366	47497 54559		361	48311 53411	176 519	361 48311 176 60733 257 53411 519 69829		516	518 70919 561 66931 516 71537 505 73237	561	66931 73237		237	259 53783 514 36307 237 56921 366 48487	514 366	36307 48487
	508 506 404 352	508 70121 506 70589 404 85793 352 97169				189 123 500 384	189 59159 234 50527 123 63659 172 61027 500 72647 136 63277 384 90527 515 69739	172 136 136 515	56527 61027 63277 59739		249 143 552 518	249 54881 143 62639 552 67307 518 70001	503	249 54881 503 72763 143 62639 552 67307 518 70001				455 411 365 297	455 81373 411 86257 365 96451 297 99901		197 195 526 468	197 58757 272 53101 195 59069 188 59467 526 70241 547 68539 468 79817 409 88513	272 188 547 409	53101 59467 68539 88513
645	449	645 449 40169 464 38713	464	38713	651	286	651 286 25253 365 23899	365	23899		502	502 72977 368 95261			99	916	663 196 29363 257 26953	257	26953	999	404	404   90011   361   97561   660   256   27230   524   35527	361	97561
	2 4 4 4 8 1 1 9 8 4 0	418 82373 412 83717 296 99023				275 191 422	255 5455 530 34483 191 58907 460 39397 422 82361 284 50767	530 460 284	34483 39397 50767	657	194 475 401	194 29387 475 38351 401 44579	472	657 194 29387 472 38803 475 38351 461 79813 401 44579		8 1 9	383 46727 470 39133 151 62189 466 39799 394 90203 280 51577	4 4 4 8 8 9	39133 39799 51577		196 275 203	196 29483 466 40111 275 52757 541 69427 203 58193 407 89611	466 541 407	40111 69427 89611
*647	410 402 374 246	647 410 21101 455 19861 402 21587 273 25819 374 2333 237 28051 246 27431 476 37201	455 273 237 476	19861 25819 28051 37201	*653	298	410 21101 455 19861 298 99119 242 55399 402 21587 273 25819 299 98953 374 23333 237 28051 \$653 478 18731 403 21943	242 509 299	242 55399 509 71293 299 98953 403 21943	•659	500 361 361	500 73523 475 38543 484 37339 361 48563 466 39313 295 50003 298 49741	484 466 208	\$00   73523				206 154 140 419	206 57709 154 61909 140 63211 419 84979		404 484 470	542 69341 494 74051 484 76541 470 79631		
	473 415 409	473 37619 418 41257 415 41543 396 44449 409 42467 382 45337	418 396 382	41257 44449 45337		515 477 459	515 35111 287 25237 477 37643 536 34213 459 39791 500 36571	287 536 500	25237 34213 36571		193 460 422	193 58991 174 6112 460 79943 140 6307 422 83423 463 7962	174 140 463		• 66	246	305,90739 *665,258,26921 521 17749 246,27803 411 21841	521	305,90739 521,17749 411,21841		370 362 362 358	400 89807 370 96329 362 97583 358 97961		

	m m] ∺ o	n = 0 m c	) H (C) H	H / H 0	1 On 10 On	V 00 H		V V O
,2	507 75553 491 78823 505 19051 431 21700	409 22861 207 29269 540 35923	557 69061 535 72823 313 99961	4194 4995 5433 5062	6673 6946 7318	7887 9586 9750		3705 5352 6691
N"	507 491 505	409 207 540	567 567 535 313	314 314 268	595 565 565	493 391 379		274 274 295
2	695   So7 75553 697 403 46649 505 1905 1 247 56090 411 21709	516 73883 409 22861 320 98993 207 29269 573 68232		699 443 42179 446 41941 431 43973 314 49957 307 50543 268 54331 287 52817 106 50530	151 62861 595 66739 590 67181 565 69463 532 73517 535 73189	448 83207 493 78877 410 91583 391 95869 406 92657 379 97501	374 97973	701497 39113 512 37057 449 41681 274 53527 427 44777 595 66919 317 49739
Ŋ	103 4	3202		13 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	5900	8 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	374	127 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
$N \mid N$	695			669	4,4,			
		T	111	200117	8 1 6	97		
,Z			2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	535	214 57781 206 58411 487 79039	3396	505 75721	424 44623 408 45691 202 59239 573 68041
N'	<u> </u>		2 4 4 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	2 4 4 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	2 2 8	4 4 8 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	20	4 4 4 4 7 7 7
2	281 53093 253 55967 209 58211 478 80783	396 94109 388 95213 378 97007	691 254 27941 437 21211 421 44753 427 21859 293 51341 253 28069	283 52973 486 39709 283 52973 486 39709 265 54311 292 51517 257 55373 270 53551	151 62603 214 57781 386 96017 206 58411 487 70039	693 256 27851 488 39619 421 44909 424 44497 403 46100 152 62530		2/1 55001 25/ 2/01/ 24/7 56909 424 44623 532 73181 202 59599 504 76001 202 5939 573 68041
×	281 253 209 478	396 388 378	254 203 203	2 2 2 3 3	151	256 421 403		532
N N	689		169			693	3	532 73181 408 4563 532 73181 408 4569 504 76001 202 5939 504 76001 202 5939
΄.Ζ	261 27277 502 37273 500 37447 494 38287	286 52081 441 82591 421 88003 385 95101	7189 8821 0627	7559	0461	244 56941 493 77731 383 96211 311 00400		99494
N.	261 2727 502 3727 500 3744 494 3828	286 5208 441 82591 421 88003 385 95101	1923	23 8	102 5	1937	100	2 8 4 8 6 4 4 8 8 8
2	7279	<u> </u>	685 439 41609 504 37189 433 42473 492 38821 247 56519 472 40627	201 58901 208 58171 494 76991 423 87559 468 81707 434 84449	418 89213 372 97397 687 284 26267 302 50461	254 27827 244 56941 385 47843 493 77731 488 77969 383 96211	*689 186 30293 503 18859	301 34409 403 47337 531 36299 480 40093 342 34411 483 542337 389 47417 266 54193
 خ	261		39 4 47 5	201   58901 494   76991 468   81707 434   84449	418 89213 372 97397 284 26267	4 58 4 7 88	863	8 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
N N	6834		6854	<del></del>	687 2	4 W 4	1689	<u>ი ო 4 თ თ</u>
,Ζ	677 399 45497 259 27253 *683 492 77279 261 27277 *689 281 53993 371 48839 294 59971 189 59771 278 52807 496 74771 240 56983 494 38287 494 38287	36239	38083 39667 32153	262 54217 248 56269 208 57901 188 59971	37957 39217 52311	57801 76303 79393	• <del>च</del>	21067 22093 22699 26203
N".	259 278 240	4 1	492 478 484	262 248 208 188 188	494 482 154	563 479		433 2
	399 45497 259 27253 371 48539 294 59971 189 59771 278 52807 496 74771 240 56983	472 80111 421 86239 384 94397 374 96401 372 96797	679 491 38333 492 38083 477 39821 478 39667 417 44087 284 52153	251 55673 262 54217 538 69833 248 56269 384 94709 208 57901 188 59971	681   527   35993 494   37957   475   40013   482   39217   437   41513   154   62311	305 50069 563 67801 145 63029 493 76303 560 68219 479 79393 500 74717	440 82499 380 96137	*683 264 27059 433 21067   523 36563 419 22093   189 60017 403 22699   181 61031 283 26203
N,	399 4 37 1 4 189 5	384 384 272 202 202 203	1913	251 5 538 6 384 9	175 4 137 4	305 145 100 100 100	80 g	5233
$N \mid N'$	677	4 00 00 00	679	·	189	., 47 47	4 (1)	*683 ;
2	671 422 21419 415 21787 390 23117 249 27733 529 35141 524 35731 291 51047 430 41617	285 51287 408 44839 241 56687 388 46639 199 58613 386 47017 181 60623 196 59107	435 82351 397 90529 377 95257	673 426 21143 417 21739 418 21611 255 27541 282 26003 484 38737 286 51431 416 4265	189 59567 390 46567 145 62939 380 47407 424 85439 246 56239	146 62743 519 72481 473 79609	39451	?
N.,	415 249 524 430	388 386 196	435 397 377	417 255 484	390 380 246	146 519 473	476	7
2	422 21419 415 21787 390 23115 249 27733 529 35141 524 35731 291 51047 430 41617	285 51287 408 44839 241 56687 388 46639 199 58613 386 47017 181 60623 196 59107	566 67211 435 82351 397 90529 377 95257	426 21143 417 21739 418 21611 255 27541 282 26003 484 38737 285 51431 416 42651	189 59567 390 46567 145 62939 380 47407 424 85439 246 56239		675 527 35753 476 39451	187 59951 179 61001 398 90887 362 97883
ķ	390	285 241 199 181	266	4 4 1 8 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8	189 145 424		527	179
2	671			673	<u></u>		675	

	H E	0 H	w F	ठ्	-	H 6	ġ.	53	7	ō	1	0	6 :	=1	6	က္သ	3	စ္ကု	9	2 2	н	6	7	Į
1,2	3717 4594	4681 472	593 69193 509 80287	433 90379	2217	232	2602	4576	734	747	775	779	429 91909	415 94501	4005	773	862(	916	187	4050	474	5491	9678	9957
N''	538 428	422 414	593 509	433	449	425	307	430	559	537	527	521	429	415	512	529	457	431	630	508	416	280	405	333
,2	731 303 52361 538 37171 271 55529 428 45943	267 56267 422 46819 205 59621 414 47251	558 73331 593 69193 509 80287		733 462 21323 449 2217	284 20981 425 23251 280 27209 411 23893	575 35381 307 26029	465 42083 430 45763	303 52541 559 73417	197 60719 537 74779	580 69911 527 77551	506 81041 521 77929			735 544 73907 512 40099	542 74219 529 77323	536 75641 457 86263	506 81353 431 91639	737 426 23330 530 38740	531 38609 508 40597	471 41843 416 4743	321 50873 280 54919	225 58013 405 96787	203 60209 333 99571
	352	7 56 5 59		-	22	10 27	5 35	5 42	3 52	200	50	8		-	473	12 74	16/75	89	6 2 3	38	14	11 50	5 58	3
N N	2 3	8 8	33	-	34	, w	57	4	ဗ	5	25	ž		-	35 54	5	53	〗	17 42		4	8	6	<u>~</u>
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	2					7.0	. 6		_	60	_	_	_			_	_	Ĺ		_	=	_	0	0
,2				3412	4438	45589	5521	8154	9051	9406			2706	3934	4485	4983	60649	6312	6933	527 76039	3525	3984	4 I 80	212 59209
N".				596	4	426	274	497	429	417			281	514	442	328	196	154	589	527	574	512	466	212
2	*723 590 68711 550 73547	466 82811 406 95327	398 96749 326 99719	725 448 21863 596 34123	559 36263 444 44383	523 38459 426 45589	463 41879 274 55219	419 46703 497 81547	307 51437 429 90511	157 62801 417 94063	586 69467	572 70163	727 446,22091,281,27061	523 38711 514 39343	399 48473 442 44851	285 53453 328 4983I	157 62873 196 60649	448 88037 154 63127	332 99251 589 69337		729 533 37607 574 35251	329 49811 512 39847	454 86069 466 41809	
N.	590	406	398	448	559	523	63	419	307	157	286	572	446	523	399	285	157	448	332		533	329	454	
N N'	•723			725									727								729			
,,2		37987 74161	388 97571 463 82567 323 99817	35677	317 50333 298 52369	59113	570 69779 495 81349	564 70769 459 83833	520 76607 439 89113	444 87557 325 99523	323 99907	23131	453 42899 502 40153	49747	56131	58567	60343				56599	72649	88591	598 67751 325 99859
N"		520	463	562	298	210	495	459	439	325	323	120	502	326	264	214	198	-		_	260	557	443	325
2	412 93827 328 99053	717 197 60317 520 37987 424 90599 529 74161	17571	719 509 39191 562 35677	50333	313 50909 210 59113	6226	6920	16607	37557		721 302 26021 419 23131	12899	417 46619 326 49747	409 47189 264 56131	219 58151 214 58567	193 60887 198 60343	165 62057	390 97607	330 99131	17339	295 53069 557 72649	275 54833 443 88591	57751
N.	328	1976	88	600	317	313	700	5647	320 7	44		302	153	117	601	613	193	165	300	330	601	262	175	869
N	\$112	212		719		***_ =					-	721		_`							723			<u></u>
,2	78787		39727	50263	51283	154 02791 605 66763	499 7980I	413 92641	21589	13399	302 51421	262 55921	218 57973	19819 991	559 70879	455 83857	415 92227	13371	16141	10123	50551	56889	57819	9886
N"	321		500	314	302	154 605	499	413	443	442	302	292	218	166	559	455	415	413	2	804	314	209	591	329
2	*709 484 81749 501 78787 *715 412 93827 450 84089 321 99397 328 99053	418 90911 326 98909	711 523 37223 500 39727 439 43793 412 46573	319 50021 314 50263	217 58031 302 51283	520 73943 154 02791 605 66763		Ť	713,520 75617 443,21589	512 77687 442 43399			·				-	715 274 27179 413 23371	453 42227 452 36151	257 56633 498 40123	189 61091 314 50551 8723 409 47339 250 55599	588 68207 607 66889	516 76829 591 67819	422 90749 329 98869
N.	484	326	523 439	319	217	230			520	512		-					_	274	15.3	257	189	588	516	422
N N	<b>\$</b> 709		711						713									\$715	•					
,Z		1139	269 27241 267 27481	398 47287	52957	254 50437	1871	50271	154 62617	557 70117	383 97369	39019	10531	16471	276 53623	268 55051	519 74731	459 82231	323 99223	3540I	11269	54139	55207	10065
N.		195	269	398	88	254 . 501 (	300	946	154	557	383	502	188,	110	276	268	519	159	323	55	158	274	268	577
2	568 69317 426 89759	703 434 21911 495 19819 208 29333 445 21139			.4	.,	705 514 75653 296 51871	454 82889 194 60271	_		···	707 493 40037 502 39019	219 57773 488,40531	414 91841 410 46471				. •	,	709 416 22871 556 35401	196 30029 458 41269	215 58229 274 54139	153 62903 268 55207	490 80933 577 6900I
N.	568 6	34 2					147	548				934	195	149	-				_	1612	963	155	536	806
N N	*701   568   69317   426   89759	7034					705.5	, ,				707		4	•				_	7094		-01	-	4

$N \mid N \mid Z \mid N''$	.Z ,1	N N	N.	Z	N"	,Z	N	N.	.2	N".	,,2		N N'	Z	N''	,Z	N	N.	.2	N".	,2
F737 562 73433 518 79601 438 90197		745	462 308 471	745 462 21683 524 39703 308 26261 274 55843 471 42461 206 60037	324 33 374 53 306 60		751:	63 25 4 4 4	529 39569 522 40231 463 43991 464 43759 425 47309 440 45853	522 464 440	529 39569 522 40231 463 43991 464 43759 425 47309 440 45853	*757	535 467 231	535 39383 320 51481 467 43913 222 5892 231 58043 625 6786	320	535 39383 320 51481 467 43913 222 58921 231 58043 625 67867	<b>*</b> 763	295 484 432	751 529 39569 522 40231 *757 535 39383 320 51481 *763 295 54083 629 68059 463 43991 464 43759 251 767 43913 722 58921 484 84191 591 71887 425 47309 440 45853 231 58043 625 67867 432 94559 523 88559	629 591 523	58059 71887 81559
414 95279 739 539 37799 582 35227 513 40343 324 50647 415 4757 206 50833 405 4853 198 60859 281 54851 671 677897 273 55697 547 73897	24 50647 26 59833 38 60859 11 67789		2 2 2 4 4 4 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5	221 58001 571 72973 576 72167 547 74713 542 89891 517 80761 418 95483 483 82339 477 83443 463 86287	571 72973 547 74713 529 78031 517 80761 483 82339 477 83443 463 86287	2973 8031 9761 2339 3443	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	120 171 171 171 170 170 170 170 170 170 17	0303 1593 6477 8073 3317 3877	4 2 2 2 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	331 50303 424 47419 317 51593 270 56611 229 580477 210 56671 157 63317 595 69847 580 72221 539 77719	759	212 212	209 00149 021 00491 536 78347 553 75277 468 87293 459 9959 449 90313 351 986731 212 29867 554 37747	351 459 449 409 351	209 00149 021 00491 536 78347 553 75277 468 87293 459 8959 449 90313 351 9867 759 212 29867 554 37747	765	430 454 454	430 95111 407 600 97 765 598 71327 482 42703 428 47731 563 74353 541 78607 467 89137	467 466 466 428 563 541 467	482 42703 466 44773 428 47911 563 74353 541 78607 467 89137
333 99793 741 542 18773 226 58057 457 43961 200 60601 227 57899 625 67219 524 78623 454 88607 428 93503	333 99793 226 58657 200 60601 625 67219	747	284 461 169 536	44.9460 43.92479 747.284.27437.578.305007 461.43889.526.39631 169.62297.470.42787 536.77747.464.43207	441 90401 578 36007 526 39631 470 42787 464 43207		753	286 27479 286 27479 208 30059 425 47441 163 62819	400 97307 343 9924 340 99401   286 27479 467 2167: 208 30059 332 5032 425 47441 641 6673 163 62819 529 79633 163 62819 529 79633	467 2 3 2 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	340 99401 340 99401 753 286 27479 467 21673 208 30059 332 50329 425 47441 641 66733 163 62819 529 79633		311 586 560 428	311 52937 472 43117 586 72287 466 44101 560 74159 320 51691 428 95009 278 56113 272 56779 535 78976	472 320 272 272 535	311 52937 472 43117 586 72287 466 44101 560 74159 320 51691 428 95009 278 56113 572 56779 479 85021		28 2 4 8 8 8 2 8 3 2 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	767 322 25943 445 23209 281 55093 450 45757 498 82217 346 49843 352 99017 605 70201 551 77517	445 544 544 605 605 593	445 23209 544 39079 450 45757 346 49843 605 70201 551 7717
743 436 22859 307 26293 479 41381 542 37783 431 46457 470 42373 419 47501 264 56923 273 55931 631 66853 201 60521 587 70123 610 68399 581 71263	67 26293 42 37783 70 42373 54 56923 31 66853 87 70123	749	431	749   11   12   13   14   17   18   18   18   18   18   18   18	514,51799 515,81163 439,91159 337,99679 438,46027 330,50377 318,51307	1	755	23 2 3 3 3 4 5 6 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	546 19157 463 2212, 466 21929 317 2593 543 38729 526 4008; 331 50651 424 4765; 426 94961 579 7225; 426 94961 579 949	5264 5264 5264 5264 5837 5797	755 546 19157 463 22123 466 21929 317 25933 543 38729 526 40087 331 50651 424 47653 229 58217 583 72253 426 94961 579 72453	761	555 535 429	37811 39761 47543	599 581 563 563	761 555 37811 226 58543 535 39761 206 60493 429 47543 621 68713 581 73309		593 491 431 325 636 484	769 593 36251 292 54979 491 41897 176 62053 431 47837 595 72031 325 51503 555 76819 636 67763 545 78307 484 85517 499 82279	292 176 176 595 555 545 545	497 82387 292 54979 176 52053 595 72031 595 7809 545 78307 499 82279
570 72893 547 74287 548 74201 537 76771 468 85487 459 87547 341 99013	547 74287 537 76771 459 87547 341 99013		277 520 480	277 55619 202 60637 520 80657 585 71437 *757 597 35117 488 41389 480 83231 531 78241 405 97551	202 60637 585 71437 531 78241 405 97551	0637 1437 * 8241 7551	757	597 3	7117	423 5		<b>*</b> 763	473 465 419	4339; 44729 48437	468	*763 473 43397 472 43543 465 44729 468 44221 419 48437 290 54907		474 472 436 432	474 00007 497 02471 472 88289 469 89329 436 94439 432 95267	469	89329

				_
,2	5437 3963 1631 7939 7937 1873 6331 7041	2189 5221 1893	1118 2207 2231 781 781 781 4171 4171	4099
N	801 578 76847 628 35437 566,78791 494 43963 470 91457 338 51631 661 67939 581 75937 469 91873 803 466 23189 587 75253 633 35159 579 77041 353 50459 467 92383	805 338 25931 493 22189 509 42437 634 35221 664 67979 514 41893 618 72797 661 66371	807 569 39461 512 42073 364 99707 623 72313 364 99707 623 72313 589 7551 809 467 46829 590 37813 343 51347 582 38707 335 52457 512 42307 399 54623 466 46957	492 89657 465 94099
1 1	147 6 191 4 157 3 157 3 157 3 159 5 159 5	31 4 137 6 197 6	161 5 107 6 1847 5 1877	574
Z	2768 2787 914 913 335 3504	183 52171 622 71879 338 25931 509 42437 664 67979 618 72797	1 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	8
$N \mid N$	1 576 566 47 47 3 466 633	5 33 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	9
N	803	, 8	8 8	
΄.Ζ	795 347 50741 346 50923 169 63059 623 70921 652 68531 571 77647 469 90847 797 463 46307 578 37993 439 48341 346 50989 351 50411 222 59863 215 60617 623 71329 508 73379 555 80263 576 7681 489 88327		799 351 50513 626 35491 632 69959 616 36277 624 71453 502 42901 588 74363 494 43633 550 81371 448 47791 462 93281 302 55213 625 71191 505 84967 467 92119	453 94441
N	346 623 623 623 623 623 623 623		0 0 0 4 4 8 0 0 0 4 4 8 0 0 0 0 0 0 0 0	453
"N Z	347 50741 346 5092 169 63059 623 7092 652 68531 571 7764 469 9084 463 46307 578 3799 439 48341 346 5098 351 50411 222 5986 215 5061 757 558 757 576 7678 1489 8832	572 77723 564 78467 546 81611 462 9393 460 93683 458 94121	351 50513 626 35491 632 69959 616 36277 624 71453 502 42901 588 74363 494 4363 550 81371 448 4363 462 93281 302 5521 629 71191 629 71191 625 71191	
ķ	347 169 652 4463 351 2351 576	2 4 5 4 4 4 5 8 5 4 4 5 8 5 4 4 5 8 5 4 5 8 5 4 5 8 5 4 5 8 5 4 5 8 5 4 5 8 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	5632 632 558 853 462 462	
$N \mid N'$	797		799	
Ζ	779 499 41669 493 21157 787 299 54917 230 59077 7795 347 50741 346 50923 401 44641 288 55663 566 77471 649 68023 169 652 68531 571 77647 500 83003 537 81181 496 85313 447 94291 652 68531 571 77647 500 83003 537 81181 496 85313 447 94291 652 68531 571 77647 642 94349 481 87583 432 96911 781 797 463 46307 578 37993 781 478 22229 299 27211 773 62549 500 42193 751 500 87379 552 39373 608 72223 545 80989 608 73379 555 80263 331 5383 492 42727 458 92681 575 767678 1488 88257 575 767678 1488 88257 576 7678 1488 88257 576 7678 1488 88258 576 7678 1488 7678 1	38329 45523 51907 57943 78781	335 25771 580 37561 344 51031 605 73369 561 78577 487 88177 443 96013	47503
N''	230 649 649 647 622 500 172 655	572 4 6 6 6 2 4 2 2 2 3 3 2 2 4 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3	55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55	44 84
2	787 299 54917 230 59977 566 77471 649 68023 546 80777 499 84229 496 85313 447 94291 789 290 27947 622 35149 600 72173 62549 500 42193 600 72173 172 62683 608 72223 545 80989 458 92681	791 557 39623 572 38329 549 40361 466 45523 327 52529 332 51907 307 53819 242 57943 291 55829 559 78781 358 99431 433 97177	227 58979 567 75013       506 82487 611 71563       793 53 42101 335 25771         598 72431 551 77899       484 87299 505 82699       505 82699         492 84047 491 84463       454 92993       578 75707 580 37561         459 90397 785 443 47459 346 50359       562 78311 512 41299         541 40151 562 38281       572 75731 288 56053       544 81509 344 51031         550 72911 236 58153       568 76481 613 71473       438 96431 561 7857         552 74247 46153       506 82799 553 7911       438 96431 561 7857         572 7427 7427 244 60217       456 92639 361 98893       443 96013	449 47381 448 47503
N N	299 5566 5566 5546 5546 554 554 556 556 556	557 557 327 307 358	308 8 4 4 9 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	449
N	789	791	793	
,,,	493 21157 288 55653 563 76777 537 81181 481 87583 453 92401 562 38677 552 39373	637 68749 599 72931 545 79987 535 81619 344 50503	71563 82699 50359 52267 56053 71473 79111	50473
N''	2 2 3 3 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	599 599 545 535 535 220	505 346 326 503 613 613 613	284
Z	779 499 41669 493 21157 491 42641 288 55663 165 63 31 563 76777 500 83003 537 81181 442 94349 481 87583 453 92401 781 478 22229 299 27211 603 36137 562 38677 549 39779 552 39373	428 97079 637 68749 428 97073 545 79987 428 97073 545 79987 783 331 51479 344 50503 616 70619 220 59539	506 82487 611 71563 484 87299 505 82699 454 92993 505 82699 301 54323 326 52359 572 75731 288 56053 568 76481 613 71473 506 82799 553 79111 456 92639 361 98993	495 42821 284 50473
$N \mid N' \mid$	44 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	4 4 5 8 8 4 4 5 8 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9 1 9	506 484 454 454 454 301 572 568 568 556	495
N	779	783	785	
,2	8119 1673 8173 8477	3951 6663 3719	557 75013 151 77899 151 84463 152 90397 159 94477 150 28281 152 46153 153 81517	4127
.v.′	30 5 4 4 4 5 5 5 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5	178 4 4 8 2 0 2 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	5567 7501 551 7789 449 8446 459 9039 439 9447 562 3828 562 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828 563 3828	493 84127
2	771 563 37691 536 40213 283 5603 494 41647 163 63179 625 69259 548 77933 422 97187 773 559 38321 560 38119 547 39239 456 45427 543 39827 326 51673 471 44741 230 58477	566 74873 486 88751 450 92219 775 451 46133 478 45663 321 52433 302 53719	227 58979 567 75013 598 72431 551 77899 492 84047 491 84463 459 90397 439 94477 777 541 40151 562 38281 451 46349 452 46153 596 72911 236 58153 572 74497 214 60217 352 99371 553	-
	8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	566 74873 566 74873 450 92219 451 46133 437 47513 321 52433	2 2 2 4 2 0 7 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	
N N	2 1 2 4 2 2 4 H	77 4 4 4 8 8	4 0 4 0 0 8	-

N   N   Z   N'   Z   N'   Z   N   N   Z   N'   Z   N   N   Z   N'   Z   N   N   Z   N'   Z   N   N   Z   N'   Z   N   N   Z   N'   Z   N   N   Z   N   N   Z   N   N   Z   N   N	1		8 9 8 H 9 V	ნ ⊨ 1	F F O O O F O F	1 +
#817 518 84239	,2		4393 6025 7018 9204 9547	8899 9972	4323 5451 5617 6010 6793 6906	8298
#817 518 84239	Ŋ,		520 232 665 493 473 463	517 381	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	545
#817 518 84239		79349 80141 96827 97499	54371 59243 68699 99761	81293 89627 95177	38201 42773 43787 44843 58199 70223 71363	56099 77591 79757 81071 87743
#817 518 84239	×	592 586 462 456	323 245 688 380	582 514 476	613 533 515 515 668 668	311 610 596 586 586 524 500
819 473 46769 590 38629	×	*841	843	845	847	849
819 473 46769 590 38629	1 1	35533 44263 67957 71821	46633 58189 71593 76753 80701	96697	74167 74167 76537 77023 78193 85243 91921	54409 60727 61141 72937 75703 99109
819 473 46769 590 38629	''N	654 512 689 647	484 454 653 605 581 539	481 461 520	657 605 605 605 729 729 729	322 226 226 227 645 613 385
819 473 46769 590 38629	11 11	51767 72461	37997 45767 55109 56597 72353	39371	53987 76157 96179 97577	43499 52301 55631 67157 67943 78317
819 473 46769 590 38629	ķ	351	607 491 317 301 646 602	593	325 608 45 45 45	521 349 311 710 694 596
819 473 46769 599 38629 823 823 823 823 823 823 823 823 823 823	×	835	837	839		*841
819 473 46769 599 38629 823 823 823 823 823 823 823 823 823 823	,2	97081 97387 52951 74383	40357 41611 59611 68683 80407		35671 42061 83869 85087 94009 62299	42169 46279 91387 99181
819 473 46769 599 38629 823 823 823 823 823 823 823 823 823 823	N"	451 447 338 607	530 232 675 575		526 529 529 523 188	528 484 489 381
819 473 46769 599 38629 823 823 823 823 823 823 823 823 823 823	Z	73079	37517 37517 38693 43313 52919 56087	59729 67757 74189	52633 52633 68147 68507 74099 41549	50261 52667 69221 41387 75503 87011
817 518 84239	N'	632	505 505 513 339 303	684 610 610 610	583 682 680 680 612 533	367 343 674 608 516
8821 8821 8823	N				829	
8821 8821 8823	i	38629	68329 68899 75133 83773 87943 97609	41659 62761 71503	88609 89209 94993 99559 47269	54727 59707 68521 71947 74203 74509
8821 8821 8823	N"	280	673 667 599 523 505 443	526 178 641	503 463 371 502 466 466	314 230 675 637 607 605 73
8821 8821 8823	l	84235 85601 46769	62095 71411 89123 98999	35543 36269 47981	69197 75821 79829 96167 43577 49877	53657 58661 58997 71789 90647
	<u>  X</u>	518	187 640 500 376	643 633	596 596 576 576 509 371	321 251 245 241 638 485 372
811 503 43331 500 43987 445 48491 308 54973 339 52181 300 55609 576 77999 298 55927 478 9097 7559 81199 478 9097 8559 81199 458 94597 81459 94597 813 595 37493 514 42457 520 73421 502 43789 521 41801 514 42577 517 42089 474 46183 341 52121 294 56503 341 52121 294 56503 335 5288 348 34791 538 7471 517 84673 550 81563 8519	×	819		821	*823	
811 503 43331 500 445 48491 308 339 52181 308 576 77999 298 496 89069 635 478 99277 559 478 99277 559 478 99277 559 478 99277 559 478 99277 559 478 99277 559 521 521 502 521 41801 514 517 42089 474 341 52121 294 341 52121 294 341 52131 349 523 52289 493 335 52889 693 335 52889 693 339 59021 631 592 71471 517	1	43987 54973 55609 55927	71143 81199 94597 42457 43789	60811 73009 83233	37573 42577 46183 56503 62119 83023 86161	25939 44701 69163 72211 84673 96493
811 503 43331 445 48491 339 52181 576 77999 478 99697 478 99697 478 99697 478 99697 478 99697 813 595 37493 620 73421 815 573 39749 341 52121 239 59021 537 42689 341 52121 239 59021 538 71471 538 71471	N.,	30 8 30 8 80 8	635 459 514 502 502	523 521 521	596 514 474 294 186 523	8 4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
811 503 811 503 335 445 478 478 813 595 813 595 813 339 817 339 817 339 818 531 817 339 818 581 818	43331 48491 52181 77999	89069 90977 94781 37493 73421		39749 41801 42089 52121	52313 52889 53831 59021 71471 76163 81563	
N	<u></u>	1 503 445 335 576	4 4 7 6 4 7 6 4 5 8 5 9 5 6 2 0 6 2		5273	335 335 335 638 598
	N.	<b>1</b>	<b>™</b>		81,	**************************************

		<i>~ ~</i>	<del>_</del>	A -	~ ~	_ ,	_	<u> </u>	-	_	<u></u>	_	_						<del>_</del>		
,.2	647 74311 623 78301	881 545 43541 554 42853 539 44507 548 43993	508 93719 494 47779	324 55849 675 73039	633 77587 517 91423	493 95791	883 546 21803 494 47917	635,38747,362,52903	625 39209 324 56041	513 46301 248 59557	389 50387 683 72073	341 54167 645 75289	646 75017 615 80251	404 99149 537 89059	479 97459	885 556 85817 374 51511	497 95311	887 339 54539 348 53419	692 71597 328 55633	684 72497 573 82531	567 83617
N''	647 7	554 4	494	324	633 7 517 9	493	494	362	324	248	683/	645/	615	537	479	374	497	348	328	573	267 t
2		1541 1507	8719				803	3747	200	30I	387	1167	2012	149		1817		1539	282	1497	
		45 43	80			-	60	35.38	25 39	1346	89 50	4I 54	10	<u>8</u>		56 8	-	39 54	92 71	84 72	
$N \mid N$	-6/	81.5				-	83	o' ù	Ö	'n	m	ň	0	<del>*</del>		85 5		87 3;	ŏ	õ	
7	*		0 0	m н с	2 m F	ᆛ		1 H	7	8	6	_	_			8	H		H	_	_
,2	559 83431 517 90403	456I	4597 5214	334 54073 236 60631 610 2828	603 81223		2116	4332	5283	6805	7009						3924	5245	5550	6798	649 74077
N''	559 517	514	366	236	603		555	544	36	723	693						622	364	326	725	649
Z	95987	875 361 52691 514 45613	500 93251 512 45979 494 94841 366 52147				877 542 21851 555 21163	535 44633 544 4332	515 45641 360 52837	333 54983 723 68053	315 56681 693 70099	259 58763	255 59219	714 08903	620 78713	510 92399	879 643 37529 622 39241	563 41687 364 52453	257 59063 326 5550	508 93407 725 67987	
$N \mid N \mid$	488	361	500 494				542	535	515	333	315	259	255	714	620	510	643	563	257	208	
N	*873	875				-	877										879			,	
"Z	*865 624 76913 559 82483 *873 488 95987 559 83431 *879 548 84467 483 96079	52813	92863	487 95287 485 95857	40237	47659	71917	73303					42181	42793	73303	74101	513 91081	491   95089	47317	54499	74707
N''	559 483	356	503	487	540	488	673	303	}				552	548	719	643	513	49I	464	334	641
Z	624 76913 559 82483 548 84467 483 96079	867 547 42533 356 52813 SII 45491 707 68791	634 75167 503 92863 632 75683 491 94513	526 89897 487 95287 485 95857	869 479 48299 604 40237	265 58067 488 47659	243 59669 673 71917	614 78809 393 99469	612 79229	6926L 019	510 91397	480 964 I 9	871 505 46511 552 4218	323 55511 548 42793	319 50123 719 07691 502 93809 665 73303	400 98963 643 74101			873 518 90281 494 47317	506 93089 334 54499	490 95393 641 74707
N'	624 548	547	634	526	479	265	243	614	612	019	510	480	505	323	319	400			518	206	964
$N \mid N$	<b>*</b> 865	867			869								871						<b>*</b> 873	-	
,Z			50893	56467	70051	599 8007 I	551 83077 305 08800	619 77557	523 89833	487 94693	473,96823	37963	38557	50839	56003	77977	84349			1284I	58281 
N''			374	310	629	299	551	510	523	487	473.9	526	522	376	250	613	547		7	544	<u> </u>
2	676 70199 664 71837	632 74507 392 99173	859 545 42071 374 50893  333 53897 360 51991	676 70583 310 56467 498 93053 196 62131	484 95153 679 70051 482 95471 659 72889					_	-	863'505'45971  626 37963	499 46643 622 38557	379 50549 376 50839	337 53597 250 58003 327 55079 621 77359	241 59747 613 77977	710 68141 547 84349	74831	612 78203	17781	668 72227 711 68281
N.	576	392(5	333	929	184 182 2			1			_	505	1661	379	337	24 I	710	632 7483	012	531	208
N	*857		859		<u> </u>			861				863	_		• •	•••			-	865	
,Ζ	851 239 59561 652 36523 *857 676 70199 199 61781 616 38167 664 71837	70003	74887 89809		36013	44683	51013	5454I	56731	529 86719	483 9453T	471 90457	45667	490 40447	497 92431	35410	39829	50599	70429	253 58787 493 94033 865 631 37781 544 4284	_
N.,	652	673 665	623 517		- 100	520	300	326	306	529	483	\$	508	490	497	672	602	376	675	493	
.Z	239 59561 652 3652 199 61781 616 3816	694 68771 673 70003 650 73259 665 71413	550 82469 623 74887 546 83063 517 89809	502 90863 500 91193	470 96443   853 493 46691 660 36013	481 47507 520 44683	313 50039 360 51013 724 66023 348 53077	628 74279 326 54541	75041	-			855 541 42359 502 4566	181 03149 490 40447		*857 543 42221 672 35410	531 43481 602 39829	363 51419 376 50599	315 55889 675 70429	58787	698 68891
N.	199	694 ( 650 )	550	502	470 493 4594	481	313	628	624	_		-	541	181		543	5314	363	315	253	969
$N \mid N'$	851		<del></del> -		853							-	855	_		1857	}				
													_								

,—	ню		in a	) H	6	6	61	6	-	6	=	_	-	=	0	=	7	-	=	=	_	0	, m	7	
ίΖ.	4359 7591		5359	5874	6013	9742	9952	4621	5430	8338					7147	7413	7437	8406				4630	4753	9474	
N''	572		362	274	256	503	419	540	320	595					727	687	685	591			_	542	526	527	
2	925 353 54713 572 43591 271 58967 671 75913	656 78191 582 85571	927 653 39563 362 53593	565 44711 274 58741	547 45389 256 60133	391 51659 503 97429	506 68589 419 99529	929 577 43223 540 46219	573 43943 356 54361	363 53549 595 83389	126 69011	726 71399	19694 049	594 83579	931   597   41579   727 71479	577 43451 687 74131	670 77339 685 74377	648 80363 591 84061	594 83891	568 89231	510 97127	*933 587 42797 542 46309	736 70181 526 47533	722 71993 527 94747	650 80177
Ŋ	353	656 582	653	565	547	391	200	577	573	363	756	726	670	594	597	577	670	648	594	568	510	587	736	722	650
N	925		927					929						i	931							*933	)		
,.Z			42397	71287	81049	80539	37591	42829	70729	84163	94777	99877			50341	71527	74521	79087		70423	82267				
N"			580	717	633	200	672	578	721	583	519	413			406	719	677	649		727	299	591			
.2	518 94583 514 95273	512 95801 502 97001	917 541 45413 580 42397	339 55667.717.71287	556 89963 633 8 1049	490,97013 509,80539	919 647 39659 672 37591	712 71843 578 42829	670 75659 721 70729	638 80669 583 84163	572 86117 519 94777	568 87359 413 99877	520 94649	506,96731	921 565 44189 406 50341	515 47963 719 7152	401 50891 677 74521	722 70901 649 79087	560 89681	923 669 38039 727 70423	341 55691 599 82267	333 56489 591 83437	255 60101	674 75377	584 84731
N	518	512 502	541	339	556	490	647	712	020	638	572	268	520	200	565	515	401	722	560	99	341	333	255	674	584
N	*915		917				919								921					923	)				
.Ζ	899 567 42569 632 39769 *907 744 68501 398 50587 *915 518 94583 351 53609 556 43579 666 74699 380 52027 514 95273	56167 58453	70039 89821	90439	95989	300	04007	575.04751	2003	42697	44587	71983	78007	80527	85639	555 89533	58693	77347	85933	86467		20966			
N".	398 380	332	717	537	207	1	27.7	37.5		574	556	705	647	633	573	555	270	657	573	567		413			
Z	744 68501 398 5058 666 74699 380 5202	644 78041 332 56167 630 80627 270 58453	626 81083 717 70039 588 82349 551 89821	576 84011 537 90439	504 80243 507 95989	1666	909 527 40523 577 64007	C/40 C/C 6061/40/		911 533 45989 574 4269	383 51749 556 44587	355 537 17 705 7 1983	333 56237 647 78007	000 75239 033 80527	566 86369 573 85639		913 557 44621 270 58693	531 46181 657 77347	337 55763 573 85933	716 70793 567 86467	642 79481	915 647 39323 413 99607	746 68813	718 70709	664 75869
Ŋ	744	644 630	626 588	576	504	1 2	770	5		533	383	355	333	9	266		557	531	337	216	642	647	746	718	664
×	*907					8	2			116							913								
,,,	39769 43579	16669					61340	24349	2000	79047	2000	61770	82407		58573	82000		46237	52561	71881	73291	529 92107	36187	42589	4380r
N'.	632 556	711					282	0 6	, ,	5 5	2	200	201		268	583		526	374	701	169	529	700	572	260
2	567 42569 632 39769 351 53609 556 43579	708 70457 711 69991 702 71483	650 76679	634 78887	550.800273	404 99881	DOT   FED 43282 382   F134	339 43403 304 31349	249 33993 342 3302	249 00069 033 79027 608 71867 625 80802	7004/	2/0 03391 303 04419	550 07003 501 02/23	500	903 661 37463 268 58573	053 36327 563 82009	529 45803	905 709 35507 526 46237	379 52067 374 52561	343 55061 701 71881	716 69929 691 73291		47717	347 54503 572 42589	327 56531 560 43801
×	351	708	65°	634	5.50	404		200	,	4 4 6	2 2	2/2	220		199	053	529	709	379	343	716		509	347	327
N							3	2	_						903			905					<b>*</b> 907		
,.Z	521 91249 513 93241	45481 62869	653 74653	561 85027		725 09031	309 03/01	1	53959	72901	75169	89671	16156	60220	71443	82750	03050	202-6		Î	44269	70351	634 78737 691 72661 *907 509 47717 700 36187	81097	
N''	521 513	524	653	561		725	200	ì	346	685	653	543	503	3	400	577	7 2	ָ שׁ			550	707	169	619	
Z		889 263 58679 524 45481 724 68903 192 62869	512 93941 653 74653			091 014 01233 725 0903			893 629 39581 346 53959	523 45893 685 72901	704 70289 653 75169	620 80651 543 89671	518 92921 503 9519	2000	540 44207 600 71442	367 52883 577 82750	736 68212 510 02050	736 60203	644 77360	2	897 517 46901 550 44269	694 72047 707 70351	78737	626 79973 619 81097	566 85049
$N \mid N' \mid$		263	512			410			629	523	704	620	518	20.	7 6	267	7.26	7.00	779		517	694	634	626	266
N	*887	889			3	5	-		893					8	660						897				

			<b>A.</b> C. C.			
1.2	370 55117 270 60091 689 78889	9511 4181	748 3687 7931	5403 5489 3963 3333	1307	1997 1941 1579
B 3	9 0 0	1 8 9	8 9 3	0 0 8 0 H	V 4 0	9 7 6
N''	7 37	3 37	7 7 1 1 68 2 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	3 61 67 67 67 67 67 67 67 67 67 67 67 67 67	7 77 77 77 79 53 79 53
2	272	244 412 598	856 082 877 624	934 781 290 594 827	933 943 043 167 331	512 453 568 568 768 976
5	630 82727 370 5511 554 94427 270 6009 689 7888	619 42443 690 39511 601 44123 378 54181 710 75983 771 70459	707 38567 718 37483 263 60821 689 79687 800 68777 605 87931 610 86249	695,39341 580 45403 551 47819 570 46489 403 52901 288 58963 361 55949 270 60331 808 68279 711 76561	692 79337 677 81307 686 79979 582 90437 576 91673 611 43319 612 43177 407 52583 272 60139	373 55127 779 69997 724 74531 721 74941 718 75689 533 97579 696 87683 444 99767
$N \mid N$	*977 630 82727 370 55117 554 94427 270 60091 689 78889	979 619 42443 690 39511 601 44123 378 54181 710 75983 771 70459	981 707 38567 718 37483 263 60821 689 79687 800 68777 605 87931 610 86249	983 695 39341 580 45403 551 47819 570 46489 403 52901 288 58963 361 55949 270 60331 808 68279 711 76561	692.79337 677 81307 686 79979 582 90437 576 91673 985 611 43319 612 43177 407 52583 272 60139	W V V Q Q 4
,2	965 588 89477 544 95087 667 503 44240 680 30733	393 44449 000 39733 706 75407 370 54493 666 81299 707 75217 596 88019 607 85909 588 89669 599 87013	570 90947 563 92203 444 98981 559 93319 969 371 54413 598 43891 790 68819 569 91297	742 73127 668 81173 971 563 46499 612 42649 545 47699 623 83059 626 82757	973 571 45707 803 67927 351 56501 767 70321 704 76511 753 71971 702 76871 751 72337 688 78653 534 96953	975 413 51413 599 88117 544 96149 571 91807 977 351 56663 626 41641 764 71249 618 42379 718 74567 404 52501
N''	089	370 707 607 599	553 559 598 569	612	803 767 753 751	599 571 626 618 404
.Z	588 89477 544 95087	5407 1299 8019	8981 4413 8819	742 73127 668 81173 563 46499 545 47699 626 82757	571 45707 351 56501 704 76511 702 76871 688 78653 534 96953	1413 6149 6663 1249 4567
	888	8 9 9 9 7	90 6 90 6	53 4 4 8 8 4 4 8 4 8 4 4 8 4 4 8 8 9 8 9 8	4 1 2 2 2 4 5 4 5 4 6 4 6 9 4 6 9 6 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	13 5 44 9 51 5 18 7
$N \mid N' \mid$	55 5	<u> </u>	2 4 8 7	7 1 2 2 2	20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 20 2	77 33.
	<u>8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 </u>			!		1*
1,2	674 39607 344 56629 284 58579	701 74797 659 81331 607 84211 557 92233	535,95971 695,76129 691,77191 543,94543	44491 61099 62827 68389	701 75577 691 77521 669 80329 556 46807 286 58537	59221 78919 85819 92683 35509 59083
N.,	674 344 284	701 659 607 557	535 695 691 543	2588 254 208 789	701 669 669 286	280 605 559 282
Z	957 257 60761 674 39607 *965 588 8947. 586 88817 344 56629 544 9508			961 693 38501 588 44491 373 53813 254 61099 367 54647 208 62827 365 54659 789 68389	676 79379 691 775377 676 79379 691 77531 669 80329 963 697 38183 556 46807 617 41651 286 58537	587 44090 280 59221 754 71147 679 78919 694 77153 605 85819 584 89939 559 92683 *965 696 76943 756 35509 618 83399 282 59083
Ŋ	586		507 758 708	562 593 373 367 365	576	594 594 596 596
2	957		959	196	963	965
,Ζ	4197	4 133 14 133 10779	2451 6171 4821 0239	613 82549 597 85627 598 42859 590 43291 547 94057	521 97117 701 74449 609 83701 579 89797 551 93307	
N	7 26	57 8 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8	52 4 4 6 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1 8 1	9 8 4 9 9 4 4 7 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	51988	17 9 04 4 16 5 8 2 5 7 7
7 2	*945 652 81131 697 74197 586 86753 047 581 44171 556 45673	391 52631 366 54133 686 76259 657 80779 666 79427 545 93979 596 85523	949 265 59753 600 42451 698 74471 552 46171 562 90407 695 74821 530 96059 661 80239	524 96461 613 82549 597 85627 598 42859 599 43291 547 94057	953 676 78137 701 74449 664 80153 609 83701 579 89797 551 93307	55 351 55901 604 42403 752 70481 552 46681 678 78059 416 50857 594 86201 282 58771 524 96989 687 77431
N'	3686	567.55	22 8 2 2 9 9 9 9 9 9	<u>4</u>	- 19.4 8.78	12 76 18 78 14 96
N	15 6	<u> </u>	5 5 5 5		- <u>83</u>	52 35 67 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
			<u> </u>	951		
,Z	44110	597 83791 597 87793 577 87793 553 90583	77263 77263 77641 83089	541 93601 394 51949 388 53579 725 72271 575 88801	553 91099 348 55621 667 78277 601 83737 595 84871 533 94483	398 51607 655 80629 548 46477 769 69019
N'.	147	597	573 573 501	388 725 575	553 501 595 533	398 655 548 769
Z	933 578 86993 566 89909	538 94007 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	651 40283 358 54577 359 54377 675 77263 277 58727 673 77641 718 73019 601 83089	604 82787 541 93601 939 409 50867 394 51949 388 52579 725 72271 575 88801	553 91099 941 677 38699 348 55621 603 41627 667 78277 593 42683 601 83737 263 59699 595 84871 604 82997 533 94483	\$42 93923  943 678 77543 398 51607   655 80629   45 397 51827 548 46477   656 80687 769 69019
N.	78 8 66 8	38 9 2 2 2 3 3 8 9 2 2 3	51 4 59 5 77 59 5 18 7	8 60 5	03 4 03 5 04 8	78 7 78 7 97 5 56 8
N	33.5	5 23	, 0 w 4 L	9 4	1 0 0 0 4 0	45 6
	ة اة *	ń [6	რ 	6	اة <u> </u>	9   8

	6	0.0	0 0 0		н.	- 16	9.6	9	6	1 6	0.0
,.Z	60589	58549 89899	42139 60013 71209				58789 99787		80808	50773	
N'	274	302	646 282 797		374	376	302	803	711	448	749 651
,Z	59981 93629 95783	51869 83663	41621 46679 55589	76603 80147 82571 87281 88799 95369	88547	42407	71237 87539 96821	58733	80207 87107	44357	51929 82793
N	281 586 568	427 650	653 589 377	720 710 658 630 624 572	626	647	800 632 562	303	714	620	431
N	*1015	1017	6101		1021	1023		1025		1027	•
Z		71389		45751 54121 55147 73063 74071		55603	39499		85711 86509		42391 51913
N"		787 743		592 390 382 773 745	571	374	714	731	637 629		642 426
.Z	46451 85103 96581		76929 79493 85931 86927	38603 52553 78479 84869		42701 52379	38237	53049 67931	71963	83477	44501 54347
N,	583 634 554	776	710 708 632 624	727 417 714 638		637	782	836	784 654	<b>6</b> 48	621 389
N	*1005	2001		6001		101	1013				*1015
Z	51829 94651 99643	43753	6696	54829 68311 75853 83047 95803	37579	79201 81043		74611			51853 53653
N''	418 563 449	616 723	547	380 821 725 641 559	732	705	388	737			422 392
Ζ,	77351		88259 92297 99611	46187 78779 82781 95621	56747	•				95717	43403 44651
N,	716	295	612 580 450	581 706 644 560	359	:	615	301	580	562	623 613
N	995	266		666	1001		1003				*1005
Z	71089 86461		50581 54877 80611		38611	70381 77383	90703		52627		82633
N".	773 613		434 376 687		714		585		410	3 8 8	641
,Ζ		85829 99563	43427 43427 46811	55469 55009 74897 80819	38261		69941 71129 79697	88337	41771		
Ŋ		620 446	627 613 571		717		784 776 696		635		
N	987		686		166				666		

,2			77509 83689		92767		63401		43717
N''	631	680 589 678	773 687	622 751 659	625		560		668 847
Z	74381 77069 90473		55733 85703 86981	776 77201		37589	70853 83537 85781 86501	89051 92237	41813 84719
N	788 772 634	688 652 630 624	397 676 666	176		789	846 690 678 670	628	691 684
N	101	1073		101		6201			1801
.2	51637 72859 82837 87541	97003 50539 68821 70573	84199 87649 96553	42643 46747 47797	53923 69931	52069 60763	59053 73141 76231 91771	47701	92623 94603
N"	811 681 681	581 466 865 835	655 585 585	670 614 596	841	446 286	312 817 773 625	600	621
2	52517 75323 87869		80039		91901	83417	39251 46439 96857	43613	77291
N	437 772 652	623 822 818	740	651 393 646	022	682	755 619 586	661	770
N	1057	1059		1063		1065	1067	1069	
,2	43189	53611 68917 72229 92083 92647	59797 87427	38569 46549 68443 74551	89017		44179 59029 80347 82729 86179	58027	
N"	648	408 851 807 611 607	292	756 608 861 771	643	615	646 308 733 679 655	322	667 613
2	45869 70373 72923	70061 95549		70937 74357 95633	70877	76667 95189	72503 95723	40277	
N.	611 822 800	826 586		822 772 588	824	760 592	590	733	744 676
N	1043	1045	1047	1049	1051		1053	1055	
.2	71899	46933 52009 54547 72871 74293	51817		809 71353		74959 79549 80107 82261 84457	78139 89521	52057 56659
N''	797	594 432 394 791 759	434		809		759 729 723 673 657	737	436 374
Z	68909 74027 77489 84431	68171 70439 84857 89561	70841 79043 81203	84509 89009 99929			9906	54563 75539	51899
N'	838 760 740 652	848 812 652 628	810 728			303	6 6	397	437
N	1029	1031	1033		1035	1037		1039	1041

N	N'	Z	N"	΄.Ζ	N	N.	2	N.	2	N	N	2	N.,	,2	N	N,	Z	N.	,,Z
*I081					1095			617	95143 96931	1109			802	38317	1123	870	870 71861	711 647	84499 9387 I
1083	1083 778	77621	180	55717	1097	795 840	38069 73133	680 803	43411		704 676	84059 89393			1125	886	70451	416	
,			793			778		667	89689	1111	640	93893	685	19648				823	
1085	780	76253	839 701 627	72139 82507 93427			84143	619	94951	1113	872	16604	859 815		1127	824 786	75209 80051	199	91591
1087	850	71261 833 72997	833	72997	1099	307	99497 59723 88463	865 843	70549				803 787 653	76873 78649 91513	1129	691 796 778	44453 78941 81230	889 831 817	70489 74317 76423
	610	95441 95441	613	94999				797	75997	1115	807		814	37717		652	93563		
1089 686	989	85469	322 673	58711 87421				773	79399		689	43721	426 879	54583 70297	1131	433	54419	827	
1601	774	78101	798	37549	-			681	86929	1117	708	84347	648	46441					
				42409 72883	1011	403 616	56171 95813				989	88169	721		1133	313			
	638	92051	600 601	83311 96667	1103	647	45779	799	76261	6111	706	85061	863	863 72469		786		3	93011
1093		74441	949	43573			89519		87613		-		811			782	85361		
		75401 84503	785	77059 89203		040	91781	609 609	93553 96469	1121	788	71009	867	72103		702	86969		
		89819 91019			1105	683	43661	639	93253		648	93329	865 781	72421	1135	700 664	92003	1 41	94771
					1107	964	1107 796 77513	655	90523				719	83101		512	99689		
*1095	646	90833	418 679	54667 86767				619	93997 95929				717	83497 94789	1137	698	698 88241	434 659	54679 93103
						-													

1 . 11		,,2	N	ķ	2	N,	Z				N.	,,2	N			N.	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
96557 722	~		1157			116		1111	526	99923			1189				
625		91837				669 669	90097	1173	343	59051	448	54631		746			
46757 722 85037 929		42349	6511	487 888	51803 73037		841 75883							692	92243	689 655	93139 96661
92831 827								1175			751	83653	1191 842 740	842	78707 86351		
1143 443 53927 338	~1°	5 89503 3 58699		728	88643			1177	745	42293 684 84047 685	684	46261	1193	493 844	52571 78569	438 831	55987 80221
	901		1911	730	85733	847	75541		728	87119	ŝ	10440		756 752	84401 85259		
39509 7	708	43609	1163	737	42197		825 78121	6411	743	1179 743 42677 722 44389	722	44389	1195			462 693	54091 92941
	482	1-		900	71987			-					1 199	877	37547	458	5460I
_	474		1165	843	38231	734	42709	1181	850	75079 093	693	91453		768		322	
72869 8	813	3 78283		724	86291	911	71257		999	95003 651	651		1201	864		192	
	697		1167	493	51539 490 80021 841	490		1183	824 746	80231 85199	971 915			762	84131 673 05420 650	673	95707
46229	723	85837		662	94379 721	721	87523		889	92381	913	72379	1203	884		881	
	675		1169	920	10501	725	86689			94/93	831	79657		742	87887	865	
86171	673			856	74861	723	87151	_		}	821	80749				731	89779
	663	93133		814				-			733	86959				709	90997
51563	2 2	_!	11.31	970	75620	743	84121	1185	722	8950I	929	16807   626	1205	467	53939	881	75223
	2 6		:	722					999	95093				778			
	651			654				1187	824	824 80681 734 43597	734	43597		206	91703		

1	м	ч н	н б	١a		-	l۳	3	7 1	0	6	7	н	6	6	н	3	7	6	-	н
'.Ζ		88771	42331 95959	54709	_	_	42283	43867 86413	89227 90901	54949			9390 I	72109	78439	90841	96043	86587	_	86491	78511
N''	482	771	798	482			802	782 787	747	482	745	733	731	983	106	751	711	164	897	793	905
2	96587		9454I 99989	77213	85109		54437	79319 82613		75149				76343		87587		54617	83339		92867
Ŋ	694		714 566	9 IO	798	742	485	892 818		928				920	814	786		487	818		742
N	1259		1261	1263	1265		1267			1269				1271	1273			1275	1277		1279
,Z	72493	24.29.2		ŀ	79093 88261	92347	93559	70981 95629	95419					09317	75307	87121	88861	85297		85549	86353
N.,	957	;			873 763	723	719	977	701		458	985	787	3	803	775	767	164		164	781
2		77261		95507	85007 93911		1245   772   86771   719   93559		72101	70307	772 87797				/3043 85691	,		19191	80537	58684	79433
N	343	894	728	စ္ပ	782		772		996	904	772				788			884	872	988	884
N	1241				1243		1245	1247	1249		1251				1233			1255		1257	
,2	711 92707	76207		70951	84919 85201	75337		94637 99733	80473	74323		84247	85597	9546I		85843	-		80233	91459	19966
N''		889 863		963	777	899	763	555	857		707	783	777	693		777			863	727	559
2	1225 708 93383	77243 85577	89363 91943	74843		75227	75557	70097	952 72269	84053			:				85001		93131		
, X	708	884	748	8		900	898	9	952	1	768	716			026	780	778	698	718		
N	1225	1227		1229		1231			1233	1235					1237				1239   718		
,,2					80341		09527	78691	88843	94573			71011					80077			
N".				:	843	777	739	859	745	580			955					849			
Z	43853		70487			71387	74691 82763	79589 859 78691				91997		91253		93287		54059	80489		
ķ	745	702	952			948	782	854 686	856	778	710	712	752	716	755	200		473		754	718
N	1207		1209	:		1213		1215	1217				1219		1221		1223				

,2	377	557	303	243	339	3	963	30,7	8	; [	269			147	70003	2		161	1010	24.3	347	271
	837   87877 761   95527	83557	94903	3 72043	5 88339	3	765	753	928		87697	_	_				_	894	1067 72019	000 76243	771 95947	78571
N".		869	767	105	83.5	3	983	997	100		845	_		995	993	50		839	106	ő	12	226
2	1357 800 90917	992 75479 869	93091	_			1363 1068 70949 983 76963	1365 836 88721 997 75307	1367 774 04547 703 02800				77171				1375 992 76883	1377 : 796   93323   839 : 89491				
N.	800		3				1068	836	77.4				988				992	964				
×	1357	1359		1361	)		1363	1365	1367		1369	1371		1373			1375	1377	1370	n 2		1381
΄.Ζ	76519	78697	86341	91237		85453	90931	76579	75211	77137	92791	77017	20066	95911	831 87517	78229	78553			70300	£262/	973 77491
يز	963		827	783	.	841	787	967	626	965	777	296	905	751	831	955	953			1065	}	973
2	1329 838 85229			1044 71081		842 85133	_	90989 967	1339 1056 70229			19826		1343   946   79139   751   95911				27079	91823	84442	834 87671	
*	838	944		1044	926	842	-	788	1056	•		178		946				3	700	928	834	
N	1329			1333	3	1335	_	1337	1339		_	1341 778		1343	1345	1347			790 245		1331	1353
,2	78157	74419	79309	59443	93739	2006	817 86371	42667	84793	08467	71347	963 75403		85213	43627		76369	83269	44203	90787	94873	
N,		963	923	799	757	3	817	839	833	730	1507	963		833	818		959	849	814	783	749	-
2	80309 927 85667 755	84761   963   74419	1311 838 83639			12,00	01373 817 86371	54629	80747		745E   1501   11927	76091	89399	1321   966   75161   833   85213	503   54869   818	95027	95339 959		54101   814   44203	5458I	79091	
.v.	910	828	838				772	503	914		3	926	804	996	8	746	744		513	207	932	744
N	1307	1309	1311		1313		1315	1317		_		,		1321	1323	•	1325 744		1327			
,2	937 75079 929 75991	745 92377	87973			86311	86197	89371	95569	033 77230	85081	46507	80599	83299	04559	18	6/100	1019 71059	44371	46411	74587	77029 86293
N".	937	745	791			801	803	787	725	033	817		106	831	770			1019	798	756		941 811
2	80567 95651		1283   744   92957   791   87973		6008		42323 803 86197	77267	89459   725   95569	74003	93497	51797	76103	86813	94013	1000	754 92693		51893			_
N	890 718		4 8 8		-		817	930	788	048	748	545	940	804	734		754		547			
N	1281		1283   744	COL	1289   824		1291		1293	1205		1297			_		9921	1301	1303		1305	

_	_	-	_	_			-	Т	_	. 1	. 1	<del>-</del>	_	ř	-	_	_	_	_	_	_	-	_
,2	i		19426 646	1223: 76597	87691		1205 78517	1970 100	1251 74023	84580			91573	1251 76507	1075 86629	93493					76651	87223	1015 92581
N"			626	1223	1045		1205	2	1251	200			1013	1251	1075	1001					1259	1079	1015
2	1669 1022 88811	1679 1064 84389	1687  1220   76631		1693  1032  89387  1045  87691	1695  1048  87257				1/03   1/3-2   1/43-3	1 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	964 95531	1727  1222   78509  1013   91573				18164	1076 86711	1737 11072 87767	1739  1272  75083	1741  1364  70997  1259  76651	1745 1068 88919 1079 87223	
Ŋ,	1022	1064	1220	-	1032	1048				1228		964	1222	-			1222	1076	1072	1272	1364	890 I	
N	1669	1679	1687	1691	1693	1695	1703	1706	1700			1719	1727	1720	1733	2	1735 1222		1737	1739	1741	1745	1747
,2	87853		1001 86857	84313	76213	991 88873	1173 76441	84697	917 94933	77101						1042 84787	10/10	6//39		1199 76471	1015 88681	957 93529	1049 85429
N.	995		1001	1025	1173	199	1173	1027	617	1177			-		_	3		2	-	1199	TOIS	957	1049
2		936 92789		934 93491 1025 84313	1619 1004 86729 1173 76213			952 91571 1027 84697	1625  1172   76949	1633  1000  88793  1177  77101	1637 1002 88883	1641 1198 75437	1004 69003	1043 1010 87179	1647 1160 79193	1010, 00499	0,000	1051 1050 03243 1019 07739	91433				
N,	984	936		934	1004			952	1172	1000	1002	1198	100	TOID	1160		١	5	920		-		
N	1613		1615	1617	6191		1621	1623	1625	1633	1637	1641	,	1043	1647	9.9.	613	1021	1653	1657			1665
,,Z	983 85669	987 85159	91291			18128 696		20/25	1100 70272	075   87077	//=/5	971 00443	1159 75181	919 93001	983 87511	919 93481	973 89269			75109	1011 85147	977: 89431	989 88237
N.,	983	186	616			696	196	<u>.</u>	1001			971	1159	919	983	919	973			1111	101	977	989
.Z		77093	1102 79259	986 85427	88853	1567 1130 77003	992 84533	1930 09237	_		000	920 92489			984 87149			10901	907 43091	928 93077 1171 75109			
N		1128	1102	986	9/8	1130	992	200				920			984			1					
N	1563	1565 1128				1567		1635	3/51	57.7	//67	1503	1585		1881		1595	203.	1297	1091	1603		1191
,Z					901 90793	887 92893	890 01303			975 84181	949 87589	696 85717			907 91867		ROSET	02857			875 95413		
N".					106	887				975	949	696			206		1070	100					
Z	940, 86939	892 91283	890 91691	940 87407			1531 1078 70283	040 88523	91757			1541 1128 74933	/6006	872, 94889		946 00937	084 84427 1070 80557	/244		1555 1144 74411 994 83621	986 84809	008 02333	906 92717
N'		892	890	940	_		1078	040	898		_	1128	<u>.</u>	872	9111	0 0 0 0	18	h		994	986	88	906
N	1517	1519		1521	1527	1529	1531	1533		1537		1541		1545	1549		1663	255		1555	1559	1561	,

×	N,	2	N"		N	Ν.	Z	N.,	,.Z	N	N.	Z	N"	7.,2	N	א	Z	N.,	.2
1749	:		1027	1027 91309	1843	1130	1823 1130 86837			1889	-		1601	1091 93523	2059	! !		1277	1277 86677
1751			1269	1269 76123	_	8118	1118 88469			1909			1111	1171 88411				1261	88741
1757  1086 87323	1980	87323			1825			1283	1283  79531	1913	-		1811	1181 87643	2069			1267	1267 88789
1763   1276 76379	1276 7	6289			1829			1131	1131 87187	1927	1182	1927   II82  88427			2077	1282	2077 1282 87701		
1765	-		1117	1117 84631	1831  1158  84827	1158	84827			1929	1192	1929   1192   87443			2083	1288	2083 1288 87221		
1769	-		1097	1097 86743	1841	_		1167	1167 84307	1931  1222  84659	1222	84659				1276	1276 88661		
1781	-		1001	1001 88663	1843			1129	1129 88651	1939	1222	1939  1222  85331			2089	1322	2089 1322 84653		
	-		1043	1043 91813	1847	1140	1847 1140 87719 1301 79147	1301	79147	1943	1140	1943  1140; 91499						3	10800
1785 1102 87629	1102 8	87629	_			1082	1082 91733	-		1040			11131	1131 02770					2000
1793 1052 91493	1052 5	31493			1861	1140	1861  1140: 88667  1177  84811	1177	84811	1057	1210	1957  1210 87251			2131			1343	1343 85333
1797 1102 88493	102	38493			1865	1084	1865 1084 92459			1901			125	1241 84640	2141	_		1327	1327. 86869
1803  1106, 88397	100	38397	-		1867	1160	1867 1160 86357			0901				1917 87937	2143			1325	87253
1805	-		1040	1049 92593		1154	1154 87317			200				1210 87721	2207	1364	2207 1364 87383	1	
1807 1120 86861	120				1871	1156	1871  1156  87509			19/3	- -	1			2309			1427	1427 87403
-	1060 91541	11541			1877	1322	1877 1322 79187	-		1961	200	1967 1432 7/141			2311			1429	1429 87211
1811 1148 84299	1148	84299	-		1879	1092	1879 1092 92507 1189 84691	1189	84691	100	1272	1272 86693			2317			1419	1419 88747
11 4	Bei Be	schrän	kung	Bei Beschränkung auf die unter 100.000 gelegenen Primzahlen bleiben also bis zur höchsten Coordinirten aller dyadisch	unter 1	00.00	0 geleg	enen I	Primzah	len blei	ben i	also bi	s zur	höchste	n Coor	dinirte	en aller	dyac	lisch
bezie	hungs	weise	7, (er	beziehungsweise Z'' (erste Ziffer unterstrichen):	r unter	strich	en):	101	ungerav	To Francis		in sin	72550	t, mens	,	<u>.</u>		3	(1111)
861*,	, 95 <sup>1</sup>	, 1035	, t	861*, 951*, 1035*, 1047*, 1059*, 1101, 1149, 1155, 1157*, 1191, 1195*, 1197, 1207, 1209, 1211*, 1221, 1247*, 1265,	. , 65c	Lioi,	1149,	1155	, 1157	, 1191	, 119	5*, II!	97, 15	207, 120	121	11 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	221, 12	47*,	1265,
1285,	1287,	7, 130	17, r3	1301", 1305", 1313", <u>13</u> 29, 1345", 1347", <u>13</u> 49, 1353", 1355, 1301", 1309", <u>13</u> 71, 1373", <u>13</u> 75, 1379", 1 1301 1306 1401, 1416", 1421", 1422", 1431, 1431, 1435, 1437, 1430", 1443, 1444, 1447, 1440, 1441",	13., I	329,	1345",	1347	, <u>1</u> 349,	1353°, 33. 143	, 135. 15. 14	5, 1301 137, 14	20, I3	09", <u>1</u> 37	/1, 137 445, 1,	3 , 13	175, 13. 1440. I	*15	1301.,
1455,	, 1461,	1, 146	5, <u>14</u> 6	1465, 1469, 1473, 1479, 1485, 1491*, 1495, 1497*, 1501, 1503, 1509, 1509, 1511, 1513, 1517, 1517,	1, 1479	, 148	5, 1491	**	95. 149	7*, 150	i, is	103, IS	105, I	509, 15	111, 15	13.	515, 1	1517.	
1521,	, 1523,		5, 15	27*, 15 <u>′</u>	19*, 15	33, I	535, 15	37*,	1529*, <u>1</u> 533, 1535, 1537*, 1539, 1543, <u>1</u> 545, 1547, 1551, <u>1</u> 555, 1557, eng tene* tene* tene* tene te8t te8e* te8n te8n tene tene* tene*	543, 15	187. 1	547, 1	551,	1555, 1	557, 1	561, 1	: 263*,	,269,	1571,
				7/67	6/67 (0			(6)	6. (-00	, ,		1600		. 080	1202/				

Bezeichnet man im Folgenden allgemein den Quotienten, welcher sich bei Division der Anzahl aller bis  $10^n$  vorkommenden Primzahlen von den Formen 6l-1 und 6l+1 durch die Anzahl der zu ihrer dyadischen Coordination erforderlichen ungeraden Zahlen ergibt, mit  $q_n$ , so resultiren auf Grundlage der hier berechneten Tabelle speciell für n=2,3,4,5 die Gleichungen:

$$q_2 = \frac{23}{9} = 2.5555556,$$
  $q_3 = \frac{166}{39} = 4.2564103,$   $q_4 = \frac{1227}{185} = 6.6324324,$   $q_5 = \frac{9590}{860} = 11.1511628,$ 

welche das theoretisch geforderte Ansteigen von  $q_n$  mit zunehmendem n deutlich ersichtlich machen. Um übrigens für die nächste Specialisirung:  $q_n$  vorläusig wenigstens einen unteren Grenzwerth zu gewinnen, erwäge man, dass die 78496 innerhalb der ersten Million vorkommenden Primzahlen von der Gestalt  $6l \pm 1$  bei dyadischer Schreibweise nur je dreibis zwanzig Ziffern beanspruchen, mithin die höchsten bei ihrer dyadischen Coordination in Betracht kommenden Zahlen—unter  $e_n$  den Nenner des nten Näherungsbruches der Entwicklung:

$$\frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{1}{1+1}$$

verstanden - nach einem bekannten Satze 1 der Nennergruppe:

angehören. Hievon beziehen sich 10946, 9794, 9790 und 9726 ausnahmslos auf Zahlen der Form 31, während den sechs übrigen Nennern durch die beigesetzten Zähler folgende meist zusammengesetzte Zahlen coordinirt werden:

(1) Zu 9959 durch 
$$3804:1^{2}010101010101010101^{2}1^{2} = 873811 = (53)$$
 (16487).  $4181:1^{2}0^{2}10101010101010101^{2} = 830123 = (7)$  (118589),  $5778:101^{2}010101010101010101 = 742741 = (47)$  (15803),  $6155:1010101010101010101^{2}01 = 699053$  als Primzahl  $Z'$ ,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vgl. Simony a. a. O. S. 241 – 245.

### (2) Zu 9815 durch

 $3749:1^{2}010101010101010^{2}101^{2} = 873803 = (7)(43)(2903),$ 

 $3804:1^{2}010^{2}101010101010101^{2} = 862891 = (23)(37517),$ 

 $6011:10101^{2}0101010101010101 = 709973 = (11)(19)(43)(79),$ 

 $6066:10101010101010101^{2}0101 = 699061 = (11)(103)(617).$ 

### (3) Zu 9791 durch

 $3740:1^{2}010101010^{2}1010101^{2} = 873643$  als Primzahl Z'',

 $3741:1^{2}0101010^{2}10101010101^{2} = 873131 = (7^{2})(103)(173),$ 

 $6050:101010101^{2}010101010101 = 699733$  als Primzahl Z'',

 $6051:1010101010101^{2}01010101 = 699221$  , Z'.

### (4) Zu 9789 durch

 $3736:1^{2}010101^{2}010101010101^{2} = 875179 = (43)(20353),$ 

 $3739:1^{2}0101010101^{2}010101^{2} = 873899 = (13^{2})(5171),$ 

 $6050:10101010101010^{2}1010101 = 698965 = (5)(43)(3251),$ 

 $6053:10101010^{2}1010101010101 = 697685 = (5)(139537),$ 

### (5) Zu 9781 durch

 $3715:1^{2}0101^{2}01010101010101^{2} = 879275 = (5^{2})(35171),$ 

 $3736:1^{2}01010101010101^{2}0101^{2} = 873835 = (5)(174767),$ 

 $6045:1010101010101010^{2}10101 = 699029 = (19)(36791),$ 

 $6066:101010^{2}101010101010101 = 693589 = (13)(53353).$ 

#### (6) Zu 9349 durch

2584:130101010101010101012 = 961195 = (5) (192239),

 $3571:1^{2}010101010101010101^{3} = 873815 = (5) (174763),$ 

 $5778:10101010101010101010^{2}1 = 699049 = (13)(53773),$ 

 $6765:10^{2}1010101010101010101 = 611669 = (113) (5413).$ 

Der Quotient  $q_6$  besitzt mithin den unteren Grenzwerth:

$$\frac{78496}{4675} = 16.7905882.$$

Vereinigt man schliesslich alle hier auf re in arithmetischem Wege festgestellten topologischen Primzahlen mit den früher bekannt gewordenen zu einer einzigen aufsteigenden Reihe, so ergibt sich bei gesonderter Zählung der Anzahlen:  $\zeta'$ ,  $\zeta''$  ihrer Glieder von den Formen 6l-1 und 6l+1 die nachstehende Tabelle, in welcher jede auch in der vollständigen Primzahlenreihe unmittelbar auf die vorhergehende folgende Primzahl durch ein Sternchen gekennzeichnet ist.

ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P
1 2 —		5 7* 11* 13*	24 25 26	23	587 593* 599* 601* 613	48 49 50	44 45	1367 1373* 1381* 1427 1429*	70	67 68 69	2707 2713 2729 2731* 2741*
3 4 - 5		23* 37 41* 43* 47*	27 28 29	25 — 26	617* 619* 647 659 661*	51 52 53	46 47	1447 1451* 1483 1499 1571	72	70 71 72 73	2749* 2777 2791 2797* 2803
6 - 7 8	-6 7 -	53* 61 73 83 89*	30 31	27 ————————————————————————————————————	673* 677* 683* 691* 727	54 55	48	1579* 1583* 1619 1621* 1627*	73 74 75 76		2837 2843* 2857 2897 2903*
9	9 10	103 107* 109* 139 149*	3 <sup>2</sup>	30 31 32	733* 739* 757 761* 809	56	51 52 53 54	1637* 1723 1741 1831 1873	77 78 79	75 — 76	2917 2957 2963* 2969* 3049
11 12	11	151* 167 173* 181	34	33 34 35	811* 821* 823* 839 853*	57 — 58	55 56 57	1907 2137 2203 2213 2221*	80	77 78 79 80	3163 3181 3187* 3209 3217*
14	13 14 15 16	227 229* 271 277* 283	36 37 38	36 37	881 947 971 991 1063	59 60	58 	2251 2333 2339* 2341* 2347*	81	81 82 83	3221* 3253 3257* 3271 3307
15 16	17	293* 307* 311* 313* 331	39 40	38 39 40	1069* 1109 1117* 1163 1171*	61 	61 62 63	2357 2371* 2377* 2381* 2389	83 84 85	84	33 <sup>1</sup> 3* 34 <sup>0</sup> 7 34 <sup>1</sup> 3* 3433* 349 <sup>1</sup>
17 18 19 20	20	347 383 397 401* 443	41 42 43 44		1181* 1187* 1193* 1229 1237*	63 64 65 66 67		2393* 2411 2423 2441 2459	86 87	86 87 88	3499* 3547 3739 3797 3947
21 22 23	21	467 547 557* 563* 571	45 46 47 —	42 43	1259 1301 1319 1321* 1327*	68 69	64 65 — 66	2467* 2473* 2477* 2633 2647*	88 89 90	89	4217 4261 4373 4397 4441

ζ'	ζ"	Р	ζ'	<i>5</i> "	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P
91 92	_	4457 4493	113	114	5479 5483*	135	137	6863 6949	_	158	9619* 9643
93	91	4517 4519*		115	5527 5557	136	138	6959*	159	160	9649* 9689
94	<del>-</del>	4523*	_	117	5563*	137	-30	7001*	-33	161	
_	92	4639 4649		118	5581 5653		_	7013* 7019*	160	162	9 <b>7</b> 87* 9803
95	93	4651*	_	120	5689	140			_	163	9811*
96	94	4663 4679	114		5711 5717*		139	7253 7297	=	164 165	9817* 9829*
97		4691*	116	-	574I		140		161		9833*
98 99	_	4703* 4751	117		5783 5801	142		7487 7499	162	166	9851 9883
<u> </u>	95	4759*	119		5807*		141	7507		167	
	96	4783*	120	_	5813*	144	i -	7529		168	9907*
100	97	4787* 478 <b>9</b> *	121	121	5821* 5843	145	142	7603 7703	163	169	9931 9941*
101	<del>9</del> /	4793		122	5851		143		164		10037
-	98	4813	122	-	5861		144	8677	165	_	10061
102	-	4889	123		5981	-	145	8887	166	_	10067*
	99 100	4903* 490 <b>9</b> *	124	123	6217 6311	146	146	8923 8933	167	170	10091
103	_	4937	125	_	6317*	-	147	9001	168	170	10391
_	101	4951	126	—	6323*	147	-	9011	169		10457
	102	4957*	127	-	6359	_	148	9013*	_	171	10459*
104	_	4967*	_	124	6361*	—	149	9043		172	10477
105	103	4969* 4973*		125	6421 6469		150	_	170	173	10567 1058 <b>9</b> *
106		5003		127	6481	_		9127		174	10597*
_	104	5011	128		6491*	148	-	9137	171	_	10601*
_	105	5179	129	_	6551	149	<u> </u>	9323	172	_	10607*
107	106	5227 5273		128	6553* 6571	150	153	9371 9397		175	
108		5303	130		6581			9413	173		10667
_	107	5323	131		6599*	152		9419*	174		10709
109	108	5333*	_	130	6691 6700	<u></u>	154			177	
110		5347* 5399		131	6709 6733	153	155	J	175		10733
<b> </b> —	109	5413	132		6761	154	-	9491	_	178	10789*
111		5417*	_	133	6763*	155	-	9497*	177		10799*
-	110	5419*	133	-	6803	156	<u> </u>		-	179	
	111	5431*	724	134	6823* 6823*	7.57	156		178		10847*
	113	5443 5449*	134	135	6827* 6829*	157 158		9551* 9587*	179 180		10853* 1085 <b>9</b> *
112		5471*	—	136	6841	<b> </b> –	157	9613	-	180	

T	ر,ع	n	נ'	ייש	D	.,	ا ,, و	D	۲,	*//	
ζ'	( )	P	-	, C	P	ζ'	ζ"	P	-	ζ"	P
<b> </b> —	181	10867*			13163	226	—	17987	251	_	19403
<b> </b>	182	10909	203	_	13397	227		18059		246	19531
	183	10939	-	205	13477	228	226	18061*	252	245	19541*
181	184	10949* 10957*			13487* 13499*	229		18089 18131		247 248	19543* 19603
	-04	95/			-3799	9		1013.		-40	19003
	185	10987	<del>-</del>	206	13591		227	18133*	_	249	19609*
182		11003	206		13613	230		18149	253	250	19661*
183	186	11057	207 208		13619* 13649	231	228	18233 18253		250 251	19687 19753
184		11087*		207	13669*	_	229	18517	_	252	19759*
185		11093*	209	_	13781	_	230	18583	254	_	19763*
- 06	187	11113*	210	208	13877	232	227	18587*	255	252	19793
186	188	11117*		200	13879*	233	231	18637 18731		253 254	19801* 19813*
187		11159	211		13967	234		18749	_	255	19819*
188		11177	212	_	13997*	235		18773	_	256	-
189	189	11353	213	210	14009 14011*		232	18787* 18793*		257 258	19891 19927
109	190	11443		211	14251	236	233	18797*	256	250	20021
190	_	11447*	_	212	14629	237	-	18803*	257	_	20051
	191	11527	214		14669		234	18859	_	259	20107
191		11549*	_	213	14779	238		18869*	258		20117
I —	192	11593	215	-	15017	239	_	18899*	259	<u> —</u>	20123*
192	_	11597*	_	214	15061	_	235	18919	_	260	20149
193		11621	216		15083	240	_	19013	_	261	20173
	193	11689	<b>—</b>	215	15541	241		19031*	260		20183
—	194	11731	217	_	15581	242	_	19037*	261		- 1
	195	11863		216	16447	_	236	19051*	262	_	20759
194		11867* 11981		217	16741 16981	243	237	19081	263 264		-
-33		9			_	-73					
196		12107	_	219	16987*		238	19141*	265	-	20921*
	196	12613 12619*	218		17189	244		19157*	266	262	20939
	197 198	12619	219	220	17321 17491	245 246		19163* 19211		263	21013 21031
197		12713	220	_	17573	_	239	19213*	267		21059*
_	199	12739	221		17579*		240	19219*		264	21067
	200	12/39		221	17579*		241	19219	268	-04	21101
<b>I</b> —	201	12889*	<b> </b> -	222	17623		242	19249*	269		21107*
198	-	12941	222		17627*	247	_	19301	270		21143
	202	12973	-	223	17707	_	243	19309*	-	265	21157
199	_	12983		224	17737	248		19319*	—	266	21163*
200	1 1	13001*	223		17747*	—	244	19333*		267	21169*
	203	13003*		225	17749*	249	-	19373*	271		21179*
201	204	13033	224		17783	250	245	19379* 19381*	_	268 269	21193
		13109	225		17837		245	19301		-09	*****

ζ'	ζ"	P	;'	<i>;</i> "	P	ζ'	5"	P	ζ'	ζ"	P
272 273		21221* 21227*	296 297		22859 22871	319	313	26437 26669	341	336	30103 30293
274	270	21269 21283	298	291	22961 22963*	320	314	26711 26839	342	337	30347 30391
275		21323		292	22993	321		26921	343		31013
276 	271	21341* 21397 21419	299	293 294	23131 23159 23173	322	315 316	26953 26959* 26987	344	338	31397 31963
	272 273	21589	300 301	—	23189* 23201	323	317	27059 27061*	345	339	33013 33461 33493
	274 275	21649 21661*	_	295 296	23203* 23209*	324	318	27091	_	34 I	34123
278	276	21673* 21683*	302	297		325 326		27107 27179 27191*	346	342	34147 34217 34381
279	-	21713	_	298		<u> </u>	319	27211	347	-	35117
280	277 278	21739 21787 21803	303	299 300	23399* 23719 23899	327	320 321	27239* 27253 27259*	348	344	35149 35153* 35227
281	279	21817* 21821*	304	301	23917 23957	_	322 323	27367 27427	=	346 347	35251* 35401
282 283		21839* 21851		302 303		328 329	-	27437 27479	_	348 349	354 <sup>1</sup> 9 35437
284 	280	21863 21871* 21911	305	304	24229	330		27509 27611 27691	349	350	35491 35507* 35509*
_	281 282	21943	306		24971	_	325	27817	_	352	35527
286 287	_	21961* 21977* 22067	307 308 309		25013 25163 25253	332 333		27851 27941 27943*	350 351	353	35531* 35533* 35537*
288		22091		_	25307	334		27947*	352	_	35543*
289	283	22123 22133 22153	311	306 307	25703 25747 25771	335	327 328	28081 28123 28307	353	354 355	35597 35671 35677*
290	285	22157* 22159*	312 313	—	25799 25931		329 330	28387 29101	354 355	333	35753 35993
_	286 287	22171* 22189*	314	308	25939 25943*	336	331	29339 29347*	356	356	36007 36011*
291 292	1 1	22229 22283	315 316		26021 26183	337 338		29363* 29387	357	357	36013* 36131
293 294		22307	317		26189*		332	29629		358	36187
294	288	22349 22381 22697	318	310	26227 26263 26267*	339	333	29863 29867* 29917	358	359 360	36251 36523 36529
	289 2 <b>9</b> 0	22717 22741		311	26293*	340	335	29989 30011*	359	361	36629 36709

5"	ζ"	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P
360		37013	385		38237*	409		39659	432	_	42221
361	—	37019*	386		38261		403	39703	_	425	42283
362		37061		382	38281	410	_	39719	433		42293*
	362	37171		383	38299		404	39727*	434		42299*
<b> </b>	<b>36</b> 3	37189	—	384	38317	_	405	39733*	435	-	42323
363		37223	387		38321*	411		39749*	_	426	42331*
364		37307		385	38329		406	39769	_	427	42349
	364	37339	388	_	38333*	_	407	39979	436	-	42359*
365		37463	_	386	38449	412	-	39989	_	428	42391
	365	37483*	389		38501	413	-	40037	_	429	42397*
366		37493	390		38543*		408	40099		430	42403*
367		37517	391	_	38567	414	_	40151	437	<b>-</b>	42407*
368		37529*	_	387	38569*	415		40169	438		42443
369		37547	392	- 66	38603	-	409	40213	_	43 I	42451*
	305	37549*		388	38611		410	40231*	_	432	42457*
<b> </b>	367	37573	_	389	38629*	<b> </b> —	411	40237*	439		42533
	368	37579*	393	_	38669	416	_	40277	440		42569
370		37589*	_	390	38671*	<u> </u>	412	40357	<u> </u>	433	42571*
:	369	37591*	394	_	38699	417	<u> </u>	40787	_	434	42643
371		37607*	_	391	38713	_	413	41077		435	42649*
372		37649	_	392	38749	418	_	41189	_	436	42667*
	370	37657*		393	38803	419	_	41387	441	_	42677*
373		37691	_	394	39019	_	414	41389*	_	437	42697
	37 I	37717	395	-	39113	420	-	41549	442	-	42701*
	372	37747*	396	_	39191	421	_	41579*	_	438	42703*
374		37781*	397		39227	422		41609		439	42709*
375		377 <b>9</b> 9	_	395	39229*	423	-	41621	443		42797
376		37811*	_	396	39241	_	415	41641	_	440	42841
	373	37813*	398	_	39251*	_	416	41659		44 I	42853*
	374	37957	_	397	39301	424		41669*	_	442	42859*
	375	37963*	399		39317	<b> </b> —	417	41719		443	43177
	376	37987	400		39323*	425	_	41771	_	444	43189*
	377	37993	401		39341*	426		41813	444	_	43223
377	_	37997*	402	1	39371		418	41941	_	445	43237*
378		38039		398	3945 I	427		42071	445	_	43283
	378	38053	403	_	39461*	<b> </b> -	419	42073*	446	I	43319
379	_	38069*	_	399	39 <b>499</b> *	428	<u> </u>	42101	447		43331
	379	38083*	404		39509	429	: 1	42131*	448	_	43397
200	380	38119		400	39511*	_	420	42139*	449		43403
380		38183	405		39563	_	421	42157*		446	43411*
381	- 1	38189*	406		39569*		422	42169*	_	447	43441
	381	38197*	407		39581*	430		42179*	450	_	43499
382		38201*		401	39607*	_	423	42181*	45 I		43541
383		38219*	460	402	39619*	465	424	42187*		448	43543*
384		38231*	408		39623*	431		42197		449	43573*

۲	ζ"	P	ζ′	ζ"	P	ζ'	ζ"	P	ζ'	ζ"	P
452	_	43577*		476	45673*	_	497	50341	_	522	53593
	450	43591	471		45707		498	50359*		523	53611
450	45 I	43597*	472	455	45737*		499	50461	515		53681
453	453	43607*	472	477	45751*	405	500	50503	516		53861
	452	43609*	473		45779	495		50513*	517		53927
454		43613*	474	_	45869	_	501	50539	518	-	53939*
_	453	43627*	475	-	4597 I		502	50581		524	53959
455	-	43661	476	-	45989		503	50773		525	54037
_	454	43669*	_	478	46027	496	-	50867		526	5409 I
456	_	43691*	477	-	46133	_	504	50893	519	_	54101*
_	455	43717	478	_	46187		505	51349	520		5437I
_	456	43753	_	479	46219	497	-	51413	-	527	54409
457		43853	479	_	46229*	498	_	51479	521	_	54413*
	457	43891		480	46237*	_	506	51511	522	_	54419*
_	458	43933		481	46261*	499		51539		528	54421*
_	459	43951	480	_	46307	500		51563	523		54437*
_	460	43987	<u> </u>	482	46309*	_	507	51607	524	_	54443*
<b> </b>	461	44119	_	483	46381	_	508	51637	525		54539
—	462	44131	_	484	46441	501	-	51767	526	-	54563
458	_	44171	_	485	46477		509	51787	-	529	54601
	463	44179*	481		46499	502		51797*	527		54617*
459	-	44189*	-	486	46507*	503		51803*	528	-	54629
460	-	44201*	482		46511*	_	510	51817*		530	54631*
_	464	44203*	483		46523*	504		51827*	-	531	54667
461	-	44249	_	487	46633	_	511	51829*	-	532	54679
462		44267	484	_	46649		512	51853		533	54709
_	465	44269*	485		46691		513	51859*	529		54713*
463		44357	486		46757	505	-	51869*	_	534	54829
_	466	44371*	487	_	46769*		514	51871*	530	-	54869
464		44381*	_	488	46771*	506	_	51893*		535	54949
	467	44389		489	46807*	507		51899*		536	54979
465		44453	488		46829	<b> </b> —	515	51949	_	537	55603
_	468	44491	489	_	46901	_	516	52057	—	538	55621
466	-	44501	_	490	46933	_	517	52069		539	55639
467	-	44621	490	-	46997	508	_	52127	_	540	55717
_	469	44647	_	491	47317	509		52313	531	_	55721*
_	470	44893	49 I	-	47339*	510		52361		541	55897
_	471	45403	492		47459	511		52391	532		55901*
468		45413*	_	492	47521	512		52517		542	55987
_	472	45481	_	493	47701	513	-	52571	533	_	56099
469	_	45497	493	_	47717		518	52627		543	56101*
<b>—</b>	473	4554I		494	47917	514	_	52691		544	56149
	474	45613		495	47947	<b> </b> —	519	52813	534	_	56171
470	_	45659		496	47977		520	52951		545	56599
	475	45667*	494	_	48299		521	53419	535	_	56663

ζ'	۲"	P	ر ۲	5"	P	ζ,	ر" ا	P	**	<b>;</b> "	P
536		56747		568	70891		593	73387		614	75979
330	546	58027	559	300	70937	579	393	73907	боз	-	75989
	547	58057	560		70949*	3/9	594	74323	604	_	76079
	548	58543		569	70951*	580		74381	_	615	76123
	549	58549*		570	70957*	581		74411	_	616	76129*
1								• • •			
	550	58573	<b> </b>	571	70981		595	74413*		617	76147*
537		58679	561		70991*	_	596	74419*	_	618	76207
	551	58693	562	-	70997*	582	-	74441*		619	76213*
	552	58699*	_	572	70999*	_	597	74449*	605	_	76253
	553	58711*	_	573	71011*	583	_	74453*		620	76261
538	_	58733	_	574	71023*	_	598	74587		621	76333
539	-	59051		575	71059	584		74597*	606		76343*
	554	59053*	563		71069*	<b> </b>	599	74827		622	76369
540	-	59561	564		71081*	585		74843	607	<b> </b>	76379*
541	-	59723		576	71089*	586		74903	_	623	76387*
542		59753	565		71261		600	74923*	608		76403*
3.	555	59797	-	577	71317	587		74933	_	624	76441
543		59957	566	-	71327*	<del></del>	601	75079	бод		76463*
544		60077	567		71333	588		75083*		625	76471*
545	-	60317	568	-	71339*	_	602	75109*	610	<u> </u>	76487
546		60761		578	71341*	589		75149	611		76493*
1	556	62299		579	71347*	590		75161*		626	76507*
_	557	62773	_	580	71353*	<del></del>	603	75181		627	76519
	558	67927	569	_	71387		604	75193*		628	76579
547	_	68171	_	581	71389*	59 I		75209*		629	76597*
1 • 1											
	559	68437		582	71479		605	75211*	612		76631
548	-60	68909	570	-0-	71861		606	75223	613	-	76649*
1 '	560	69031		583	71899	592	500	75227*	_	630	76651*
549		70061		584	72019		607	75253	614	631	76717
550		70229		585	72043	-	<b>6</b> 08	75307	614		76847
	561	70309	57 I	_	72101	<b> </b>	609	75337	615		76883
55I		70313*		586	72109	593		75347*	616		76907*
552	-5-	70379		587	72139*	594		75353*	617		76943
	562	70423	572	-00	72269		610	75367*	618	-	76949*
553		70451		588	72277	595		75431	_	632	76963
554	_	70487	573	_	72341	596	_	75437*	619		77003
	563	70489*	_	589	72367	597		75479*		633	77017*
	564	70501*	_	590	72469		611	7554I	620	-	77093
	565	70549	_	591	72493	598	' '	75611	_	634	77101*
555	_	70571*	574		72503	599	_	75617*	621	_	77141
556	_	70823	575	-	72533*	боо	<u> </u>	75629	622		77201
557		70841*	576		72617	60 r	-	75653	623	-	77213*
_	566	70843*	-	592	72997		612	75883	624	_	77237*
	567	70867	577		73043	_	613	75931		635	77239*
558		70877*	578		73079	602	_	7594I	625		77243*

ζ'   ζ'	"   P	5' 1 5"	P	ζ'   ζ'	'   P	<i>z</i> ' - <i>z</i> ''	P
626 627 627 63	- 77351 - 77417	646 — 647 — 661 — 662 648 —	79397 79451 79531 79579 79589*	672 — 673 — 68 674 —	84391* - 84407	703 694 704 705 695	86183 86197* 86323
630 630 631	77491 - 77513 - 77543	663 664 665 649 666	79669 79693 80173 80231 80233*	675 — 676 — 68 677 —	84437 - 84443* 82 84499	696 — 697 — 698 — 706	86423 86441* 86477
632 — 64 633 — 64 64 64 64	- 78101 78121* - 78137* 1 78139*	650 — 651 —	80309 80471 80473* 80557 80567*	68 678 679 68	84 84631* 84649* - 84653* - 84659*	707 708 709 700 710	86629* 86677* 86689* 86729
	78163* 78229 78259	653 — 654 — 655 — 669 656 —	80681 81233 81293 82981 83117	680 681 681 682	- 84701* - 84761	701 702 703 711 704	86771 86837 86843* 86857 86861*
- 64 - 64 635 - 64 - 65	78487 - 78509 19 78511*	657 — 658 — 659 — 660 —	83177 83219 83243 83273 83339	683 — 684 — 69 685 —	- 84827* - 85061	712 705 706 707	86869* 8 <b>69</b> 39 87133 87149* 87179
636 — 65 — 65 — 65	78571 78643	662 663 663 672	83341* 83417 83557 83561* 83563*	686 — 69 69 687 69	85159* - 85193*	714 715 716 708 717	87187* 87211* 87221*
637 638 639 640 —	- 78707 - 78989 - 79031 - 79139 55 79147*	664 — 665 — 673 666 —	83609 83639 83641* 83653* 84053	688 — — 69 689 — — 69	85303* - 85331	709 - 718 710 - 719 711 -	87253* 87257* 87277*
641 — 65 — 65 642 — 643 —		675 667 667 668	84067 84121 84137 84181 84263	— 69 — 69 690 — 70	85429 9 85453 85469*	720 712 721 713 714	
644 — 65 645 — 66	79279* - 79283*	669 — 678 — 679 — 670 — 671 —	84313* 84317*	70	85669 85717 85733*	722 715 — 716 — 723 — 724	87491* 87509* 87511*

ζ'   ζ''	P	ζ'   ξ	"   P	ξ'   ζ''	P	<i>t'   t''</i>	P
717 — 718 — 719 — 725	87623 87629* 87641 87643*	735 <b>-</b> 736 <b>-</b>	42 88789 88793* 88811 43 88813*	755 756 — 757 — 758		772 770 771 —	93337 93383 93491 93523
726	87691 87697*		44 88843 — 88883	757 759	91811	774	
720 — 721 — 728	87701* 87719* 87721*	738 -	88919 45 88993 88997*	758 759 — 760	92333 92459	772 773 773	
729	8 <sub>77</sub> 39*	740 -	46 89017 — 89261	760 —	92507*	774 —	9454 <sup>1</sup> 94547
723 — 724 — 730 — 731	87797 87833 87853* 87877	741 - 742 - 743 -	47 89269* — 89381 — 89387* — 89417	762 763 764 765	92569 92581*	777 776 777 — 778	94811 94889
725 —	87911 87917*		48 89449 89459*	761 — 766	92753 92761*	778	95021 95063
732 733 734	87961 87973* 88117	745 -	49 89491 89501* 90281	767 768 762		780 — 779 780	
735 727 728 — 736 — 737	88237 88241* 88397 88411* 88423*	747 -	50 90523 90731 51 90793 90833 90917	763 — 769 764 — 765		781 — 781 — 782 — 783 — 784	95581*
729 — 730 — 731 — 732 — 738	88427* 88493 88523 88547* 88651	750 - 751 - 7	90971 90989 52 91237 53 91243*	766 — 767 — 768 — 771 769 —	92987 93077 93131 93253 93323	782 783 785 784 786	96557 96587 97003 97157
739 740 733 734 741	88657* 88663 88667* 88721		54 91303 55 91309* 91433 91453* 91493			1 -	

Hienach befinden sich unter den bis 100.000 vorkommenden Primzahlen nur 1570 topologische, von welchen 635 isolirt, dagegen 935 Primzahlen als Glieder von Zahlengruppen auftreten. Es enthält nämlich die in Rede stehende Zahlenreihe 192 zweigliedrige, ferner 67, 37, 18, 12 drei-, vier-, fünf- und sechsgliedrige Zahlengruppen, sowie ausserdem in 19301, 19309, 19319, 19333, 19373, 19379, 19381; 38183, 38189, 38197, 38201, 38219, 38231, 38237

zwei siebengliedrige, in

42101, 42131, 42139, 42157, 42169, 42179, 42181, 42187; 79139, 79147, 79151, 79153, 79159, 79181, 79187, 79193 zwei achtgliedrige, endlich in

87179, 87181, 87187, 87211, 87221, 87223, 87251, 87253, 87257, 87277

eine zehngliedrige Zahlengruppe, während bekanntlich in beiden arithmetischen Primzahlenreihen von den Formen 6l-1 und 6l+1 schon sechsgliedrige lückenlose Zahlengruppen relativ selten vorkommen.

Anderseits umgrenzen je zwei aufeinanderfolgende topologische Primzahlen, zwischen welchen irgend eine Potenz von 2-etwa  $2^p$ -gelegen ist, schon für mässige Werthe von p individuenreiche Gruppen rein arithmetischer Primzahlen, wie aus nachstehendem, deren jeweilige Anzahl:  $k_p$  nebst beiden topologischen Grenzzahlen:  $P'_p$ ,  $P''_p$  für p=5, 6, ...16 liefernden Schema hervorgeht:

p	$P_p'$	$k_p$	$P_p^{\prime\prime}$	p	$P'_p$	$k_{p}$	$P_{T}^{\prime\prime}$	p	$P_{P}'$	k <sub>p</sub>	$P_p^{\prime\prime}$
5	23 61	2 2	37 73	9 10	467 991	9			7703 15581		8539 16447
7 8	109	4 7	139 271	11	1907 3947	29 28		15	31963 62773	109	

Hienach besitzt die Reihe der topologischen Primzahlen auch hinsichtlich ihrer Vertheilung über die vollständige Primzahlenreihe einen eigenthümlichen Charakter, ohne dass sich jedoch vorläufig die Frage entscheiden lässt, ob das einzige allen topologischen Primzahlen gemeinsame arithmetische Merkmal eine selbstständige zahlentheoretische Untersuchung derselben ermöglicht? — In diesem Sinne musste sich die vorliegende Arbeit darauf beschränken möglichst viele für weitere Forschungen verwerthbare specielle Resultate festzustellen und hat ihren Zweck erfüllt, wenn sie wenigstens zur Aufsuchung mathematischer Beweise für jene topologisch-arithmetischen Inductionsschlüsse angeregt hat, deren empirische Grundlage erst durch die hier mitgetheilten numerischen Ergebnisse in allen Details verificirt worden ist.

### XVI. SITZUNG VOM 14. JUNI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung I, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner übergibt eine Abhandlung: »Über eine optische Reaction der Bindesubstanzen auf Phenole«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung vom Adjuncten der Prager Sternwarte Dr. R. Spitaler unter dem Titel: \*Bahnbestimmung des Kometen 1851 III\*.

Der Secretär Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: »Die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel und auf den Berggipfeln überhaupt«.

### XVII. SITZUNG VOM 21. JUNI 1894.

Herr Prof. H. Höfer an der k. k. Berg-Akademie in Leoben übersendet eine Abhandlung, betitelt: Die geologischen Verhältnisse der St. Pauler Berge im östlichen Kärnten«.

Herr Prof. Dr. Karl Bobek an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit unter dem Titel: »Bemerkungen über die Constitution der fetten Säuren und die Löslichkeit ihrer Salze«.

Ferner legt Herr Hofrath Lieben eine Arbeit aus seinem Laboratorium von G. Johanny vor: Ȇber die Einwirkungsproducte der Blausäure auf Methyläthylacrolein«.

Herr Dr. Ed. Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: Die Apisperiode der alten Ägypter«.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

- Arnoux, G., Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. Arithmétique graphiques. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894; 8°.
- Caruelii, Th., Epitome florae Europae terrarumque affinium sistens plantas Europae, Barbariae, Asiae occidentalis et

centralis et Sibiriae quoad divisiones, classes, cohortes, ordines, familias, genera ad characteres essentiales exposita. Fasc. I. Monocotyledones. Fasc. II. Dicotyledones. Florentiae, 1892 et 1894; 8°.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg, Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. Thermometrische Arbeiten. Berlin, 1894; 40.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, IX., Wasagasse 12) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



## SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

### MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VII. HEFT.

JAHRGANG 1894. - JULI.

### ABTHEILUNG II. a.

ENTHALT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TAFELN UND 16 TEXTFIGUREN.)



**WIEN, 1894.** 

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREL

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

### INHALT

des 7. Heftes Juli 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
CVIII. Sitzung vom 5. Juli 1894: Übersicht	617
Hann J., Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnl gipfel und auf Berggipfeln überhaupt. [Preis: 60]	
1 Mk. 20 Pfg.]	
Drehfeldes. (Mit 4 Tafeln und 9 Textfiguren.) [Preis:	
= 1 Mk.]	
Haerdil E. Frh. v., Zur Frage der Perihelsbewegung des Pla	
Mercur. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	
Erdmagnetismus, (Mit 1 Tafel.) [Prois: 25 kr. = 50 P	fg.] - 726
Smoluchowski M. v., Akustische Untersuchungen über die Ela	
tät weicher Körper. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 40]	
80 Pfg.]	739
XIX. Sitzung vom 12. Juli 1894: Übersicht	773

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 75 kr. = 3 Mk. 50 Pfg.



### SITZUNGSBERICHTE

DER

## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



### XVIII. SITZUNG VOM 5. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Doppelheft IV-V (April-Mai 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die königl. italienische Botschaft in Wien übermittelt ein Druckwerk von Prof. Roberto Campana an der k. Universität in Rom unter dem Titel: »Lepra«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. Ign. Klemenčič: »Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von F. Wenzel, betitelt: \*Synthese des Kynurins«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. E. Freiherr v. Haerdtl unter dem Titel: »Zur Frage der Perihelbewegung des Planeten Mercur«.

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht eine Abhandlung: »Über die Wirkung des Windes auf schwach gekrümmte Flächen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Campana, R., Lepra. (Mit Illustrationen.) Genova, 1894.
Martel, E. A., Les abîmes, les eaux souterraines, les cavernes,
les sources, la spélaeologie. Explorations souterraines
effectuées de 1888 à 1893 en France, Belgique, Autriche
et Grèce. (Mit Illustrationen.) Paris, 1894; 4°.

## Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel und auf Berggipfeln überhaupt

von

J. Hann, w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sizung am 14. Juni 1894.)

Die anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Sonnblickgipfel erstrecken sich nunmehr schon auf mehr als sechs Jahre (beginnend mit September 1887). Leider war es bisher wegen Mangel an Arbeitskräften nicht möglich, dieselben vollständig zu reduciren. Bloss die zweijährigen Aufzeichnungen September 1887 bis August 1889 inclusive sind vollständig reducirt, discutirt und auch in extenso veröffentlicht worden. Es geschah dies in der Abhandlung von Herrn Dr. J. M. Pernter: \*Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und einigen anderen Gipfelstationen« (Denkschriften, LVIII. Bd., Wien, 1891. Vorgelegt im December 1890).

Um die jetzt schon vorliegenden anemometrischen Registrirungen wenigstens nach einer Richtung hin verwerthen zu können, liess ich die Windgeschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Richtung nach Stundenintervallen für den ganzen restirenden Zeitraum September 1889 bis December 1893 inclusive reduciren und Mittelwerthe der stündlichen Windgeschwindigkeit für die Periode September 1887 bis December 1893 ableiten (October 1888 und Juni 1890 fehlen). Diese Mittelwerthe gedachte ich zunächst einer eingehenderen Discussion zu unterziehen, da die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke einige Anhaltspunkte für die Aufdeckung der wahren Ursache der letzteren zu liefern

620 J. Hann,

versprach. Die eigentliche Ursache der Umkehrung im täglichen Gange der Windstärke auf hohen Berggipfeln ist ja noch immer nicht vollständig aufgedeckt, denn wenn auch die Espy-Köppen'sche Erklärung derselben für die Höhe des Eiffelthurmes (300 m), woselbst die Umkehrung sich bereits eingestellt hat, als vollkommen zureichend erscheint, wofür auch im Folgenden Nachweise gegeben werden, so kann dies doch nicht für die folgenden 4000 m mächtigen Luftschichten behauptet werden, in welchen durchwegs, nach den Aufzeichnungen auf Berggipfeln, die Umkehrung des täglichen Ganges gleichfalls eintritt.

Es ist also, wie sich derart herausstellt, die Haupterscheinung im täglichen Gange der Windstärke, dass das Minimum der letzteren um Mittag und das Maximum in der Nacht eintritt, denn so verhält es sich vom Eiffelthurm (300 m) aufwärts bis zum Gipfel von Pikes Peak (4308 m). Der früher als allgemeine Regel geltende tägliche Gang der Windstärke in der Nähe der Erdobersläche mit einem Maximum bald nach Mittag und einem Minimum in den frühen Morgenstunden, tritt nach unseren jetzigen Erfahrungen als eine ganz untergeordnete, auf die untersten bloss etwa 200 m mächtigen Luftschichten beschränkte Erscheinung dagegen zurück.

So viel ich weiss, war es Herr Dr. G. Hellmann, welcher zuerst die Aufmerksamkeit der Meteorologen auf die unerwartete Thatsache hinlenkte, dass auf Berggipfeln der tägliche Gang der Windstärke der entgegengesetzte sei von jenem an der Erdoberfläche. Es geschah dies in einer Discussion der stündlichen Aufzeichnungen auf dem Mount Washington im Mai 1872 (»Ein Beitrag zur Physik der höheren Luftschichten.« Zeitschrift für Met., B. X, 1875, S. 311). Die späteren Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Säntis- und Obirgipfel, die frühesten ihrer Art (beginnend mit August, respective September 1883; jene auf Pikes Peak reichen allerdings weiter zurück, die Ergebnisse derselben sind aber erst spät bekannt geworden) haben diese ersten Andeutungen der Umkehrung des täglichen Ganges der Windstärke in der Höhe vollkommen bestätigt. <sup>1</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zeitschrift für Met., B. XVIII, 1883, S. 416.

Der Constatirung dieser Thatsache ist aber keineswegs alsbald auch eine zureichende Erklärung derselben gefolgt, denn die ersten darüber ausgesprochenen Ansichten sind wohl bald wieder fallen gelassen worden. Man muss vielmehr gestehen, dass bis zum heutigen Tage die wahre Ursache der Abnahme der Windstärke um Mittag und deren Zunahme in der Nacht auf den Berggipfeln noch keineswegs ganz aufgeklärt ist.

Darum schien mir eine eingehende Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel, gegründet auf sechsjährige Registrirungen, nicht ohne wissenschaftliches Interesse zu sein.

Herr Dr. Pernter konnte den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nur im allgemeinen Mittel darstellen, da er bloss über zweijährige Beobachtungen verfügte. Aus den jetzt mehr als sechs Jahrgänge umfassenden Aufzeichnungen lässt sich aber der tägliche Gang auch schon für die einzelnen Monate ableiten, was zu einigen auffälligen Resultaten führte, die mir dann Veranlassung gegeben haben, die jahreszeitlichen Veränderungen im täglichen Gange der Windstärke auch in den Registrirungen auf anderen Berggipfeln aufzusuchen, um zu erfahren, ob die für den Sonnblick gefundenen Resultate eine allgemeinere Geltung beanspruchen dürfen oder nicht. So erweiterte sich mir während der Arbeit die Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel zu einer Discussion dieser Erscheinung auf den Berggipfeln überhaupt. Die Ergebnisse haben aber nicht ganz meinen Erwartungen entsprochen und entscheidende Resultate haben sich dabei nicht herausgestellt. Eine einheitliche Bearbeitung der jetzt von den Berggipfeln verschiedener Höhe vorliegenden mehrjährigen Registrirungen der Windstärke, wie sie im Nachfolgenden geboten wird, dürfte trotzdem ein grösseres und bleibendes Interesse haben, wie dies der wissenschaftlichen Beschreibung einer Naturerscheinung überhaupt nicht abgesprochen werden kann.

Herr Billwiller in Zürich hat mich bei dieser Arbeit in höchst dankenswerther Weise unterstützt, indem er mir handschriftlich die stündlichen Windgeschwindigkeiten nach den 622 J. Hann,

anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Säntisgipfel für die einzelnen Monate der achtjährigen Periode 1886—1893 mitgetheilt hat. Herrn Angot in Paris verdanke ich die freundliche Übermittlung eines Separatabdruckes aus dem noch nicht ausgegebenen Jahrgange 1892 der »Annales du Bureau Central Mét. de France«, die Beobachtungsergebnisse 1892 auf dem Eiffelthurme enthaltend.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Die folgende Tabelle enthält die Abweichungen der Stundenmittel der Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde) vom Monatsmittel nach einer ersten Ausgleichung der auch in sechsjährigen rohen Mitteln noch recht störend hervortretenden Unregelmässigkeiten. Die Ausgleichung erfolgte nach dem gewöhnlichen Schema  $\frac{1}{4}$  (a+2b+c). Die unmittelbaren Werthe der absoluten Windgeschwindigkeit, sowie der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln theile ich im Anhange mit. Dort findet man auch einige weitere Erläuterungen und kritische Bemerkungen zu diesen Tabellen.

Die bemerkenswertheste Thatsache, die uns in der Tabelle A entgegentritt, ist der frühe Eintritt des Minimums der Windgeschwindigkeit. Im Jahresmittel selbst tritt das Minimum der Windgeschwindigkeit schon um 9<sup>h</sup> Vormittag ein. Nach den vorherrschenden Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windstärke auf den Berggipfeln sollte der Eintritt des Minimums am Nachmittage stattfinden.

Das Maximum der Windgeschwindigkeit stellt sich in den Abend- und Nachtstunden ein, wie wir dies schon von den Berggipfeln wissen.

Selbst die ausgeglichenen Zahlenwerthe der Tabelle A zeigen noch so grosse Divergenzen des täglichen Ganges von Monat zu Monat und Unregelmässigkeiten innerhalb desselben Monates, dass man deutlich sieht, dass eine sechsjährige Periode noch zu kurz ist zu einer genaueren Darstellung des jährlichen Ganges der täglichen Variation der Windstärke. Besonders abweichend verhalten sich die Monate October und Jänner.

Um die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke übersichtlicher darzustellen, so wie sie wahrscheinlich

Sonnblickgipfel. Windgeschwindigkeit.

4	Jahr	
Werthe	Decbr.	2. 2. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4.
ndigkeit. inde. Ausgeglichene V	Nov.	0.00
	Octob.	
unde.	Sept.	22
A. SOHILLER BIPTEL. WILLINGESCHWILLINGEREIT. Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel. Meter pro Secunde. Ausgeglichene Werthe.	August	0.12.12.23.23.23.23.23.23.23.23.23.23.23.23.23
	Juli	
	Juni	288 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
	Mai	8
	April	
	März	
	Febr.	£ 1
	Jänner	10.1.2.2.3.3.3.4.4.2.4.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4.4.2.4
Abv		Mitth

aus langjährigen Mitteln sich ergeben dürfte, habe ich auf die noch nicht ausgeglichenen Stundenmittel der Windgeschwindigkeit die Bessel'sche Formel angewendet, mich aber mit der Berechnung von zwei Gliedern begnügt. Es handelt sich ja nur um eine Herausschälung der einfachsten und wichtigsten Charakterzüge des täglichen Ganges der Windstärke, und diesen Zweck erreicht man am sichersten durch Berechnung der ersten Glieder einer periodischen Reihe.

Die zur Ableitung des jährlichen Ganges der Constanten der Bessel'schen Formel verwendeten Reihen, sowie die Zwischenrechnungen enthält die Tabelle III des Anhanges. Da die Berechnung der Constanten auf Grund der unmittelbar aus der Reduction der Anemogramme erhaltenen Zahlen vorgenommen worden war, mussten die numerischen Coëfficienten hinterher auf absolutes Mass (Centimeter pro Secunde) reducirt werden, wozu ich den Factor 34·7 verwendete.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel (Centimeter pro Secunde. x = 0 für Mitternacht).

	$a_1$	$a_2$	$A_1$	$A_2$
Jänner	21	19	92°6	1°5
Februar	33	27	114.8	$325 \cdot 3$
März	45	13	142.8	$348 \cdot 4$
April	63	26	158.0	105.0
Mai	<b>74</b>	26	157 · 2	114.3
Juni	75	5	147.6	351.8
Juli	67	13	138 · 7	$325 \cdot 6$
August	50	6	140.5	145.6
September	31	15	165.6	177 · 8
October	25	12	$209 \cdot 5$	$263 \cdot 5$
November	18	16	230 · 1	$340 \cdot 3$
December	3	21	142.5	$25 \cdot 4$
Jahr	38	6	149.9	15.9

Mittelst dieser Constanten wurde der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in den einzelnen Monaten berechnet und die Tabelle B erhalten.

B. Berechneter täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

Die berechneten Werthe des täglichen Ganges lassen die jährliche Periode desselben schon etwas klarer zu Tage treten. Im Jahresmittel tritt das Minimum der Windstärke schon um 8h Morgens ein, das Maximum um 8h Abends. In den Wintermonaten liegt das Minimum näher dem Mittag, im Frühjahre tritt es zeitlich am Morgen ein, im Sommer wieder näher dem Mittag und im Herbste tritt es sogar noch in der Nacht (während der ersten Morgenstunden) ein. Im October und November nähert sich der tägliche Gang jenem in der Niederung, nur mit dem Unterschiede, dass das Maximum der Windstärke erst gegen Abend statt früh am Nachmittage eintritt. Freilich ist dann überhaupt der tägliche Gang sehr schwach entwickelt, was auch für den Winter gilt, wo doppelte Maxima und Minima auftreten.

Am grössten ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke von März bis August inclusive, das Maximum der täglichen Variation tritt im Mai und Juni ein.

Bei den Unregelmässigkeiten, welche selbst der berechnete tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel noch in den Monatsmitteln zeigt, erscheint es zweckmässig, Mittel für die Jahreszeiten zu bilden und einer ähnlichen Berechnung zu unterwerfen. Ich habe desshalb die unmittelbar aus den Beobachtungen folgenden stündlichen Mittel der Windgeschwindigkeiten für die vier Jahreszeiten gebildet und nach der Bessel'schen Formel berechnet.

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit für die Jahreszeiten sind (x = 0 für Mitternacht, Centimeter pro Secunde):

Winter	20.1 $\sin (106^{\circ}4 + x) + 18.9 \sin (2^{\circ}8 + 2x)$
Frühling	$56 \cdot 5 \sin (159 \cdot 0 + x) + 14 \cdot 4 \sin (98 \cdot 1 + 2x)$
Sommer	$61 \cdot 6 \sin (135 \cdot 8 + x) + 7 \cdot 0 \sin (331 \cdot 0 + 2x)$
Herbst	$21.7 \sin(182.4+x) + 13.9 \sin(268.3+2x)$

Mittelst dieser Formeln erhält man folgende stündliche Windgeschwindigkeiten:

Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	20	35	39	15
1 <sup>th</sup> a	27	17	30	—19
2	31*	<b>—</b> 3	19	—19*
3	29	25	5	—16
4	21	-44	-10	-13
5	8	59	<b>—26</b>	<b>—</b> 9
6	<del></del> 7	67	-41	- 8
7	-21	<del>68*</del>	<del></del> 54	8
8	31	61	<b>—63</b>	11
9	<b>-37</b> *	50	<b>68</b> *	-14
10	<b>—35</b>	35	66	—17
11	29	<b>—20</b>	<b>—59</b>	—16
Mittag	18	<b>- 6</b>	<del>46</del>	—13
1 <sup>h</sup> p	<b>—</b> 7	5	-30	<b>—</b> 6
2	3	14	—11	4
3	9	21	7	16
4	11*	27	24	26
5	9	32	<b>3</b> 8	33
6	5	38	48	35*
7	0	45	54	33
8	<b>— 2</b>	50	56*	26
9	<b>—</b> 1	54*	55	15
10	4	53	52	3
11	11	47	47	<b>— 7</b>

Im Winter erinnert der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel an jenen, wie ich ihn für Sturmtage in Wien gefunden habe, im Herbst ist er jenem in der Niederung ähnlich. In diesen beiden Jahreszeiten ist aber der tägliche Gang überhaupt unregelmässig und schwach entwickelt (mittlere Ordinate 16 cm).

Im Frühling und Sommer ist die tägliche Variation mehrals doppelt so gross (mittlere Ordinate 36 und 39 cm) und das Minimum fällt dann auf 8<sup>h</sup> Vormittag im Mittel, das Maximum auf 9<sup>h</sup> Abend.

Wir stehen also jedenfalls der bemerkenswerthen Thatsache gegenüber, dass das Minimum der täglichen Windstärke auf dem Sonnblickgipfel nicht am Nachmittage und auch nicht um Mittag, sondern früh am Vormittage um 8<sup>h</sup> oder 9<sup>h</sup> eintritt. Würde die Ursache der Abschwächung der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln in Übereinstimmung mit der Espy-Köppen'schen Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche in der Mischung der unteren und oberen Luftschichten infolge der täglichen Erwärmung und den dadurch hervorgerufenen aufsteigenden und niedersinkenden Bewegungen der Lufttheilchen zu suchen sein, so müsste das Minimum der Windstärke im täglichen Gange sich nach oben hin verspäten und könnte auf dem Sonnblickgipfel in 3100 m Seehöhe jedenfalls erst ziemlich spät am Nachmittage eintreten. Ich stimme der Espy-Köppen'schen Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche vollkommen bei, weil alle Thatsachen für dieselbe sprechen. Ihre unmittelbare Anwendung aber auf die Erklärung des umgekehrten täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln schien mir stets unzulässig, da die Wirkung der Mischung der unteren trägen Luftmassen mit den höheren rascher bewegten sich wohl nicht zu so grossen Höhen erstrecken kann. Seitdem wir aber nun wissen, dass selbst schon in 300 m Höhe das Minimum der Windstärke bei Tage eintritt, und dass die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit, wie wir sie an der Erdoberfläche überall mit grösster Gleichmässigkeit beobachten, sich nicht einmal bis zu 200 m über die Erdobersläche erstreckt, kann wohl nicht mehr die Rede davon sein, dass die Abnahme der Windstärke bei Tage auf den hohen Berggipfeln ein directer Ausfluss der Espy-Köppen'schen Theorie sei.

Die kaum 200 m mächtigen trägeren Luftmassen in der Nähe der Erdoberfläche können doch unmöglich die mindestens 2000—3000 m mächtigen Schichten über sich derart beeinflussen, wobei noch zu bedenken ist, dass die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke auf den hohen Berggipfeln mindestens eben so gross oder selbst noch grösser ist als jene der täglichen Variation an der Erdoberfläche. Ginge die Ab-

schwächung der Windstärke bei Tage von unten aus, so müsste sie nach oben hin immer kleiner werden und würde wohl in relativ geringen Höhen kaum noch merklich sein, wobei der Eintritt des Minimums nach oben sich verspäten müsste. Die Thatsachen stehen mit diesen kaum abzuweisenden Consequenzen der erwähnten Ansicht vollkommen in Widerspruch.

Man hat für die Abschwächung der Windstärke bei Tage auf den Berggipfeln auch eine andere Ursache angeführt, die manches für sich zu haben scheint und die auch mir stets recht wahrscheinlich erschienen ist. Es ist dies die Wirkung der an den Bergseiten aufsteigenden Luftbewegung bei Tage als eine Folge der Erwärmung der Thäler und Bergabhänge.

Die an den Berghängen tagsüber aufsteigenden Thalwinde könnten wohl auf den Berggipfeln eine Abschwächung der von einem horizontal gestellten Robinson'schen Schalenkreuz gemessenen Luftbewegungen hervorbringen. Wenn aber die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit in erster Linie durch diese aufsteigenden Luftströmungen hervorgerufen würde, dann müsste wohl das Minimum der Windgeschwindigkeit im täglichen Gange auf den Nachmittag fallen, gerade so, wie die anderen aus diesem Vorgange stammenden meteorologischen Phänomene, so z. B. die Bewölkung, die Regen- und Gewitterbildung an den Gebirgen. Das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke schon vor dem Mittag auf dem Sonnblickgipfel steht damit nicht in Übereinstimmung. Da wir keine stündlichen Schätzungen der Bewölkung haben, so will ich an Stelle derselben die Registrirungen des Sonnenscheins anführen, wobei natürlich zu beachten ist, dass der Gang der Bewölkung der umgekehrte von jenem der Häufigkeit des Sonnenscheins ist.

					Zeit						
6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6
		Dauer	des So	nnenso	heins (	Frühlir	ig und	Somr	ner)		
8.2	12.6	13.8	18.8	13.1	11.6	10.5	9.8	9.1	8.4	7.6	5.6
	Abweic	hungen	der W	indges	chwindi	gkeit (	Centim	eter p	ro Sec	unde)	
<b>-</b> 56	<b>—70</b>	-66	<b>—57</b>	<b>—</b> 50	-33	<b>—</b> 7	0	22	23	10	31

Wenn die aufsteigende Luftbewegung die Hauptursache der Abschwächung der Windstärke bei Tage auf dem Sonnblickgipfel wäre, dann müsste diese aufsteigende Luftbewegung schon ziemlich früh am Morgen zwischen 7<sup>h</sup> und 9<sup>h</sup> ihr Maximum erreichen. Das ist nun an sich schon sehr unwahrscheinlich, wird aber auch direct widerlegt durch den täglichen Gang der Bewölkung. Gerade die Stunden, welche dem von dem Gange der Windstärke geforderten Maximum der aufsteigenden Luftbewegung folgen, d. i. 8h bis 10h Vormittag, haben die grösste Frequenz des Sonnenscheins, also die geringste Bewölkung aufzuweisen. Die aufsteigende Luftbewegung kann also nicht so früh am Vormittage ihr Maximum erreichen, wie dies ja auch dem Gange der täglichen Erwärmung widerspricht. Die Bewölkung nimmt Nachmittags sehr rasch zu, die Differenz in der Dauer des Sonnenscheins in den gleich weit von Mittag (eigentlich 11<sup>1</sup>/<sub>2</sub><sup>h</sup> a. m.) abstehenden Stunden ist

$$10^{1/2}$$
 a.— $0^{1/2}$  p. = 2·6 Stunden,  
 $9^{1/2}$  a.— $1^{1/2}$  p. = 4·0  
 $8^{1/2}$  a.— $2^{1/2}$  p. = 4·7  
 $7^{1/2}$  a.— $3^{1/2}$  p. = 4·2

Die Bewölkung erreicht demnach erst um 2<sup>h</sup> bis 3<sup>h</sup> Nachmittag ihr Maximum, wie dies auch dem Gange der Erwärmung der Berghänge und der Stärke der Thalwinde vollkommen entspricht.

Wenn also die aufsteigenden Bergwinde die Hauptursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln wären, dann müsste das Minimum der Windstärke erst am Nachmittage nach 3<sup>h</sup> etwa eintreten, nicht aber schon am Vormittage.

Der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel unterstützt demnach keineswegs die Annahme, dass es der aufsteigende Thalwind sei, welcher die Abschwächung der Windstärke daselbst hervorbringt.

Es muss wohl hervorgehoben werden, dass diese Annahme auch die Voraussetzung enthalten würde, dass der auf den Berggipfeln registrirte tägliche Gang der Windstärke nur eine locale Erscheinung sei, die in der freien Atmosphäre nicht zur Beobachtung gelangen könnte, weil die aufsteigenden Winde ja nur den Gebirgen eigenthümlich sind.

Alle Erfahrungen und desgleichen alle rationellen Vorstellungen über den täglichen verticalen Luftaustausch in der Atmosphäre infolge des täglichen Ganges der Erwärmung widersprechen der Annahme, dass in der freien Atmosphäre bis zu Höhen von mehreren tausend Metern hinauf eine Mischung der unteren und oberen Luftschichten stattfinden könne.

Nachdem wir derart gefunden haben, dass die Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel keiner der bisherigen Ansichten über die Ursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln entsprechen, müssen wir nun aber auch der Tragweite dieser Beobachtungen uns versichern. Wir müssen zunächst untersuchen, ob nicht vielleicht der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel durch Zufälligkeiten und ganz locale Verhältnisse derart modificirt wird, dass er weder für noch gegen die bisher aufgestellten Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln geltend gemacht werden kann. Diese Untersuchung ist aber auf keinem anderen Wege zu führen, als dadurch, dass wir den täglichen Gang der Windstärke auf anderen hohen Berggipfeln wenigstens für die vier Jahreszeiten ableiten und nachsehen, in wie weit derselbe mit den für den Sonnblick gefundenen Resultaten übereinstimmt. Eine übersichtliche Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln ist meines Wissens bisher überhaupt noch nicht versucht worden und darum dürften die nachfolgenden Zusammenstellungen, bei denen auf möglichst vollständige Vergleichbarkeit das grösste Gewicht gelegt worden ist, für alle ferneren Untersuchungen über die tägliche Variation der Windgeschwingkeit auf Berggipfeln von einigem Nutzen sein.

Natürlich suchte ich zunächst den täglichen Gang der Windstärke auf dem Säntisgipfel mit jenem auf dem Sonnblick zu vergleichen, da letzterer nach Höhe und Lage, sowie infolge der günstigen Aufstellung des Anemometers das beste Vergleichsmaterial zu liefern versprach.

Herr Director R. Billwiller in Zürich hat mir mit grösster Zuvorkommenheit die monatlichen Stundenmittel der Wind-

632 J. Hann.

stärke auf dem Säntis für die ganze Periode 1886—1893 handschriftlich zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm grossen Dank schulde. Die mittleren stündlichen Windgeschwindigkeiten aus acht Jahrgängen abgeleitet, findet man, in Meter pro Secunde ausgedrückt, in der Tabelle IV des Anhanges zu dieser Abhandlung.

Es wurden auf Grund derselben die Abweichungen der Stundenmittel von den entsprechenden Monatsmitteln gebildet und diese hierauf, um einen regelmässigeren, die Haupterscheinungen klarer zum Ausdrucke bringenden Gang zu erhalten, nach dem Schema  $^{1}/_{4}$  (a+2b+c) ausgeglichen. Ich theile nun die derart ausgeglichenen Werthe hier mit, welche man in der folgenden Tabelle C zusammengestellt findet.

Man sieht, dass auch auf dem Säntis das Minimum der Windgeschwindigkeit am Vormittage eintritt, nicht Nachmittags, wie zu erwarten wäre, wenn dasselbe ein Resultat des verticalen Luftaustausches infolge der Erwärmung der untersten Schichten sein würde.

Von einer Verspätung gegenüber dem Maximum der Windgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, das in Zürich im Sommer um  $2^{1/2}$ h Nachmittag eintritt, kann schon gar nicht die Rede sein. Nehmen wir für die Tagesstunden die mittleren Abweichungen der Monate Mai—August, so erhalten wir folgenden Gang der Windgeschwindigkeit:

Säntis (Mai-August) Centimeter pro Secunde

Das Minimum der Windstärke tritt also schon um  $10^{1}/2^{h}$  oder um  $11^{h}$  Vormittag ein, und die Nachmittagsstunden haben schon wieder eine grössere Windgeschwindigkeit als die entsprechenden vom Mittag gleich weit abstehenden Vormittagsstunden.

Die Stärke des aufsteigenden Luftstromes, des aufsteigenden Thalwindes, hat auch auf dem Säntis sicherlich sein Maximum am Nachmittage, wie dies auch der tägliche Gang der Frequenz des Sonnenscheins, der jenem auf dem Sonnblickgipfel parallel verläuft, bezeugt. Nehmen wir diesmal die mittlere Häufigkeit

in Abweichungen von den Monatsmitteln (ausgeglichen). Achtjährige Mittel. Centimeter pro Secunde. C. Säntis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit

		Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	
II.	12- 1 <sup>h</sup> a.	- 27	2	1	49	26	51*	92	*69		1		0	P
	1-2	*67	6	l	36	4	45	83*	67		1		15	
	2 - 3	- 24	4	i	20	01	45	48	28		1	1	_ 27	
	3- 4		∞	1	15	10	48	81	54		1	1	38	
	4- 5	14	0	l	91	- 10	32	63	41		1	1	1 4	
	9 —9		- 17	- 44*	12	<b>∞</b>	6	21	28	34	01	- 17	- 48	
	2 -9	∞		١	63	5	6	92	16			1	- 43	_
	7 - 8	23		1	- 12	<b>20</b>	- 28	19 -	9	١			30	
	6 <del>-</del> 8	25			30	- 24	- 48	82	39	١			- 23	
	9-10	23			- 45	- 43	99 –	-107	- 65	١	١	_	18	
	10-11	*22*			- 52	- 46*	*22 -	-129	*18	i	1		-	
	11-Mittag	20	- 24*		- 52*	- 39	02		8 	1	1		18	
	0-1	-			1 48	33	1 20	-118	- 67		١	١	22	
	1-2	2 -			- 42	38	38	- 97	- 63	١	1	١	01	
	2-3	က			- 35	1 38	- 32	_ 71		1	1	1	6	
_	3- 4	16	6		- 29	- 25	- 25	32		ł	ı	1	45	
	4 5	16	21		91	13	- 15	ū	34	1			<b>*</b> 99	
	5- 6	9	\$22 *		12		0	31		1			53	
_	2 —9	0	23		99	82	20	22	∞	1			38	_
_	2- 8	1	18		22	20	33	20	13				23	
	8 - 9	1	2		24	99	37	75	26				4	
	9-10	დ 	2		35	71*	4	62	52				- 7	
	10-11	∞ 	က		45	28	4	92	91				1	
	11 - 12	_ 12	0	i	<b>4</b> 6 <b>*</b>	41	46	69	61				4	
	Mittel	.14	.12	•19	•30	.29	.38	.72	.46	.52	.20	•10	.25	
-		_	-	-	-	,			1		_	-		_

einer Wolkenhaube auf dem Säntisgipfel, die ja auch zumeist durch die aufsteigende Luftbewegung hervorgerufen wird, als Index für denselben, so finden wir folgende Zahlen:

Mittlere Häufigkeit der Nebeltage auf dem Säntis.

Stunde..... 
$$7^h$$
 a.  $10^h$  a.  $1^h$  p.  $4^h$  p.  $9^h$  p. Tage .....  $10 \cdot 8$   $10 \cdot 8$   $11 \cdot 8$   $13 \cdot 5$   $11 \cdot 9$ 

Nach diesen Mitteln (für Mai—September) tritt die grösste Nebelfrequenz um 4<sup>h</sup> Nachmittag ein, wie dies dem Gange der aufsteigenden Luftbewegung entspricht. Um 10<sup>h</sup> Vormittag, wo das Minimum der Windstärke eintritt, ist die Nebelfrequenz dem Minimum nahe.

Es scheint also auch nach den Registrirungen der Windstärke auf dem Säntisgipfel die tägliche Variation der Windgeschwindigkeit mit dem täglichen Gange der aufsteigenden Luftbewegung an den Berghängen in keinem engeren Connex zu stehen.

Da der tägliche Gang der Windstärke in den einzelnen Monatsmitteln selbst aus achtjährigen Registrirungen abgeleitet, noch vielfach unregelmässig verläuft, so habe ich (aus den noch nicht ausgeglichenen Zahlen) Jahreszeitenmittel gerechnet und auf diese die Bessel'sche Formel angewendet. Die auf diesem Wege mittelst zwei periodischen Gliedern erhaltenen Zahlenwerthe finden sich in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt.

Im Winter ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke klein (mittlere Ordinate 12 cm) und der tägliche Gang kommt jenem in der Niederung an der Erdoberfläche fast gleich. Im Frühling fällt das Minimum auf den Mittag, das Maximum auf 9<sup>h</sup> Abends (mittlere Ordinate 20 cm), im Sommer, wo der tägliche Gang mehr als viermal stärker auftritt, als im Winter (mittlere Ordinate 52 cm), tritt das Minimum schon um 11<sup>h</sup> ein und das Maximum um 1—2<sup>h</sup> Nachts. Im Herbst verspätet sich das Minimum bis 1<sup>h</sup> p. und der Gang verläuft dann jenem in der Niederung fast entgegengesetzt, aber er ist nur schwach entwickelt, wie im Winter (mittlere Ordinate 14 cm).

Die absoluten Werthe der Windgeschwindigkeit im Mittel der Jahreszeiten findet man im Anhange (Tabelle X).

Berechneter täglicher Gang der Windstärke auf dem Säntisgipfel (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	-10	21	66	14
1 <sup>h</sup> a	14	10	69*	7
2	<u>-17</u>	1	69	2
3	<del></del> 18*	<b>—</b> 6	63	. 0
4	<u>-17</u>	11	51	<b>— 1</b>
5	<del> 15</del>	—13	33	- 1
6	14	14	9	0
7	—11	-14	—19	<b>—</b> 2
8	-10	<del></del> 15	46	<b>—</b> 5
9	<b>—</b> 7	18	<del>70</del>	-10
10	<b>—</b> 5	22	<b>87</b>	16
11	<b>— 2</b>	-26	<b></b> 95*	23
Mittag	2	<b>29</b> *	93	28
1 h p	6	29	83	<b>—29*</b>
2	11	-25	64	-26
3	16	—17	<b>—43</b>	—19
4	19	<b>—</b> 6	-20	— 9
5	22*	8	1	. 3
6	22*	21	19	14
7	19	33	32	23
8	15	39	42	29
9	9	42 *	49	29*
10	3	39	56	27
11	- 4	31	61	21

Bei diesen Resultaten angelangt, schien es mir nun von Interesse, den täglichen Gang der Windstärke in den einzelnen Jahreszeiten in allen Höhenstufen zu verfolgen, so weit dies die publicirten Stundenmittel der Windstärke auf Berggipfeln gestatten, wobei natürlich nur mehrjährige Mittelwerthe Verwendung finden konnten. Um den Vergleich durch alle Höhenstufen hindurch führen zu können, berechnete ich auch den täglichen Gang der Windstärke zu Paris und auf dem Eiffel-

thurme aus der Periode Juli 1889 bis inclusive December 1892 (Sommer somit bei beiden Stationen 11 Monate, Herbst 12, Winter 10, Frühling 9). Den Jahrgang 1892 verdanke ich Herrn Alfred Angot.

Zwischen Paris und Eiffelthurm schaltet sich noch die Gipfelstation Blue Hill ein, welche um 100 m niedriger ist, als jene auf dem Eiffelthurm, und nur 142 m über die umliegende Gegend sich erhebt. Wir haben also

Paris, Bureau Central. Anemometer 54 m über dem Meeresniveau, 21 m über dem Boden (Juli 1889 bis December 1892 inclusive);

Blue Hill. Anemometer Draper 203 m über dem Meere und circa 142 m über dem umgebenden Lande (9.5 m über dem Berggipfel). Fünfjährige Mittel 1886 bis 1890 inclusive;<sup>1</sup>

Eiffelthurm. Anemometer 338:5 m über dem Meere, 305 m über dem Boden.

Die Registrirungen zu Paris und auf dem Eiffelthurm sind derart reducirt worden, dass die zu der betreffenden Stunde gehörige momentane Windgeschwindigkeit den Anemogrammen entnommen wurde, und nicht ein mittlerer Werth für ein ganzes Stundenintervall, wie dies bei allen anderen Stationen der Fall ist. Nur auf dem Ben Nevis, wo die Windstärke stündlich geschätzt wird, gilt gleichfalls die Windstärke für die Stunde selbst und nicht für ein Stundenintervall.

Ben Nevis. Mittel der vier Jahre 1884—1887 inclusive. Windstärke geschätzt nach Beaufort's Scala. Durch sehr häufige Vergleichungen der Schätzungen mit den Registrirungen konnte aber eine Reductionsscale aufgestellt werden, die für die mittleren Stärken ziemlich genau gelten dürfte. Ich habe, um eine leichtere Vergleichung der Amplituden zu ermöglichen, nach dieser Scale die geschätzten Stärken auf Meter pro Secunden reducirt. Eine strenge Vergleichbarkeit der Amplituden ist der Natur der Sache nach auch auf diesem Wege nicht zu erreichen. (Transactions Royal Soc. of Edinburgh, vol. XXXIV, Meteorology of Ben Nevis by Alex. Buchan.)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Annals of the Astron. Observ. of Harvard College, vol. XXX. P. II, Cambridge 1891.

Obir. Mittel aus den fünf Jahren 1886—1890. Seither wurde das Anemometer günstiger und höher aufgestellt¹ und die mittlere Windgeschwindigkeit kommt nun grösser heraus. Das Mittel der fünf Jahre 1886—1890 ist 14·59 km pro Stunde, das Mittel des Jahres 1893 ist aber 19·92. Um auch die absoluten Windgeschwindigkeiten des Obir und die Amplituden der täglichen Variation mit den übrigen Stationen besser vergleichbar zu machen, habe ich die Mittel 1886—1890 auf die neue Aufstellung reducirt und dabei auf den Charakter des Jahres 1893 gegenüber dem Mittel 1886—1890 in Bezug auf Windstärke Rücksicht genommen, soweit die vorliegenden Messungen dies gestatteten.

Die Phasenzeiten des täglichen Ganges stimmen in der fünfjährigen Reihe mit jenen der einjährigen sehr nahe überein, aber die Amplituden der täglichen Variation ergeben sich nun viel grösser, wie folgender Vergleich zeigt.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Obirgipfel im Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).

Das Minimum der Windgeschwindigkeit fällt in der neuen Reihe näher auf den Mittag, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Obir. Mittlere Windgeschwindigkeit. (Centimeter pro Secunde. Abweichungen vom Jahresmittel.)

Wie viel von diesem Unterschied auf Rechnung des einen Jahres 1893 kommt, muss dahingestellt bleiben. Sicher ist nur, dass die tägliche Amplitude in der neuen freieren Aufstellung viel grösser ausfällt.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe diese Sitzungsber., B. CII, Abth. II. a. Juliheft 1893.

Säntis und Sonnblick wurden schon oben behandelt, auch Pikes Peak bedarf keines Commentars. Die Mittel sind jene der Jahre 1874—1887.

Ich lasse nun den berechneten täglichen Gang der Windstärke für die vier Jahreszeiten folgen, damit man die Änderung im Eintritt des Minimums vom Winter zum Sommer oder anderseits etwa die Unabhängigkeit der Eintrittszeiten des Minimums von der Jahreszeit leichter zu überblicken vermag.

Berechneter täglicher Gang der Windstärke. (Centimeter pro Secunde.)

## a) Paris, Bureau Central, 21 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	—18	56	<b>—58</b>	<b>—27</b>
1 b a	20	63	64	32
2	<b>—23</b>	69	69	<b>—38</b>
3	-27	—71 <b>*</b>	<b>—71</b> *	<b>45</b>
4	-30	<del>7</del> 0	69	-50*
5	<b>—31</b> *	62	<b>—61</b>	-50
6	-29	-49	48	-43
7	-23	-32	-30	-30
8	—13	— 9	<b>—</b> 7	-11
9	0	16	19	11
10	15	40	44	34
11	28	61	65	54
Mittag	38	77	81	66
1 <sup>h</sup> p	44	86	88*	70*
2	45*	86*	87	66
3	<b>4</b> 0	79	79	54
4	31	67	64	38
5	20	48	46	20
6	9	28	25	4
7	— 1	9	6	<del></del> 8
8	<b>- 9</b>	— გ	—12	-16
9	13	-24	-27	-21
10	-16	37	-39	22
11	-17	<b>47</b>	-49	<b>—24</b>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man vergl. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXVI, 1891, S. 219.

Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Frühling und Sommer um 2 Stunden früher ein (schon um 3<sup>h</sup> Morgens) als im Winter; das Maximum fällt im Winter und Frühling auf die Zeit zwischen 1<sup>h</sup> und 2<sup>h</sup>, im Sommer etwas näher auf 1<sup>h</sup> und im Herbst auf 1<sup>h</sup>. Es sind dies die bekannten Eigenthümlichkeiten des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche.

b) Eiffelthurm, 305 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	46	130*	138	98
1 <sup>h</sup> a	36	127	143*	88
2	34*	116	132	78
3	40	96	106	71
4	52	69	67	64
5	65	36	21	55
6	72*	- 1	<b>— 28</b>	40
7	68	<b>—</b> 39	<b>— 71</b>	17
8	48	<b>—</b> 75	104	- 14
9	15	106	124	<b>—</b> 52
10	<b>— 28</b>	128	—130 <b>*</b>	<b>—</b> 92
11	<b>—</b> 73	139	123	-127
Mittag	-112	—141 <b>*</b>	<u>108</u>	151
1 <sup>h</sup> p	<b>—137</b>	—131	— 89	—161 <b>*</b>
$2  \dots \dots$	<b>—142</b> *	-112	<b>—</b> 68	—151
3	-127	<b>— 85</b>	50	-125
4	- 94	<b>—</b> 55	<b>— 34</b>	<b>— 84</b>
ā	<b>—</b> 51	— 21	— 19	<b>— 3</b> 6
6	<b>—</b> 6	12	<b>— 2</b>	13
7	33	43	17	<b>5</b> 6
8	60	71	41	87
9	72*	95	68	106
10	60	113	96	112*
11	<b>5</b> 9	125	121	108

Auf dem Eiffelthurme tritt das Maximum der Windstärke im Winter schon um 9h ein, im Frühling um Mitternacht, im

Sommer um 1<sup>h</sup> Morgens und im Herbst um 10<sup>h</sup> p. Das Minimum der Windstärke fällt im Winter auf 2<sup>h</sup> p.; zur selben Zeit erreicht an der Erdoberfläche die Windstärke ihr Maximum. Gegen den Sommer hin weicht aber die Eintrittszeit der kleinsten Windgeschwindigkeit immer mehr gegen den Vormittag zurück und fällt im Sommer auf 10<sup>h</sup> Vormittag, d. i. fast 4 Stunden früher als die Eintrittszeit des Maximums der Windstärke unten. Im Herbste fallen die entgegengesetzten Extreme oben und unten wieder auf die gleiche Stunde, d. i. auf 1<sup>h</sup> p. Der frühe Eintritt des Minimums der Windstärke auf dem Eiffelthurm im Sommer ist eine sehr bemerkenswerthe Thatsache.

Nach der Köppen-Espy'schen Theorie der Ursache des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche möchte man zunächst annehmen, dass das Minimum oben mit dem Maximum unten zugleich eintreten müsste.<sup>1</sup>

Die Gleichungen, welche den Unterschied im täglichen Gange der Windstärke auf dem Eiffelthurme und zu Paris darstellen, sind:

Unterschied im täglichen Gange der Windstärke Eiffelthurm—Paris. (x = 0 für Mitternacht, Centimeter pro Secunde).

Winter	131 sin (61°	7+x)+66 sin	$(220^{\circ}9 + 2x)$
Frühling	205 sin (80°	$9+x)+16 \sin^2 x$	$(275 \cdot 4 + 2x)$
Sommer	194 sin (82°	9+x)+24 sir	1 (8.4 + 2x)
Herbst	175 sin (77°	8+x)+56 sir	(235.9 + 2x)
Jahr	172 sin (779	'3+++)++29 sir	(241°1+2x)

Es ist nicht uninteressant, aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen, dass die Extreme der Differenzen im täglichen Gange sehr nahe auf Mitternacht und Mittag, und zwar etwas nach diesen Stunden eintreten.

<sup>1</sup> Es dürfte auch von Interesse sein, die Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeiten zu Paris und auf dem Eiffelthurme kennen zu lernen. Die folgende Tabelle enthält die berechneten Werthe dieser Geschwindigkeitsdifferenzen; aber nicht die absoluten Differenzen, die ja stets positiv sein würden, wenn man Eiffelthurm—Paris nimmt, sondern die Differenzen der Abweichungen vom Tagesmittel, in denen also der mittlere Unterschied der Windstärke oben und unten schon eliminirt ist und nur die Unterschiede im täglichen Gange zu Tage treten.

Es ist gerade dieser Erscheinung gegenüber von grossem Interesse, den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit auf einer etwas niedrigeren Gipfelstation mit jenem auf dem Eiffelthurme zu vergleichen. Diesen Vergleich ermöglichen die Registrirungen an der Station des Herrn L. Rotch auf dem Blue Hill bei Boston.

Im Sommer, wo das Minimum der absoluten Windstärke auf dem Eiffelthurm schon um  $10^{\,\mathrm{h}}$  Vormittag eintritt, tritt das Maximum des Gangunterschiedes oben und unten erst um  $11^{\,\mathrm{l}}/2^{\,\mathrm{h}}$  a., also nahe dem Mittage ein.

Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeit. Eiffelthurm--Paris (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	64	186	196	125	143
1 a	56	190	207	120	148
2	57	185	201	116	140
3	67	167	177	116	132
4	82	139	136	114	118
5	96	98	82	105	95
6	101	48	20	83	63
7	91	<b>- 7</b>	- 41	47	22
8	61	<b>— 66</b>	<b>- 97</b>	- 3	<b>— 26</b>
9	15	—122	143	- 63	<b>– 78</b>
10	<b> 43</b>	—168	—174	-126	-128
11	101	-200	-188*	-181	—167
Mittag	<b>—150</b>	-218*	189*	-217	-193
1 p	-181	-217*	-177	-231*	201*
2	187*	198	-155	<b>—217</b>	<b>—189</b>
3	<b>—</b> 167	164	-129	179	160
4	125	-122	<b>— 98</b>	-122	—117
5	<b>—</b> 71	- 69	<b>— 65</b>	<b>—</b> 56	<b>—</b> 65
6	- 15	- 16	<b>—</b> 27	9	- 12
7	34	34	11	64	36
8	69	79	53	103	76
9	85	119	95	127	106
10	86	150	135	134	126
11	76	172	170	132	237
Mittel	87	131	124	116	111

Blue Hill, circa 142 m relativ (203 m absolut).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	<b>—</b> 1	22	41*	— 3
1 <sup>h</sup> a	<b>— 1*</b>	—19	40	- 2*
2	<b>—</b> 3	<u> — 17                                   </u>	32	5
3	<b>—</b> 7	<b>—20</b>	17	<b>—</b> 9
4	11	-27	<b>— 2</b>	16
5	-14*	-36	<b>—23</b>	<b>—20</b> *
6	—14 <b>*</b>	44	-41	-21
7	—11	<b>—48</b> *	<b>—52</b>	-17
8	<b>—</b> 5	-46	56*	<b>—</b> 8
9	3	36	-52	5
10	12	—18	-41	18
11	19	6	25	31
Mittag	23*	31	- 9	38
1 h p	23*	53	4	40 *
2	20	68	13	35
3	13	73*	16*	24
4	5	68	15	11
5	<b>—</b> 2	55	11	<b>— 2</b>
6	<b>—</b> 8	35	9	14
7	—11	14	8*	-21
8	—12 <b>*</b>	<b> 4</b>	11	—22 <b>*</b>
9	<b>—</b> 9	—17	19	<b>—2</b> 0
10	<b>—</b> 6	-24	28	14
11	<b>—</b> 3	25*	37	<b>-</b> 8

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in einer mittleren Höhe zwischen der Erdobersläche und dem Eisselthurm (Paris 21 m, Blue Hill circa 142 m, Eisselthurm 305 m) hat in der That ganz den Charakter des Überganges von den Verhältnissen unten zu jenen oben, wo die Umkehrung des täglichen Ganges schon complet ist.

Im Winter ist der tägliche Gang jenem an der Erdoberfläche ganz gleich. Vom Winter zum Sommer verspätet sich das Minimum von  $5^{1}/_{2}^{h}$  a. bis  $8^{h}$  a. auf dem Eiffelthurm bis  $10^{h}$  a.

Es findet also eine Art Fortschreiten des Minimums der Windgeschwindigkeit von unten nach oben statt. Das Anemometer<sup>1</sup> auf dem Thurm des Post Office in Boston, 58 m über dem Boden, zeigt den Eintritt des Minimums im Sommer um 5<sup>h</sup> a. an, drei Stunden später tritt das Minimum in 140 m über dem Boden oder 84 m höher ein, und fünf Stunden später in 300 m (wenn man Eiffelthurm damit vergleichen darf). Wir hätten somit beiläufig:

Eintritt des Morgenminimums in verschiedenen Höhen über dem Boden im Sommer

Höhe	21 m	58 m	140 m	300 m
Minimum	3 <sup>h</sup> a.	5 <sup>h</sup> a.	8 <sup>h</sup> a.	10 <sup>h</sup> a.

Dies scheint trefflich mit der Ansicht von Espy-Köppen übereinzustimmen. Der Einfluss der Erwärmung des Erdbodens und der dadurch bedingten aufsteigenden Luftbewegung und Luftmischung schreitet von unten nach oben fort und, natürlich im gleichen Sinne, die Hemmung der Windgeschwindigkeit in den etwas höheren Schichten über dem Erdboden, die eine Consequenz davon ist.

Auch der tägliche Gang des Dampfdruckes auf dem Eiffelthurm im Vergleich mit jenem an der Erdoberfläche scheint damit in guter Übereinstimmung zu stehen. Der Dampfdruck erreicht oben in 300 m wie unten um 9h das Hauptmaximum, nimmt aber von 10h an oben viel rascher ab als unten, was für das nun lebhafter eintretende Herabsinken der Luftschichten oberhalb 300 m gedeutet werden kann. Bis 9h bringt die von unten aufsteigende Luft einen Zuwachs von Wasserdampf, sobald die Reaction aber in höhere Schichten hinaufgreift und die Luftschichte in 300 m nun auch mit herabsinkender trockenerer Luft von oben gemischt wird, nimmt dann der Dampfdruck auf dem Eiffelthurm rasch ab.

<sup>1</sup> Im Mittel derselben Jahre 1886-1890 wie für Blue Hill.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Angot hat in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. CXVII (1893, II) p. 1076, die Stundenmittel des Dampfdruckes in den Sommern 1890 bis 1892 für die Station beim Bureau Central und oben auf dem Eiffelthurm mitgetheilt.

Würde die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis 300 m hinaufreichen, dann müsste das Maximum der Windgeschwindigkeit unten an der Erdoberfläche auch schon um 10h a. eintreten, während es in der That erst nach 1h p. eintritt. Wir müssen also im Sinne dieser Theorie annehmen, dass die Mischung noch höher hinaufreicht, wogegen auch keinerlei Thatsachen oder aus anderen Erscheinungen abgeleitete Deductionen sprechen, während der eben erwähnte tägliche Gang des Dampfdruckes sehr deutlich dafür spricht. Wohl aber sprechen die Erscheinungen und Überlegungen dagegen, diesen Einfluss der Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der steigenden Erwärmung des Bodens bei Tage bis zu sehr grossen Höhen, sagen wir viel über 1000 m hinaufreichen zu lassen. Das Phänomen des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln darf darum nicht schlechthin mit jenem auf dem Eiffelthurm gleichgestellt werden.

Sonderbar erscheint der Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter. Man möchte im Verfolg der oben angeregten Gedanken wohl glauben annehmen zu dürfen, dass im Winter bei geringer Erwärmung des Bodens die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis zu geringen Höhen hinaufreicht, und auf die Luftschichte in der Höhe des Eiffelthurms nur mehr wenig Einfluss nehmen könnte.

Die Beobachtungen stimmen aber mit diesen naheliegenden Consequenzen gar nicht.

Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter.

Wenn man nun auch annimmt, dass uns hier die eigentlichen streng vergleichbaren Zwischenglieder fehlen, und dass wegen der spät erst beginnenden Erwärmung des Bodens im Winter die Reaction der unteren Luftschichten auf die höheren erst um 2<sup>h</sup> das Niveau von 300 m erreicht, und darüber wohl nicht mehr hinausgeht, was sehr plausibel scheint, so ist es doch auffällig und mit diesen Deductionen scheinbar in Widerspruch stehend, dass die Abschwächung der Windgeschwindig-

keit in 300 m Seehöhe im Winter nach den Beobachtungen auf dem Eisselthurm grösser ist als im Sommer, und dass einer Abnahme der Windstärke auf dem Eisselthurm von 142 cm nur eine Zunahme unten von 45 cm, d.i. weniger als ½ gegenübersteht, und doch sollte angenähert Gewinn und Verlust gleich sein, wenn sich im Winter der Lustaustausch zwischen dem Erdboden und 300 m abspielt. Den absoluten Werthen der Amplituden der täglichen Variation ist allerdings eine strenge Vergleichbarkeit nicht zuzuschreiben. Die grössere Abschwächung der Windstärke im Winter könnte vielleicht gerade dadurch erklärt werden, dass dann von oben keine Lust herabsinkt und wieder einen Zuwachs von Geschwindigkeit bringt.

Kehren wir nun zur Betrachtung des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Blue Hill zurück. Das Maximum der Windstärke tritt daselbst im Herbst, Winter und Frühling am Nachmittage ein, wie an der Erdoberfläche und zwar beziehungsweise um 1<sup>h</sup> p., 0<sup>1</sup>/<sub>2</sub><sup>h</sup> p. und 3<sup>h</sup> p., also mit zunehmender Tageslänge verspätet. Im Sommer dagegen tritt das entschieden hervortretende Maximum um Mitternacht ein, also wie auf dem Eiffelthurm; es macht sich aber daneben noch ein secundäres Maximum um 3<sup>h</sup> p. bemerkbar, so dass selbst im Sommer der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in 140 m über dem Boden noch eine Zwischenstellung einnimmt, zwischen jenem an der Erdoberfläche und jenem in 300 m über derselben. Eine Zunahme der Windstärke in der Nacht ist übrigens auch im Herbste, im Winter und im Frühling angedeutet.

Die Beobachtungen auf dem Blue Hill zeigen uns die interessante Thatsache, dass im Sommer das Maximum der Windstärke bei Nacht mindestens bis zum Niveau von rund 150 m herabreicht. Wir dürften aber hier der unteren Grenze schon ziemlich nahe sein, denn es tritt daneben noch ein secundäres Maximum um 3<sup>h</sup> Nachmittag ein, welches durch die von oben herabsinkenden stärker bewegten Luftmassen bedingt wird. Auch in 60 m (Boston) über dem Boden tritt das Maximum, hier aber das einzige entwickelte Maximum, zwischen 3<sup>h</sup> und 4<sup>h</sup> p. ein (die Abweichung vom Tagesmittel ist +89 cm pro Secunde). Im Winter ist, wie schon bemerkt, der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in 142 m relativer und

203 m absoluter Höhe ganz gleich jenem an der Erdoberfläche. Auf einem schlanken Thurme von gleicher Höhe dürfte dies nicht der Fall sein. Die, wenn auch geringe Oberfläche des Berges genügt wohl im Winter, um den täglichen Gang der Windstärke ähnlich zu beeinflussen, wie die Erdoberfläche in den Niederungen selbst. Vielleicht bringen uns Anemometer auf Thürmen, wie z. B. jenes auf dem Strassburger Münster, eine nähere Aufklärung darüber.

Die vorstehende kleine Untersuchung scheint mir demnach zu dem Resultat zu führen, dass die Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der Erwärmung des Erdbodens bei Tage und der dadurch entstehenden aufsteigenden und niedersinkenden Luftbewegungen, wie sie Espy und Köppen zur Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche annehmen, in der That stattfindet und im Sommer in unserem Klima bis zu 800—1000 m etwa hinaufreicht, im Winter kaum über 300 m.

Nach den Ergebnissen nächtlicher wissenschaftlicher Ballonfahrten des Münchner Vereins für Luftschiffahrt können an ruhigen, warmen Sommertagen die unteren Luftschichten bis zu mindestens 900 m hinauf die adiabatische Temperaturvertheilung annehmen, d. h. die aufsteigende und niedersinkende Luftbewegung in Folge der Erhitzung des Bodens erstreckt sich bis zu dieser Höhe. Dies stimmt sehr gut mit den obigen Darlegungen.

Da die Windgeschwindigkeit von der Erdoberfläche nach oben hin anfangs sehr rasch und dann immer langsamer zunimmt, und der Werth dieser Zunahme nach den Örtlichkeiten natürlich recht verschieden sein wird, so ist a priori wohl kaum möglich zu bestimmten Annahmen darüber zu gelangen, zu welchen Zeitpunkten das Minimum der Windgeschwindigkeit in Folge dieses Luftaustausches in den verschiedenen Höhen eintreten dürfte.

Die vorhin mitgetheilten Registrirungen der Windgeschwindigkeit in 21 m, 58 m, 142 m und 300 m zeigen wenigstens im Allgemeinen das zeitliche Vorrücken des Eintrittes des Minimums nach oben, und damit das Fortschreiten des Eingriffes der unteren Schichten in dieser Richtung.

Zum Schlusse will ich die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke für die verschiedenen Höhen hier zusammenstellen (x = 0 für Mitternacht, Centimeter pro Secunde)

Höhe	Winter
21 m	$34 \sin (236.5+x) + 12 \sin (57.0+2x)$
58 m	$41 \sin (247 \cdot 3 + x) + 19 \sin (89 \cdot 4 + 2x)$
142 m	$12 \sin (257 \cdot 1 + x) + 11 \sin (75 \cdot 2 + 2x)$
300 m	116 $\sin (86.0+x)+15 \sin (233 4+2x)$
	Sommer
21 m	78 $\sin(242 \cdot 2 + x) + 12 \sin(70 \cdot 1 + 2x)$
58 m	68 $\sin (239 \cdot 0 + x) + 25 \sin (53 \cdot 1 + 2x)$
142 m	$35 \sin (134 \cdot 0 + x) + 23 \sin (44 \cdot 2 + 2x)$
300 m	$124 \sin(95.9+x) + 32 \sin(28.3+2x)$

Auch in diesen Gleichungen tritt das Fortschreiten der Phasenzeiten, deren Verspätung von unten nach oben sehr schön zu Tage.

Höhe	Jahr
21 m	$60 \sin(240.5+x)+14 \sin(69.3+2x)$
58 m	69 $\sin(243 \cdot 9 + x) + 23 \sin(54 \cdot 7 + 2x)$
142 m	19 $\sin(205.5+x)+18 \sin(41.9+2x)$
300 m	116 sin $(86 \cdot 0 + x) + 16 \sin(233 \cdot 4 + 2x)$

Wir sind nun bei den Gipfelstationen angelangt, welche so viel Eigenthümliches im täglichen Gange der Windstärke zeigen, dass die Erklärung derselben grosse Schwierigkeiten macht.

Das Maximum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis das ganze Jahr bei Nacht ein, vom Herbst bis zum Frühling um 1<sup>h</sup>, im Sommer eigenthümlicher Weise erst um 3<sup>h</sup> Morgens. Es spielt da sicherlich die tägliche Periode der stürmischen Winde mit hinein, die von jener der ruhigen Tage, in der Niederung wenigstens, wesentlich abweicht, wie ich vor einiger Zeit ausführlicher gezeigt habe.<sup>1</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Hann, Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892. Diese Sitzungsber., Bd. CII, Abth. II. a. Februar 1893.

Ben Nevis, 1440 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	46	58	52	52
1 <sup>h</sup> a	52*	64*	62	57*
2	<b>5</b> 0	62	69	56
3	43	<b>5</b> 5	70*	49
4	31	42	65	36
5	17	28	55	20
6	6	15	40	4
7	<b>— 3</b>	4	24	—11
8	<b>—</b> 8	<b>— 4</b>	6	-22
9	<b>—</b> 9	10	10	30
10	<b>—</b> 9	15	-25	<b>—3</b> 3
	<b>-</b> 9	21	38	<b>—34</b> *
Mittag	<b>—10</b>	26	<b>—49</b>	33
1 <sup>h</sup> p	<del>15</del>	<b>—3</b> 5	55	-32
2	22	44	<b>—</b> 58	-31
3	30	53	<del>60*</del>	30
4	38	<b>—</b> 56*	<b>—57</b>	<b>—3</b> 0
5	<b>42</b> *	-55	52	<b>—27</b>
6	-41	48	-44	-23
7	34	33	-32	-14
8	-21	14	—17	<b>—</b> 3
9	<b>— 3</b>	8	О	11
10	16	30	18	27
11	33	48	36	41

Das Minimum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis, den Herbst ausgenommen, auffallend spät ein, im Winter erst um 5<sup>h</sup> Nachmittag, im Frühling um 4<sup>h</sup>, im Sommer um 3<sup>h</sup> p.; im Herbste aber schon um 11<sup>h</sup> Vormittags. Im Winter stehen die Epochen des Maximums und Minimums um 16 Stunden von einander ab, im Sommer nur um 12 Stunden. Von 8<sup>h</sup> Morgens bis 8<sup>h</sup> Abends inclusive ist die Windstärke auf dem Ben Nevis unter dem Mittel, die Maxima derselben sind dementsprechend stärker ausgeprägt als die Minima. Irgend welche theoretische Consequenzen vermag ich aus der täglichen Variation der Wind-

geschwindigkeit auf dem Ben Nevis nicht zu entwickeln. Vielleicht wäre in dieser Beziehung nur das Vorrücken der Epoche des Minimums vom Winter zum Sommer hervorzuheben.

Obir, 2140 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	0	45	107*	41
1 h a	-13	37	101	36
2	<b>—22</b>	30	91	31
3	<b>—25</b> *	25	79	28
4	21	21	64	27
5	14	19	48	26
6	<b>-</b> 7	16	29	23
7	0	11	5	16
8	1	1	<b>— 2</b> 0	6
9	<b>— 3</b>	12	<b> 48</b>	<del>- 8</del>
10	10	28	<b>— 76</b>	<b>—2</b> 6
11	-18	44	<b>—101</b>	-44
Mittag	-25	<b>58</b>	<b>—120</b>	59
1 <sup>h</sup> p	<b>27</b> *	<del></del> 67	—129 <b>*</b>	69
2	<b>—24</b>	—68 <b>*</b>	—128 <b>*</b>	<b>—70*</b>
3	<del></del> 15	61	—113	63
4	0	<del>46</del>	— 88	<b>47</b>
5	16	<del>2</del> 6	55	-28
6	27	<b>— 2</b>	15	<b>—</b> 6
7	42	19	22	15
8	45*	37	<b>5</b> 6	32
9	42	48	81	43
10	31	52*	98	47*
11	. 16	51	106	46

Auf dem Obirgipfel tritt das Maximum der Windstärke schon frühzeitig ein, am Abend zwischen 8<sup>h</sup> und 10<sup>h</sup>, nur im Sommer verspätet sich dasselbe bis gegen Mitternacht. Das Minimum tritt das ganze Jahr hindurch zwischen 1<sup>h</sup> und 2<sup>h</sup> Nachmittag ein. Im Winter zeigt sich ein secundäres Minimum um 3<sup>h</sup> Morgens und ein nur wenig hervortretendes zweites

Maximum um 8<sup>h</sup> Vormittag. Die tägliche Periode ist dann überhaupt schwach entwickelt, dagegen sehr stark im Sommer (mittl. Ordinaten im Winter 18 cm, Frühling und Herbst 35 cm, Sommer 74 cm). In theoretischer Beziehung bietet auch der tägliche Gang der Windstärke auf dem Obirgipfel nichts Bemerkenswertes. Er weicht recht wesentlich ab von jenem der beiden nächsten höheren Stationen, Säntis und Sonnblick, den ich schon früher besprochen habe, und der sich durch ein frühes Auftreten des täglichen Minimums der Windstärke auszeichnet.

Pikes Peak, 4308 m.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	39	112	75	88
1 h a	51	133	105	103
2	60	148	129	115
3	65 *	152*	143*	119*
4	63	143	140	111
5	54	119	120	92
6	37	83	82	59
7	14	33	33	17
8	11	<b>— 20</b>	<b> 20</b>	<b>— 30</b>
9	<b>—</b> 35	<b>—</b> 72	<b>— 70</b>	<b>— 76</b>
10	55	<b>—115</b>	108	113
11	<b>—67</b>	146	131	-138
Mittag	<del>71*</del>	—163 <b>*</b>	—136 <b>*</b>	—147 <b>*</b>
1 <sup>h</sup> p	-67	<b>—159</b>	<b>—127</b>	<b>—13</b> 9
2	<b></b> 57	<u>-144</u>	—106	119
3 <sup>h</sup> p	<b>43</b>	-120	80	- 90
4	-28	<b>—</b> 91	<b>—</b> 55	<b>—</b> 58
5	—16	<b>—</b> 61	— 35	<b>— 27</b>
6	<b>—</b> 5	<b>— 32</b>	<b>—</b> 21	_ 1
7	2	<b>—</b> 7	— 12	19
8	8	17	4	35
9	13	40	7	47
10	20	63	24	60
11	29	87	47	73

In der neuen Reihe von Windregistrirungen auf dem Obirgipfel tritt aber, wenigstens im Mittel eines Jahres (1893), das Minimum der Windstärke zwei Stunden früher ein und der tägliche Gang nähert sich dadurch etwas jenem auf dem Säntis und Sonnblick.

Von allen hohen Gipfelstationen zeichnet sich die Station auf Pikes Peak durch den regelmässigsten und am stärksten ausgeprägten täglichen Gang der Windgeschwindigkeit aus. Das Maximum tritt das ganze Jahr hindurch um 3<sup>h</sup> Morgens auf, das Minimum dessgleichen um Mittag. Die Amplituden sind sehr gross, im Frühling ist der Unterschied zwischen Maximum und Minimum über 3·1 m, im Sommer 2·8 m, im Herbst 2·7 m (die mittleren Ordinaten sind: Winter 38 cm, Frühling 94 cm, Sommer 75 cm, Herbst 78 cm). Die Windstärke bleibt von 8<sup>h</sup> Morgens bis gegen 7<sup>h</sup> Abends unter dem Mittel. Damit haben wir die Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den einzelnen Berggipfeln abgeschlossen.

Nachdem wir aber derart jede Station für sich in Bezug auf die tägliche Periode und deren Modification nach den Jahreszeiten einer Betrachtung unterzogen haben, empfiehlt es sich nun auch nachzusehen, in welcher Weise zu jeder Jahreszeit die Änderung der täglichen Variation der Windstärke mit der Höhe vor sich geht, da möglicher Weise dabei einige bemerkenswerthe Thatsachen sich ergeben könnten, die sich für die Theorie von einigem Werthe erweisen.

Ich habe desshalb in den folgenden fünf Tabellen den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für jede einzelne Jahreszeit separat zusammengestellt mit Hilfe von Gipfelstationen und einer Station an der Erdoberfläche, als welche Paris genommen worden ist. Für die vier Jahreszeiten sind die berechneten Werthe eingesetzt, nur für das Jahr wurden die unmittelbar aus den Registrirungen sich ergebenden Mittelwerthe genommen, die desshalb auch, wie man sogleich bemerken wird, noch einige Unregelmässigkeiten aufweisen, die man aber nicht mehr zu unterdrücken braucht. Wenn eine regelmässige Verschiebung der Epochen des Eintrittes der Maxima und namentlich der Minima mit zunehmender Seehöhe stattfinden würde, so müsste dies in den folgenden Tabellen zu Tage treten.

D. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Winter.

_									
	Ort	Paris	Blue Hill	Eiffel- thurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonn- blick	Pikes Peak
	Höhe abs	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
	Höhe rel	21	140	305	(1400)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
			<u> </u>		<del> </del>	·			
	Mitternacht	- 18	_ 1*	46	46	0	10	20	39
	1	_ 20	_ 1	36	52*	- 13	- 14	27	51
	2	- 23	<b>–</b> 3	34*	50	- 22	17	31*	60
	3	27	_ 7	40	43	25*	18*	29	65*
	4	- 30	- 11	52	31	- 21	- 17	21	63
	5	_ 31*	- 14*	65	17	- 14	- 15	8	54
	6	29	- 14	72*	6	_ 7	- 14	_ 7	37
	7	_ 23	_ 11	68	3	0	- 11	<b>—</b> 21	14
	8	13	_ 5	48	8	1	- 10	31	11
	9	0	3	15	_ 9	- 3	_ 7	<b>—</b> 37*	_ 35
	10	15	12	_ 28	- 9	- 10	_ 5	35	_ 55
	11	28	19	- 73	_ 9	- 18	_ 2	_ 29	_ 67 !
	Mittag	38	23	-112	_ 10	- 25	2	18	- 71*
	1	44	23*	-137	<b>— 15</b>	_ 27*	6	_ 7	- 67
	2	45*	20	- 142*	- 22	_ 24	11	3	<b>— 57</b>
Ì	3	40	13	-127	- 30	- 15	16	9	_ 43
	4	31	5	- 94	- 38	0	19	11*	_ 28
	5	20	- 2	51	<b>— 42*</b>	16	22*	9	_ 16
	6	9	- 8	- 6	- 41	27	22*	5	_ 5
	7	- 1	- 11	33	<b>— 34</b>	42	19	0	2
	8	9	- 12*	60	- 21	45*	15	_ 2	8
	9	- 13	- 9	72*	- 3	42	9	<b>–</b> 1	13
	10	16	- 6	70	16	31	3	4	20
	11	_ 17	- 3	59	33	16	4	11	29
	Mittel	.22	•10	·64	•24	·18	•12	·16	.38
İ									
									. !
١						,			i

E. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Frühlinge.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffel- thurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonn- blick	Pikes Peak
Höhe abs	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
			<u> </u>	<u>-</u>	<u> </u>		<u> </u>	
Mitternacht	- 56	_ 22	130*	58	45	21	35	112
1	<b>—</b> 63	19	127	64*	37	10	17	133
2	- 69	17	116	62	30	1	_ 3	148
3	<b>—</b> 71*	_ 20	96	55	25	- 6	_ 25	152*
4	_ 70	- 27	69	42	21	11	_ 44	143
5	<b>— 62</b>	<b>— 36</b>	36	28	19	_ 13	59	119
6	_ 49	- 44	- 1	15	16	- 14	<b>—</b> 67	83
7	- 32	48*	39	4	11	<b>—</b> 14	<b>–</b> 68*	33
8	- 9	- 46	75	- 4	1	<b>—</b> 15	<b>—</b> 61	_ 20
9	16	- 36	106	10	_ 12	- 18	<b>—</b> 50	_ 72
10	40	18	-128	<b>—</b> 15	- 28	_ 22	<b>— 35</b>	-115
11	61	6	-139	- 21	<b>— 44</b>	<b>— 26</b>	<b>— 20</b>	-146
Mittag	77	31	141*	- 26	58	29*	— в	<b>—163*</b>
1	86	53	-131	<b>— 35</b>	<b>—</b> 67	- 29*	5	<b>—159</b>
2	86*	68	-112	- 44	68*	25	14	-144
3	79	73*	<b>— 85</b>	- 53	<b>— 6</b> 1	- 17	21	- 120
4	67	68	55	<b>– 56*</b>	- 46	- 6	27	<b>- 91</b>
5	48	55	- 21	<b>—</b> 55	<b>— 26</b>	8	32	<u> </u>
6	28	35	12	48	<b>– 2</b>	21	38	32
7	9	14	43	<b>— 33</b>	19	33	45	_ 7
8	- 8	- 4	71	- 14	37	39	50	17
9	- 24	- 17	95	8	48	42*	54*	40
10	<b>— 37</b>	_ 24	113	30	52*	<b>3</b> 9	53	63
11	<b>— 47</b>	25	125	48	51	31	47	87
Mittel	50	34	86	34	34	20	36	94
					••			
1		l	l			İ		

F. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Sommer.

1	i	l			<u> </u>	1		- ·
Ort	Paris	Blue Hill	Eiffel- thurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonn- blick	Pikes Peak
Höhe abs	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	- 58	41*	138	52	107*	66	39	75
1	<b>— 64</b>	40	143*	62	101	69*	30	105
2	- 69	32	132	69	91	69	19	129
3	- 71*	17	106	70*	79	63	5	143*
4	<b>— 69</b>	2	67	<b>6</b> 5	64	51	_ 10	140
5	- 61	- 23	21	55	48	33	- 26	120
6	- 48	- 41	_ 28	40	29	9	- 41	82
7	<b>—</b> 30	_ 52	71	24	5	19	54	33
8	_ 7	56*	-104	6	_ 20	<b>— 46</b>	63	_ 20
9	19	_ 52	-124	_ 10	<b>— 48</b>	<b>— 70</b>	<b>— 68*</b>	_ 70
10	44	- 41	<b>—130*</b>	<b>— 25</b>	_ 76	<b>– 87</b>	- 66	108
11	65	_ 25	—123	- 38	-101	- 95*	_ 59	-131
Mittag	81	_ 9	-108	- 49	-120	- 93	46	136*,
1	88*	4	89	55	-129*	- 83	- 30	127
2	87	13	68	- 58	-128	- 64	- 11	-106
3	79	16	- 50	— <b>6</b> 0*	-113	43	7	<b>— 80</b>
4	64	15	- 34	<b>—</b> 57	- 88	_ 20	24	_ 55
5	46	11	19	- 52	<b>—</b> 55	1	38	_ 35
6	25	9	_ 2	- 44	- 15	19	48	_ 21
7	6	8	17	- 32	22	32	54	12
8	_ 12	11	41	17	56	42	56*	_ 4
9	27	19	68	0	81	49	55	7
10	_ 39	28	96	18	98	56	52	24
11	<b>— 49</b>	37	121	36	106	61	47	47
Mittel	50	25	79	41	74	52	39	75
	-							
				! '		F		<u> </u>
		i			!	ĺ		
į.	i	I	l	İ	i	1	i	1 .

G. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Herbste.

Ort	Paris	Blue	Eiffel-	Ben	Obir	Säntis	Sonn-	Pikes
		Hill	thurm	Nevis			blick	Peak
Höhe abs	ĺ	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 27	- 3	98	52	41	14	- 15	88
1	- 32	_ 2*	88	57*	36	7	- 19	103
2	<b>—</b> 38	- 5	78	56	31	2	- 19*	115
3	<b> 4</b> 5	- 9	71	49	28	0	- 16	119*
4	<b>—</b> 50*	16	64	36	27	- 1	- 13	111
5	<b>— 5</b> 0	<b>— 20</b>	55	20	26	- 1	- 9	92
6	<b>— 43</b>	- 21*	40	4	23	0	- 8	59
7	30	_ 17	17	- 11	16	_ 2	- 8	17
8	- 11	8	14	- 22	6	<b>—</b> 5	- 11	<b>— 30</b>
9	11	5	- 52	- 30	- 8	- 10	- 14	- 76
10	34	18	<b>— 92</b>	- 33	- 26	16	- 17*	-113
11	54	31	- 127	34*	- 44	<b>– 23</b>	- 16	- 138
Mittag	66	38	151	<b>—</b> 33	59	<b>— 28</b>	13	147*
1	70*	40*	161*	- 32	69	- 29*	- 6	-139
2	66	35	151	- 31	<b>— 70*</b>	<b>— 2</b> 6	4	119
3	54	24	—125	- 30	63	- 19	16	- 90
4	38	11	— 84	- 30	<b>— 47</b>	9	26	<b>— 58</b>
5	20	_ 2	- 36	27	<b>— 28</b>	3	33	_ 27
6	4	- 14	13	_ 23	- 6	14	35*	- 1
7	_ 8	_ 21	56	_ 14	15	23	33	19
8	- 16	_ 22*	87	_ 3	32	29	26	35
9	21	20	106	11	43	29*	15	47
10	_ 22	- 14	112*	27	47*	27	3	60
11	24	_ 8	108	41	46	21	_ 7	73
Mittel	35	17	83	29	35	14	16	78
11111111	33	11	85	2.0	00	14	10	'0
		i		t				
		Ì	1					
		İ	ļ					
1		l		l	l			

H. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).

Ort	Par	ris		ue ill	Eiffel- thurm		en evis	0	bir	Sä	ntis		nn- ick	Pike Pea	
Höhe abs	54	4	2	03	338	14	143	21	140	25	000	31	10	431	0
Höhe rel	2	1	1	40	305	(14	140)	(16	3 <b>0</b> 0)	(20	)00)	(25	500)	(270	00)
	Ī							<u>                                       </u>		<u>-</u>					-
Mitternacht		39		11	100		47		42		29		20	٤	9
1	<u> </u>	45	_	7	84		47		38		23	_	2	٤	8
2	- :	50	_	4	76		59		30		9		6	10	9
3	- :	51	_	9	75		70*		25		20		10	11	4*
4	- :	52*		15	63		66		26		1	_	13	10	)1
5	- ·	49	_	20	57		0		20	_	2	_	20	8	31
6	- ·	<b>4</b> 6	_	26	38		10		11	_	12	_	32	•	30
7		31	_	41*	6		7	-	1	-	3	_	46		7
8	_	11	-	27	- 49	-	6	_	13	-	24	_	47*	- 8	38
9		10	_	7	<b>— 90</b>	_	3	_	28	_	31	_	38	- 7	79
10	;	38	_	5	-106		18	-	42		41*		42	—11	18
11	;	55		4	115	-	24	_	54		39	_	28	14	12*
Mittag	(	65		33	-112*		37	-	68	-	33		1	12	24
1	(	69		34	-115	-	44*	_	73*	_	34		2	-10	7
2	٠	70*		41*	-109	_	44	_	<b>65</b>	-	36		19	8	37
3	:	57		40	<b>— 9</b> 6	_	29	-	58	-	10		18	<del>(</del>	34
4	;	53		14	<b>—</b> 69	_	28	_	43		4		6	;	53
5	:	39	_	3	- 44	-	54*	_	13		12		28	-	37
6		19	_	13	- 8	-	48		16		26		23	_	6
7	-	2		3	30	-	45		44		26		45*		5
8	_	14	_	4	76	-	2		56		25		29	:	24
9	_	19		1	97		16		55*		37*		30		43
10	-	29	-	5	106		21		48		33		32	:	54
11	-	36		2	110*		34		49		24		21	(	39
Mittel		40		15	76		32		38		22		23	;	72
				-							-		-		
1	l		l		l	l		ı		l		l		1	i

Indem wir diese Tabellen einer Discussion unterziehen, wollen wir uns dabei auf die höheren Gipfelstationen beschränken, da wir den Verlauf der täglichen Periode in den unteren Schichten bis zu 300 m hinauf schon eingehender behandelt haben.

Wir glaubten aber die Zahlenwerthe des täglichen Ganges für diese unteren Schichten in die synoptischen Tabellen doch aufnehmen zu müssen, da der Eiffelthurm das ganze Jahr hindurch, Blue Hill wenigstens im Sommer sich den hohen Schichten in Bezug auf den täglichen Gang anschliesst und man derart mit einem Blicke ersehen kann, dass dann von 140 m (relativ) bis zu 4300 m hinauf der tägliche Gang der Windstärke nahezu der gleiche ist, und nur die dem Boden nächsten Luftschichten den umgekehrten Gang zeigen. Man sieht da auch gleich, dass es nicht angeht, den täglichen Gang in den hohen oberen Schichten als das Ergebniss der Reaction der unteren Schichten auf dieselben zu betrachten, weil Ursache und Wirkung in einem schreienden Widerspruche stehen würden.

Im Allgemeinen bemerkt man zunächst in diesen Tabellen, dass je zwei oder drei Stationen mit einander übereinstimmen, während die übrigen von denselben abweichen. Es müssen also die localen Verhältnisse von grossem Einflusse sein. Nur im Sommer ist die Übereinstimmung aller fünf Gipfelstationen über 1400 m eine recht befriedigende.

Wir wollen desshalb auch darauf verzichten, die Tabellen im Einzelnen durchzugehen. Um nun aber doch zu einigen allgemeineren Sätzen in Bezug auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Schichten der Atmosphäre zu gelangen, haben wir uns erlaubt, Mittelwerthe zu bilden für das Höhenintervall Ben Nevis bis Pikes Peak inclusive, d. i. für die Höhenschicht von 1400 m bis 4300 m. Da die absoluten Windgeschwindigkeiten und damit auch die Grösse der Abweichungen vom Mittel nicht strenge vergleichbar sind, können allerdings diese Mittelwerthe keine grössere Bedeutung beanspruchen. Sie mögen nur dazu dienen, Fingerzeige dafür zu geben, wie im Allgemeinen die tägliche Variation der Windstärke in diesen hohen Regionen vor sich geht.

Im Folgenden soll in diesem Sinne eine Übersicht über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Regionen der Atmosphäre gegeben werden.

Täglicher Gang im Winter (1400-4300 m).

Mittlere Ordinate 14 cm, Amplitude 46 cm. Das Maximum tritt zwischen 1<sup>h</sup> und 2<sup>h</sup> Morgens ein, das Minimum zwischen 11<sup>h</sup> und Mittag, fällt also noch auf den Vormittag.

Täglicher Gang im Frühlinge (1400-4300 m).

Mittlere Ordinate 35 cm, Amplitude 110 cm. Das Maximum tritt um Mitternacht ein, das Minimum kurz vor 1<sup>h</sup> Nachmittag.

Täglicher Gang im Sommer (1400-4300 m).

Mîttlere Ordinate 51 cm, Amplitude 164 cm. Das Maximum tritt um 2<sup>h</sup> Morgens ein, das Minimum fällt genau auf den Mittag.

Im Sommer ist der tägliche Gang der Windstärke durch das ganze Höhenintervall von 300 m bis 4300 m sehr gleichförmig und ein Mittelwerth für diese ganze Höhenschicht hat desshalb reelle Bedeutung.

Stellen wir die Gleichungen des täglichen Ganges für diese Jahreszeit in den verschiedenen Höhen zusammen, so erhalten wir:

Constanten	des	täglich	en	Ganges	im	Sommer 1
	Secunden).					

		x = 0 fi	ir 11 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> <sup>h</sup>	p.	x = 0 für Mitternacht					
Höhe	$p_1$	$q_1$	p <sub>2</sub>	$q_2$	$A_1$	$A_2$	$a_1$	$a_2$		
300 n	ı120	<b>—29</b>	7	31	96	28	124	32		
1440	43	48	0	5	50	17	65	5		
2140	110	36	<b>— 2</b>	18	79	202	115	18		
2500	80	6	-15	6	94	292	80	17		
3100	48	39	<b>—</b> 5	5	136	331	62	7		
4300	99	64	<b>—38</b>	22	64	316	118	44		
Mittel	83	14	<b>— 9</b>	8.5	87 · 8	328 · 4	84.5	12.4		

Für den Sommer gilt demnach von 300 m bis 4300 m sehr angenähert die Gleichung

$$84.5 \sin (87.8+x) + 12.4 \sin (328.4+2x)$$
.

In einer mittleren relativen Höhe von 1750 m circa dürfte hiernach das Minimum der Windgeschwindigkeit im Sommer noch am Vormittage zwischen 11<sup>h</sup> und Mittag eintreten, denn die Abweichungen vom Tagesmittel sind:

Täglicher Gang im Sommer (1750 m).

Im Herbste wird der tägliche Gang in den verschiedenen Höhenstufen wieder viel unregelmässiger und es ist namentlich der Sonnblick, der am meisten von den übrigen Stationen abweicht. Soweit die Mittelbildung für diese Jahreszeit gestattet sein mag, erhält man folgenden Gang:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Werthe von  $A_1$  und  $A_2$  und  $a_1$  und  $a_2$  sind mit den noch nicht abgerundeten Werthen von p und q gerechnet.

Täglicher Gang im Herbste (1400-4300 m).

Mittlere Ordinate 30 cm, Amplitude 93 cm. Das Maximum tritt um 2<sup>h</sup> Morgens ein, das Minimum um Mittag. Der tägliche Gang im Herbste stimmt (im Mittel) mit jenem im Sommer überein.

Täglicher Gang im Jahresmittel (1400-4300 m).

Mittlere Ordinate 32 cm, Amplitude 104 cm. Das Maximum tritt im Jahresmittel bald nach Mitternacht ein. Der nicht ausgeglichene Gang zeigt in der Nacht noch einige Unregelmässigkeiten. Aber auch nach der gewöhnlichen Ausgleichung fällt das Maximum zwischen Mitternacht und 1<sup>h</sup> a. Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Jahresmittel und im Durchschnitte aus allen Stationen um 11<sup>h</sup> Vormittag ein.

Da die Epoche des Eintrittes des Minimums der täglichen Windgeschwindigkeit für die Theorie das grösste Interesse hat, so wollen wir recapitulirend constatiren, dass, den Frühling ausgenommen, dasselbe im Mittel aller Stationen in allen übrigen Jahreszeiten schon vor dem Mittage eintritt und dass dies auch für das Mittel des ganzen Jahres gilt.

Wir wollen nun zum Schlusse hier noch die Constanten der Gleichungen zusammenstellen, welche zur Berechnung der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln in den Tabellen D, E, F, G gedient haben. Die Abweichungen im Mittel des Jahres (Tabelle H) sind ohne irgend eine Ausgleichung geblieben.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde).

							<u>.</u>	
	$p_1$	$q_1$	$p_{\frac{1}{2}}$	<b>9</b> 2	$A_1$	A2	a <sub>1</sub>	$a_2$
			Par	is, Bure	au Cent	ral		
Winter	-28	<u>_19</u>	+10	+ 7	236 5	57.0	34	12
Frühling	<b>—67</b>	-39	+11	+ 4	239 · 8	69 · 2	77	11
Sommer	69	<b>—37</b>	+12	+ 4	242.0	70 · 1	78	12
Herbst	46	-24	+20	+ 5	242 · 8	77 • 1	52	20
Jahr	_52·5	<b>—29·7</b>	+13.5	+ 5.0	240.5	69.3	60.3	14.1
				Eiffel	thurm			
Winter	+ 79	+39	33	-43	63.7	217.4	88	<b>5</b> 5
Frühling	+135	_ 7	_ 5	+ 5	92 8	316 · 1	135	8
Sommer	+123	-13	+15	+28	95.9	28.3	124	32
Herbst	+125	+13	-27	-27	83.8	224.7	126	38
Jahr	+115.5	+ 8.0	12.5	- 9.2	86.0	233 · 4	115.8	15.5
				Blue	Hill 1			
Winter	-11	_ 4	+10	+ 6	257 · 1	75.2	12	11
Frühling	-21	-43	- 3	+27	213.7	9.5	48	27
Sommer	+28	-21	+11	+20	134.0	44.2	35	23
Herbst	<b>—20</b>	- 6	+15	+12	260 · 4	66 · 7	21	19
Jahr	- 6.0	-18.5	+ 8.2	+16.5	205 · 5	41.9	19·4	18.2
				Ben	Nevis			
Winter	+28	+24	+18	+ 6	49.9	70.8	37	19
Frühling	+42	+33	+16	+ 1	51.6	86·1	54	16
Sommer	+49	+42	+ 2	+ 5	49.6	17.4	65	5
Herbst	+43	+13	+ 9	+ 9	72.6	45.3	45	13
Jahr	+40.5	+28.0	+11.3	+ 5.2	55.3	65 • 2	49 · 2	12.4
1	1	I	i		1		1	

 $<sup>^{1}</sup>$  Die p und q für x=0 für  $11^{1}/_{2}{}^{\rm h}$  p., die Winkelconstanten für x=0 um Mitternacht.

			1		_			
	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>q</i> <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	92	$A_1$	Ag	<i>a</i> <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>
				Obi	ir* 1			
Winter	+ 14	_17	7	_22	147 · 4	212.2	22	23
Frühling	+ 50	+16	_ 2	-19	79.8	200 · в	52	19
Sommer	+110	+36	_ 2	-18	79 · 1	202.3	115	18
Herbst	+ 48	+20	_ 4	_19	74.6	207 · 7	52	19
Jahr	+55.5	+13.7	_ 3 7	_ 19.5	83.6	205.8	57.2	19.9
		!	Obir*	1893 (ne	ue Aufs	stellung)		
Jahr	+90	+14	-18	_ 2	88 • 4	279.0	91	18
			ı	Sän	tis*			
Winter	_ 3	-18	_ 4	_ 2	198 · 2	257 · 8	19	4
Frühling	+27	-14	- 1	_12	124.9	197 · 8	30	12
Sommer	+80	+ 6	15	+ 6	93.6	291 · 9	80	17
Herbst	+21	- 4	- 4	-11	109 · 4	215.2	22	12
Jahr	+31.2	<b>—</b> 7·5	- 6.0	- 4.7	111.0	246.9	32 · 1	7.6
		<u>'</u>	<u>'</u>	Sonnt	olick*		<u>-</u>	
Winter	+20	_ 3	- 4	+19	106 · 4	2 · 8	20	19
Frühling	+27	<b>—</b> 50	+14	+ 2	159.0	81.9	56	14
Sommer	+48	<b>—39</b>	- 5	+ 5	135 · 8	331.0	62	7
Herbst	+ 2	-22	-13	- 4	182 · 4	268 · 3	22	14
Jahr	+24.5	<b>—28</b> ·5	_ 2.0	+ 5.5	147.2	355.0	37 · 4	5.8
						1		

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Bei den mit \* versehenen Stationen ist für die p und q die Zeit von  $11^{1}/2^{h}$  p. an gezählt (Stundenintervall 11<sup>h</sup> bis Mitternacht), die Winkelconstanten sind aber auf die Zählung von Mitternacht an reducirt. Bei den übrigen Stationen gelten auch die p und q für x = 0 um Mitternacht.

	$p_1$	$q_1$	$p_2$	$q_2$	$A_1$	$A_2$	$a_1$	a <sub>2</sub>
				Pikes	Peak*			
Winter	+ 52	+28	-18	+ 7	69.3	305 · 2	59	19
Frühling	+127	+74	-28	+ 9	67 · 2	303 · 1	147	29
Sommer	+ 99	+64	-38	+22	64.0	315.6	118	44
Herbst	+112	+45	-33	- 2	75.6	281 · 3	121	33
Jahr	+97.5	+52.7	-29.2	+ 9.0	69 · 1	302 · 1	110.9	31.3

Wenn wir uns jetzt fragen, inwieweit die im Vorstehenden eingehend discutirten Beobachtungsergebnisse über die tägliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln von 1400 m bis zu 4300 m Seehöhe einen bestimmten Hinweis enthalten auf die derselben zu Grunde liegenden Ursachen, so müssen wir bekennen, dass wir einen solchen nicht haben finden können. Die Aussagen der vorstehenden Tabellen verhalten sich im Gegentheile negativ gegenüber den bisher geäusserten Ansichten über die Ursache der Erscheinung.

Der frühe Eintritt des Minimums der täglichen Windstärke spricht nach meinem Dafürhalten entschieden gegen die Annahme, dass es die an den Bergseiten aufsteigenden Thalwinde sind, welche die Abnahme der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln bewirken.

Es ist ferner auch die Ansicht ausgesprochen worden, dass infolge der täglichen Wanderung des Maximums der Erwärmung von Osten nach Westen in der Höhe ein wenn auch geringer, in gleicher Richtung wandernder Gradient entsteht, der in der Höhe eine Tendenz zu Ostwinden am Vormittage und eine Tendenz zu Westwinden am Nachmittage zur Folge hat. Die Ostwinde müssten hiernach das Maximum ihrer Stärke am Vormittage haben, die Westwinde am Nachmittage. In ähnlicher Weise müssten die Südwinde bei Tag verstärkt, die Nordwinde geschwächt werden.

Es ist wohl an sich recht unwahrscheinlich, dass ein merklicher derartiger Gradient entstehen kann, weil die Tempe-

raturdifferenzen zwischen Ost und West durch zu grosse Entfernungen getrennt sind, als dass ein wirksamer Temperaturgradient entstehen könnte. Aber es immer gut, in solchen Fällen auch die Erfahrung zu Rathe zu ziehen.

Herr Dr. Pernter hat sich in dankenswerther Weise der grossen Mühe unterzogen, für jede der acht Windrichtungen und für die Stationen Sonnblick, Säntis und Obir den täglichen Gang der Geschwindigkeit abzuleiten. Ich habe mit Hilfe der von ihm auf vier Richtungen reducirten respectiven Werthe die folgende Tabelle K berechnet, indem ich Mittelwerthe nahm und selbe nach der Bessel'schen Formel berechnete. Wenn ein derartiger Einfluss auf die tägliche Periode der verschiedenen Windrichtungen vorhanden ist, so muss er für alle Berggipfel gelten.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die von Dr. Pernter zuerst vorgenommenen Rechnungen auch auf die Windregistrirungen anderer Berggipfel ausgedehnt werden möchten und dass mehrjährige Aufzeichnungen denselben zu Grunde gelegt werden.

Der Nord- und der Ostwind haben das Hauptmaximum ihrer Stärke Abends zwischen 8h und 9h, ein secundäres Maximum um 5h Morgens und das Minimum ihrer Stärke um 1h Nachmittags. Der Südwind weht am kräftigsten um 9h Abends, am schwächsten um 8h Morgens; der Westwind erreicht seine grösste Stärke um Mitternacht und ist am schwächsten um 1h Nachmittags. Ein entschiedener Gegensatz im täglichen Gange ihrer Stärke ist bei den entgegengesetzten Windrichtungen nicht vorhanden; eine Umkehrung des Ganges zwischen West und Ost, wie sie wohl bestehen müsste, wenn die erwähnte Ursache der täglichen Periode der Windstärke auf Berggipfeln zu Grunde liegen würde, ist nicht zu bemerken. West- und Ostwind erreichen das Minimum ihrer Stärke um 1<sup>h</sup> Nachmittags und das Maximum derselben in der Nacht, und beim Nordwind ist dasselbe der Fall. Der Südwind weicht am meisten von dem allgemeinen Mittel und von dem Verhalten

<sup>1 »</sup>Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick«. Denkschriften der Wiener Akademie, LXVIII. Bd., December 1890, S. 210.

K. Täglicher Gang der Windstärke für jede der vier Hauptwindrichtungen. Centimeter pro Secunde.

Zeit	N	Е	S	w	N	Е	s	w	Zeit
	Beoba	chtet				В	erechn	et 1	
Mittern.—1	21	1	23	45	21	5	23	48	Mittn.
1- 2	23	6	9	38	18*	5*	15	41	1
2- 3	21	12	_ 7	24	20	9	4	30	2
3— 4	24	18	—18	11	21	16	- 6	17	3
4- 5	31	33	-19	_ 2	25	23	16	4	4
5 6	32	36	-26	11	26*	28*	26	_ 7	5
6 7	25	26	29	<b>—</b> 15	23	27	-33	15	6
7— 8	3	10	36	<b>—2</b> 5	13	21	-38	-21	7
8 9	-20	7	41	-29	3	7	<b>-40*</b>	-25	8
9—10	-41	-37	43*	<b>—</b> 35	<b>2</b> 0	-10	-38	-27	9
10-11	54	<b>—49*</b>	38	27	<b>-4</b> 0	-28	-34	-28	10
11-Mittag	57	<b>- 49*</b>	22	-24	56	<b>—44</b>	-27	-29	11
0 1	-72*	<b>—26</b>	<b>— 9</b>	26	<b>—6</b> 5	53	18	-31	Mittag
1- 2	-52	33	0	-28	66 <b>*</b>	<b>—53*</b>	<b>— 9</b>	-32*	1
2 3	-43	-41	5	<b>—37*</b>	<b>—5</b> 5	46	0	31	2
3 4	-27	-48	15	33	40	-31	9	-29	3
4 5	<b>—</b> 7	- 26	20	-23	19	13	17	23	4
5 6	9	13	22	— в	3	5	23	-13	5
6— 7	28	44	26	13	21	20	29	<b>— 2</b>	6
7— 8	39	45*	34	24	35	28	33	12	7
8 9	43*	22	38*	32	38	30*	35	26	. 8
9—10	34	19	37	39	39*	25	35*	38	9
1011	21	8	32	44	34	18	33	47	10
11-Mittern.	17	7	27	49*	27	11	29	50*	11
Mittel	31	24	27	26	30	23	24	26	Mittel

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Gleichungen für den täglichen Gang sind:

N...... 43 sin (89·2+x)+24 sin (255·6+2 x)

E..... 29 sin (82·4+x)+25 sin (252·0+2x)

S...... 37  $\sin (146 \cdot 4 + x) + 3 \sin (55 \cdot 9 + 2x)$ 

W ..... 40 sin  $(100 \cdot 0 + x) + 10$  sin  $(124 \cdot 0 + 2x)$ 

666 J. Hann,

der anderen Winde ab durch den frühen Eintritt des Minimums seiner Stärke, schon um 8<sup>h</sup> Morgens.

Es müssten noch von mehr Berggipfeln ähnliche Berechnungen vorliegen, um der Ursache dieses frühen Minimums grössere Bedeutung beilegen zu können; Herr Dr. Pernter hat auch nur zweijährige Beobachtungen der Rechnung unterziehen können. Im Widerspruche mit der Annahme einer Verstärkung der Winde durch die infolge der täglichen Wanderung der wärmsten Erdstellen bewirkte Verlagerung der oberen Gradienten steht die Thatsache, dass der Westwind am Nachmittage mehr an Stärke einbüsst als der Ostwind; es müsste umgekehrt sich verhalten. Der Ostwind müsste das Minimum seiner Stärke am späten Nachmittage, der Westwind am frühen Vormittage haben. Das ist aber nicht der Fall, die Epoche des Minimums fällt für beide auf 1<sup>h</sup> Nachmittags. Im grossen Ganzen zeigt jede der vier Hauptwindrichtungen denselben täglichen Gang ihrer Stärke, d. i. jenen, den wir als den allgemein in der Höhe herrschenden gefunden haben. Ich glaube demnach nicht, dass man in dieser Tabelle eine Bestätigung der Ansicht finden kann, dass die oberen Gradienten für Ostwinde am Morgen, für Westwinde am Nachmittage verstärkt werden infolge der täglichen Wanderung der Richtung, nach welcher hin die wärmste Erdstelle liegt. Die Unterschiede der Erwärmung zwischen hinlänglich benachbarten Erdstellen, die aus dieser Quelle stammen, sind offenbar viel zu gering, d. h. der Temperaturgradient ist zu klein, um merkliche obere Druckgradienten hervorzubringen.

Für ganz entschieden halte ich aber die Frage doch noch nicht; man müsste, wie schon bemerkt, den bezüglichen Rechnungen eine grössere Ausdehnung geben und wohl besser nur auf den Sommer beziehen. Bemerkenswerther Weise habe ich vor langer Zeit schon aus den Windregistrirungen auf dem Dodabetta Peak in Südindien, 2643 m Seehöhe, ein Resultat erhalten, welches für eine Verstärkung der Ostwinde am Vormittage und der Westwinde am Nachmittage sprechen könnte. Die von November bis Mai herrschenden ENE-Winde erreichen um 9<sup>h</sup> und 10<sup>h</sup> Vormittags das Maximum ihrer Stärke, das Minimum aber in der Nacht; die westlichen Monsunwinde von

Juni bis October erreichen das Maximum ihrer Stärke am Abende, das Minimum um 1<sup>h</sup> und 2<sup>h</sup> Nachmittags. Der Ostmonsun hat einen fast entgegengesetzten täglichen Gang der Stärke, wie der Westmonsun.<sup>1</sup>

Wenn man also nicht annehmen will, und ich glaube es stehen doch manche Bedenken dieser Annahme entgegen, dass die oberen Theile des Berggipfels durch ihre Erwärmung auf das Anemometer auf dem Gipfel selbst in analoger Weise einwirken, wie die Erdoberfläche auf das Anemometer auf dem Eiffelthurm, so sehe ich zunächst keine andere plausible Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln.

Für diese Annahme würde sprechen die starke Erwärmung der Bergoberfläche im Sommerhalbjahre, welche durch die grosse tägliche Temperaturamplitude bezeugt wird, die, wie ich nachgewiesen habe, viel grösser ist als jene in der freien Atmosphäre in gleicher Höhe. Man könnte über der erwärmten Bergoberfläche bei Tage ein ebensolches Spiel aufsteigender und niedersinkender Luftmassen annehmen, wie über der Niederung, nur müsste die Hauptwirkung von jenen Theilen des Berges ausgehen, die bloss einige hundert Meter unter dem Anemometer liegen, weil sonst der Eintritt des Minimums der Windstärke am Vormittage oder bald nach Mittag auf diesem Wege nicht zu Stande kommen könnte.

Wie sich aber dieser Vorgang mit dem längs der Bergseiten von den Thälern herauf aufsteigenden Luftströmen vereinigen lassen möchte, ist mir unklar. Die zunehmende Bewölkung über dem Berggipfel und die Wolkenkappen auf demselben am Nachmittage sprechen wie so manches Andere zu deutlich für die über dem Berge aufsteigenden Luftmassen. Bevor diese aufsteigende Bewegung aus den Thälern herauf den Berggipfel erreicht hat, könnte allerdings der oben erwähnte locale Vorgang Zeit und Raum zur Entwicklung finden und das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke am Vormittage auf manchen Berggipfeln erklären.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Hann, »Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes«. Diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, II., Jännerheft 1879.

668 J. Hann,

Die bedeutenden Unterschiede im Eintritte des Minimums der Windstärke auf den verschiedenen Berggipfeln würden unter dieser Annahme vollkommen verständlich. Ich möchte dieselbe jedoch nur als Anregung zu weiterem Nachdenken und Nachforschen hinstellen.

Eine Entscheidung über diese Frage könnten nur Wolkenbeobachtungen bringen. Consequente stündliche Aufzeichnungen selbst nur der relativen Geschwindigkeit der Wolken bei Tage würden feststellen, ob auch in der freien Atmosphäre ein Minimum der Geschwindigkeit der Luftströmungen um Mittag eintritt. Dann müsste die Ansicht definitiv aufgegeben werden, dass der tägliche Gang der Windstärke auf den Berggipfeln in seiner Gesammtheit eine locale Erscheinung sei, die von den Erhebungen der Erdoberfläche selbst bedingt wird, und es würden die Registrirungen der Windstärke auf den Berggipfeln erhöhtes Interesse gewinnen und die Frage nach deren Ursache eine grössere Tragweite erlangen.

## Die jährliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln.

Die folgende Tabelle L enthält die einzelnen Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblick und auf dem Säntis in Meter pro Secunde.

Die Beobachtungsreihe des Sonnblick und auch jene des Säntis ist zu kurz, um die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit genauer bestimmen zu lassen. Man sieht aber, wie zu erwarten, dass das Maximum der Windstärke auf unseren Alpengipfeln in den Wintermonaten eintritt, wie in den Niederungen. Doch hat auf den Berggipfeln auch der Sommer eine grosse Windgeschwindigkeit und die Amplitude der jährlichen Variation der Windstärke ist desshalb gering.

Auf dem Sonnblick trat das Minimum der Windstärke in den Monaten Mai bis Juli ein, auf dem Säntis von April bis Juni, der Juli hat wieder eine sehr grosse Windstärke. Bei Gegenüberstellen der gleichen Monate vermisst man fast jede Übereinstimmung im Gange der Windstärke zwischen Sonnblick und Säntis. Besonders auffallend ist die grosse Windgeschwindigkeit des Juli 1888 auf dem Säntisgipfel; auf dem Sonnblick war dieser Monat relativ ruhig. Der Februar 1891,

L. Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit. (Meter pro Secunde.)

	Jänner	Jänner Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August Sept. Octob.	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
							Son	Sonnblick					
1887 1888 1889	10.7 8.8	8·2 8·7 8·7	10.4 10.4 11.3	6.9 8.8 8.6	8.6 7.6 9.8	6.9 8.6 8.6	6.9	7.0 10.3	8.5 6.2 9.1	7.7 (9.9)	7.7	6.7 8.5 10.4	8·1 9·1
1891 1892 1893 Mittel	8.9 11.4 12.3			8.0 9.0 9.0 8.0 8.0 8.0	8.1 6.6 6.6 8.4	9.1	8:3 7:9 7:90		8.88 8.47		9.1 9.1 9.03	10.9	9.4 9.0 9.0
							Ö	ig C					
1886 1887 1888 1889 11891 1892 1893	8.9 6.9 8.7 111.3 8.6 8.9	5.4 8.4 7.7 7.2 7.2 10.4	7.7 10.4 10.4 7.6 9.2 9.2 6.6	97779999	6.6 6.5 6.5 6.5 6.5 6.5 6.5 6.5 6.5	0.000000000000000000000000000000000000	8.7 8.0 8.3 8.3 8.4 8.4	8 - 8 8 8 8 5 5 8 9 9 9 9 9 8 8 8 8 8 8	6 7 7 8 8 9 7 7 8 8 9 7 7 8 8 9 7 7 8 8 9 7 9 7	7.000 9.7.000 9.7.000 9.4.000	10.8 20.1 6.5 6.9 6.9 6.4 6.7	12.1 8.9 7.5 7.9 6.9 6.9 11.3 7.8	6.7.7.6 4.7.8 6.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7.7
Mittel	8.79	8.50	29.2	6.11	6.59	6.85	8.35	2.78	20.2	68 · 2	7.81	8.79	2.68

der dem Sonnblick das höchste Monatsmittel der Windstärke brachte, war wieder umgekehrt auf dem Säntis ruhig.

Ich habe die Monatsmittel der Windstärke für Kremsmünster und Wien aus den gleichen Monaten abgeleitet, wie für den Sonnblick. Auch hier vermisst man eine Übereinstimmung. Die folgende kleine Tabelle enthält diese Mittel, sowie jene für den Obir aus der Periode Februar 1884 bis November 1890 inclusive und Jänner bis December 1893 (also für nicht ganz acht Jahrgänge). Die Mittel'für den Säntis sind zum Vergleiche beigegeben.

Jährliche Periode der Windgeschwindigkeit.
Meter pro Secunde.

Ort	Obir 2140 m 8	Säntis 2500 m 8	Sonn- blick 3110 m	Krems- münster <sup>1</sup> 390 <i>m</i> 6	Wien <sup>1</sup> 220 m 6
Jänner	7·5 7·2 6·6 5·6 5·3 5·4 4·8 4·7* 5·3 6·2 6·3 6·7	8·8 8·5 7·6 6·1* 6·6 6·9 8·3 7·8 7·0 7·9 7·8 8·8	10·9 10·2 10·6 8·8 8·4 8·4 7·9* 9·2 8 7 9·9 9·0 9·6	3·7 4·8 4·8 3·7 3·4 3·5 3·6 3·2* 3·3 3·2 3·3 3·1*	5·9 5·8 6·8 5·4 4·7 4·9 5·3 4·8 4·7 4·4* 4·5

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Aus genau derselben Periode abgeleitet, aus welcher die Mittel für den Sonnblick stammen.

Auf den Gipfelstationen hat der Jänner und nach ihm der Februar das Maximum der Windstärke, das Minimum fällt auf das Frühjahr oder den Sommer (zwischen April und August).

Die mit den Sonnblick-Mitteln der Zeit nach genau correspondirenden Mittel der Windgeschwindigkeit für Kremsmünster und Wien zeigen durchaus keinen parallelen Gang, weder mit dem Sonnblick, noch untereinander.

Auf die mittlere Windgeschwindigkeit nehmen locale Verhältnisse in hohem Grade Einfluss, so dass eine Übereinstimmung im jährlichen Gange der Windstärke selbst in gleichen Perioden nur wenig zur Geltung kommt. Unten trat das Maximum der Windstärke im März ein, auf denselben Monat fällt auch im vieljährigen Mittel das Maximum. Der Juli, in dem auf dem Sonnblick die kleinste Windgeschwindigkeit registrirt worden ist, hatte unten in Kremsmünster und Wien ein secundäres Maximum der Windstärke.

Der Vollständigkeit der Charakterisirung der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel halber will ich zum Schlusse auch noch einige Daten über die absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit anführen. Wegen der Unsicherheit der Reduction der Aufzeichnungen auf absolutes Maass darf man bei den folgenden Zahlen keine grosse Genauigkeit voraussetzen.

Die mittleren Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit aus der Periode September 1887 bis December 1893 sind:

Mittlere Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Meter pro Secunde.

December 30	Juni 27
Jänner 35	Juli 27
Februar 32	August 29
März 33	September 28
April 28	October 30
Mai 29	November31

Das mittlere Jahresmaximum ist 40 m pro Secunde. Die grösste Windgeschwindigkeit trat in der Nacht vom 17. zum 18. Februar 1891 ein bei einem Sturme aus NE und N. Der

Beobachter notirte um  $9^h$  Abends  $NE_8$  und um  $7^h$  Morgens  $N_{10}$  bei  $-13^\circ$  C. Das Anemometer gibt als grösste Windgeschwindigkeit 48~m pro Secunde (d. i. mittlere Windgeschwindigkeit für ein ganzes Stundenintervall).

## Anhang.

Tabelle I und II enthalten den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nach den rohen Mitteln.

Die Reduction der anemometrischen Aufzeichnungen der Windgeschwindigkeit auf Meter pro Secunde erfolgte unter der Annahme der Robinson'schen Regel. Da aber von März 1889 an infolge einer Änderung am Registrirapparat die Windgeschwindigkeiten etwas kleiner ausfielen, wurden dieselben von da an mit einem empirischen Factor 1·4 multiplicirt, um sie mit den früheren unmittelbar vergleichbar zu machen. Man darf aus diesen und anderen Gründen, die zum Theile für die Windregistrirungen überhaupt gelten, den folgenden absoluten Werthen der Windgeschwindigkeiten auf dem Sonnblickgipfel keine zu grosse Bedeutung beilegen.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit im August im Mittel der sechs Jahre 1888-1893 war so abweichend von jenem der übrigen Monate, dass ich, um den jährlichen Gang dieses Elementes, wie er sich im Mittel vieler Jahre herausstellen dürfte, etwas übersichtlicher zu erhalten, mir erlaubte, für diesen Monat nur die vierjährigen Mittel 1890 bis 1893 einzustellen. Es ergab sich nämlich, dass es die beiden ersten Jahrgänge waren, welche diese Abweichungen von den sechs- bis siebenjährigen Mitteln der anderen Monate zumeist hervorbrachten. Um jedermann ein Urtheil über die Berechtigung dieses einigermassen willkürlich scheinenden Vorganges zu gestatten, mögen die stündlichen Windgeschwindigkeiten im August nach den Mitteln der verschiedenen Perioden hier Platz finden. Die Windgeschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde entsprechen immer jenem Stundenintervalle, das der angeschriebenen Stunde vorausgeht.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man sehe darüber die citirte Abhandlung von Dr. Pernter nach auf S. 36 des Separatabdruckes (S. 236 des Bandes).

Mittlere Windgeschwindigkeit im August.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				1	orm	itta	3				
25.0	<b>24</b> 6	25.3	25.4	25.9	24.9	24.3	23 · 1	23.0*	23.8	23.2	23.6
32.5	33.6	33.8	34 · 1	85 · 7	<b>34</b> · <b>3</b>	33.0	<b>33</b> ·0	$34 \cdot 3$	32.8	32.0	30.8
				N	achi	mitta	g		•		
23.7	23.6	24.7	$24 \cdot 2$	23 · 3	23.8	24.8	24.7	$25 \cdot 2$	$25 \cdot 8$	25.8	25.4
30.6	28.5	28 · 7	27.4	27.2*	27.9	27.8	29.3	30.7	29 · 2	29 · 1	31.3

In der ersten Reihe, den vier Jahren 1890-1893 entsprechend, fällt das Minimum der Windgeschwindigkeit etwa auf 9h Vormittags und stimmt darin mit den vorhergehenden und nachfolgenden Monaten überein; in der zweiten Reihe hingegen aus den zwei Jahrgängen 1888 und 1889 abgeleitet, tritt das Minimum erst um 5h Abends ein, wo in allen Nachbarmonaten die Windgeschwindigkeit schon wieder erheblich über dem Mittel sich befindet. Es ist nun durchaus unwahrscheinlich, dass ein Monat derart ohne jeden Übergang sich von den Nachbarmonaten unterscheidet, und es schien mir daher berechtigt, die beiden Jahrgänge 1888 und 1889 als mit grösseren Störungen behaftet, vorläufig von den Mittelwerthen für den August auszuscheiden, um den jährlichen Gang der Stundenmittel deutlicher hervortreten zu lassen. Ich zweisle nicht, dass die vierjährigen Mittel den langjährigen näher kommen dürften, als die sechsjährigen, welche auch die Jahre 1888 und 1889 einschliessen.

Die Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen nach den unmittelbaren dreimaligen täglichen Beobachtungen um 7<sup>h</sup>, 2<sup>h</sup> und 9<sup>h</sup> in den derart differirenden Jahrgängen war folgende:

	N	NE	E	SE	S	sw	w	NW	Calmen
1888—1889	26	6	1	1	10	23	19	7	6
1890—1893	13	5	2	4	10	25	14	17	3
1887—1893	18	4	1	3	9	24	17	14	6

Die beiden Jahrgänge 1888—1889, mit der anormalen Verlegung des Minimums der Windstärke auf den Nachmittag zeichnen sich durch ein anormales Vorwiegen des Nordwindes

674 J. Hann,

aus; nimmt man aber NW, N und NE zusammen, dann ist allerdings kaum ein Unterschied zu bemerken. Es bleibt demnach doch fraglich, ob das Vorwiegen gewisser Windrichtungen die Anomalie im täglichen Gange der Windstärke während der beiden ersten Jahrgänge erklären kann.

Die Tabelle III enthält die Constanten der periodischen Reihen mittelst deren der jährliche Gang der täglichen Variation berechnet worden ist, nachdem die rohen Mittel aus sechs Jahren noch zu grosse Unregelmässigkeit zeigen.

Es wurden zunächst die Constanten der Reihe

$$p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

für die einzelnen Monate berechnet und dann die p und q, die eine ausgesprochene jährliche Periode zeigen, desgleichen wieder durch analoge Sinusreihen dargestellt. Da der August in dem Werthe von  $q_1$  nach den Beobachtungen eine auffallende Störung zeigt, wurde in Tabelle III der berechnete Werth von  $q_1$  (also -0.76 statt -0.22, siehe S. 680) statt dessen eingestellt und die Rechnung wiederholt. So wurden die mit  $q_1'$  bezeichneten Werthe erhalten, die sich natürlich nur in den Monaten Juli, August und September merklich von den früheren unterscheiden.

Es schien mir, dass es bei den Coëfficienten der einmaligen täglichen Welle zweckmässiger sei, sich auf die Berechnung mit zwei Gliedern zu beschränken; die jährliche Periode der unmittelbar nach den Beobachtungen erhaltenen Werthe von  $p_1$  und  $q_1$  ist von einfacher Natur. Hingegen ist es bei den Coëfficienten  $p_2$ ,  $q_2$  jedenfalls erforderlich, noch ein drittes periodisches Glied zur Berechnung derselben zu verwenden, weil im jährlichen Gange derselben drei Maxima und drei Minima hervortreten.

Als Verwandlungszahl der nominellen Kilometer pro Stunde in Meter pro Secunde wurde angenommen

$$0.2777 \times 1.25 = 0.347$$
.

Dies gilt für die rohen und für die berechneten reducirten Monatsmittel. Für die Mittel der Jahreszeiten wurden etwas

andere Reductionsfactoren verwendet, di. für den Winter 0·353, Frühling 0·344, Sommer 0·356, Herbst 0·367. Die Bearbeitung der rohen, den Anemogrammen entnommenen Windgeschwindigkeiten erfolgte in längeren Pausen mit Unterbrechungen, und so kam es, dass ich zuerst für die Tabelle der Monatsmittel einen einheitlichen Factor zur Reduction benützte, dann später etwas strenger verfahrend, zur Reduction der Jahreszeitenmittel verschiedene der ungleichen Zahl der zu reducirenden Monate genauer angepasste Factoren. Daher stimmen die Jahreszeitenmittel nicht völlig genau mit den Monatsmitteln, wie es sein sollte. Der Unterschied ist aber für den vorliegenden Zweck und die erreichbare Genauigkeit der mittleren Windgeschwindigkeiten überhaupt völlig irrelevant.

Tabelle IV, täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Säntisgipfel, bedarf keiner Erläuterung.

Tabelle V bis XII enthalten die Jahreszeitenmittel der Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde und die Ab-. weichungen der Stundenmittel von den entsprechenden 24 stündigen Mitteln ohne irgend eine Ausgleichung.

In einigen dieser Tabellen bemerkt man durch alle vier Jahreszeiten hindurchgehende Störungen des täglichen Ganges, von denen jene, welche in die Nachtzeit fallen, sicherlich nicht durch Wechseln der Autographenpapiere und ähnliche äussere Beeinflussungen entstanden sein können. Auf dem Säntis macht sich  $2-3^{\rm h}$  Morgens eine Abnahme der Windstärke zu allen Jahreszeiten geltend, von  $7-8^{\rm h}$  a. eine Zunahme derselben. Sonnblick  $1-2^{\rm h}$  a. Abnahme der Windstärke, desgleichen  $4-5^{\rm h}$  p. auffallende Abnahme derselben in allen Jahreszeiten. Die Papiere wurden angeblich stets um Mittag ausgewechselt.

Auf dem Ben Nevis, wo die Windstärken direct geschätzt werden, ist Morgens um 5<sup>h</sup> eine erhebliche Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten zu bemerken, dagegen um 3<sup>h</sup> a. eine Zunahme. Um 3<sup>h</sup> und 4<sup>h</sup> Nachmittag macht sich eine ganz auffallende Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten bemerkbar.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Einen Theil der Monatsmittel hatte schon Herr Dr. Pernter in seiner Abhandlung reducirt.

Diesen Störungen mögen in der That irgend welche vorübergehende Einflüsse auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Grunde liegen, die in der Natur der Erscheinung begründet sind und mit anderen meteorologischen Vorgängen zusammenhängen. Vorläufig genügt es, darauf aufmerksam gemacht zu haben. Es werden vieljährige Registrirungen nöthig sein, um dieselben genauer untersuchen zu können.

Anhang. Tabelle I. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Mittel aus 6 Jahren. Meter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
12— 1 <sup>h</sup> a.	11.03	1	10.98	86.8	8.84	8.77	8.01	29.8	8.46	8.95	8.70	66.6	9.35
. 01	111.17		10.21	8.64	8.70	8.29	2.68	8.53	8.08	8.84	8.74	89.6	9.12
8	11.20		10.89	8.60	8.29	8.50	7.73	8.77	8.35	8.91	8.84	9.64	9.21
. c.	11.08		10.82	8.46	7.91	8 32	2.80	8.81	8.02	8.91	8.84	9.38	90.6
4 - 4	11.17	10.27	10 . 75	8.29	7.62	8.29	99.2	86.8	8.05	86.8	8.91	9 36	8.05
1.73	11.52	10.13	10.44	8.39	29.2	7.94	29.2	8.64	7.94	9.18	8.88	9.33	8.95
-	11.62		10.20	8.52	2.88	7.62	7.42	8 43	7.84	9.40	8.74	60.6	8.84
. 80			10.18	8.18	7.84	7.32	7.28	8.01	2.67	61 6	8.60	9.16	8.70
, o	10.89		10.02	8.43	8.05	7.32	7.21	2.67	80.8	9.59	8 39	9.29	8.69
9-10	10.86	9.54	88.6	8.64	8.11	7.32	7.32	8.25	80.8	9.33	8.57	9.43	8.77
2 - 01	10.54	9.38	10.05	8.74	8.38	7 · 32	7.46	8.05	7.94	9.33	8.46	9.56	8.74
11—Mittag	10.82	9.33	10.44	8.81	8.20	7.49	7.59	8.18	80.8	9.42	8 39	9.43	8.87
13 - 15	11.34	9.71	10.89	60.6	8.74	7.84	7.77	8.22	7.94	9.57	8.81	8.85	9.14
- 67	10.82	88.6	10.75	9.56	8.57	8.02	8.11	8.18	8.08	9.64	9.01	9.71	9.17
1	60:11	10.23	11.09	91.6	8.84	8.53	8.01	8.57	8.18	9.75	8.88	89.6	9.34
	11.94	10.16	10.99	9.12	8.77	8.64	8.36	8.39	8.15	9.61	8.98	89.6	9.34
4 1 2	10.88	10.34	10.99	8.84	8.60	8.67	8.32	80.8	8.15	9.57	8.74	9.47	9.21
6	11.03	10.44	11.34	8.95	8.74	16.8	8.64	8.25	8.29	10.02	8.92	9.61	9.43
6-7	10.82		11.24	9.01	8.70	60.6	8.70	8.60	8.29	9.75	8.81	9.33	9.38
. 8 - 2	10.93		11.52	9.33	9.33	9.12	8.84	8.57	8.81	8.85	8.77	9.57	09.6
	10.61		11.24	9.58	9.36	60.6	8.46	8.74	8.77	9.20	8.50	9.64	9.44
01-6	10.34		11 · 13	9.43	9.23	9.56	8.29	8.95	8.74	9.58	8.60	9.75	9.45
51-01	10.41		11.03	9.40	9.59	9.40	8.43	8.95	8.74	9.12	8.60	89.6	9.47
11 – Mittern	10.72	10.51	10.98	9.02	8.91	9.56	8.48	8.81	8.20	8.82	8.20	9.85	8.37
			:	;	,								
Mittel	10.98	10.15	10.76	8.84	8.52	8.35	2.96	8.48	8.23	9.35	8.72	9.53	9.15

Sonnblick. Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel. Anhang. Tabelle II.

.20	•03	90.	<b>3</b>	_	_						
	- 1	•	60.	- 13	20	. 31	45	46	86. –	7.	. 28
.46	.15	<del>-</del>	- 12	1.1	20	44	37	+6	10	27	91.  -
.00	.02	.12	.12	61.	•16	.03	1	33	- 15	26	33
40	51	4.	4	37	- 19	.05	16	90.  -	20. –	03	.13
	1		1	1	1		1	- 15	1	ŀ	.15
				•		!	ļ	51	1	1	08. –
	1	I	1	1	1	!	1	1	1	Ī	78. —
	1		_	1	١	1	-1.03	1.03			98. –
		1	1	1	1	1	1	1	1	i	02
	<b>‡</b>	1	1		1	1	1	1	ı	1	.03 
	ı		-	1	1		1	1	1	1	32
					1	1	Ī	١	1	ı	82
20.	.21	.24	.10	.21	•56	99.	.13	· - 0.	01. –	42	1 . 1
Mittn.— 1 <sup>h</sup> a.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	3 4	4- 5	5— 6	29	8 -2	8 — 8	9—10	10-11	11—Mittag
	1ha07 .71 .20 .14 .32 .42 .05 .19 .234002	1 ha. $0.07$ $0.71$ $0.20$ $0.14$ $0.32$ $0.42$ $0.05$ $0.19$ $0.23$ $0.40$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$ $0.02$	1 ha.     .07     .71     .20     .14     .32     .42     .05     .19     .23     .40    02       2     .21     .50     .25     .20     .18     .06    03    05    15    51    02       3     .24     .71     .13     .24     .23     .15    23     .29     .09    44     .12	1ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50       .25       .20       .18       .06       .30       .05       .15       .51       .02         3       .24       .71       .13       .24       .23       .15       .23       .29       .09       .44       .12         4       .10       .22       .00       .38       .61       .03       .16       .33       .18       .44       .12	1 ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50      25       .20       .18       .06       .30       .05       .15       .51       .02         3       .24       .71       .13       .24       .23       .15       .23       .29       .09       .44       .12         4       .10       .22       .00       .38       .61       .03       .16       .33       .18       .44       .12         5       .21       .12       .25       .90       .06       .30       .50       .18       .37       .19	1ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50      25      20       .18       .06       .30       .05      15       .51       .02         3       .24       .71       .13      24      23       .15      23       .29       .09      44       .12         4       .10       .22       .00      38      61       .03      16       .33      18      44       .12         5       .21       .12      01       .55      90      06       .30       .50      18      37       .19         6       .56      02      32       .55      90      41      34       .16      29      19      16	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	1 ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50      25       .20       .18       .06       .30       .05       .15       .51       .02         3       .24       .71       .13       .24       .23       .15       .23       .29       .09       .44       .12         4       .10       .22       .00       .38       .61       .03       .16       .33       .18       .44       .12         5       .21       .12       .01       .55       .90       .06       .30       .50       .18       .37       .19         6       .56       .02       .32       .55       .90       .41       .34       .16       .29       .19       .16       .         7       .66       .30       .56       .62       .86       .73       .54       .05       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90       .90	1ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50      25       .20       .18       .06       .30       .05       .15       .51       .02         3       .24       .71       .13       .24       .23       .15       .23       .29       .09       .44       .12         4       .10       .22       .00       .38       .61       .03       .16       .33       .18       .44       .12         5       .21       .12       .01       .55       .90       .06       .30       .50       .18       .31       .19         6       .56       .02       .32       .55       .90       .41       .34       .16       .29       .19       .16         7       .66       .30       .66       .73       .54       .05       .19       .16         8       .13       .54       .60       .66       .68       .73       .75       .26       .16       .12         9       .07       .72       .74       .47       .75       .75	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	1 ha.       .07       .71       .20       .14       .32       .42       .05       .19       .23       .40       .02         2       .21       .50      25       .20       .18       .06       .30       .05       .15       .51       .02         3       .24       .71       .13       .24       .23       .15       .23       .29       .09       .44       .12         4       .10       .22       .00       .38      61       .03       .50       .18       .44       .12         5       .21       .12       .01       .55       .90       .06       .30       .50       .18       .44       .12         6       .56       .02       .32       .65       .90       .06       .30       .50       .18       .37       .19         7       .66       .02       .32       .65       .90       .41       .16       .29       .19       .16       .16         7       .66       .02       .82       .86       .73       .54       .05       .19       .16       .10         8       .13       .54       .41       .47

01	.03	•19	•19	90.	.28	.23	.45	.29	•30	.32	. 22	.23		
- 67	.18	.15	.15	90. –	80.	02. –	•0•	-11-	. 22	-15	.32	.20		
60.	.29	.26	. 26	.03	. 23	60.	.02	22	12	12	22	.16		
.53	. 29	.40	.26	.22	. 67	.40	.57	.15	90.	. 23	40	.28		
62. —	15	05	%. I	80.	90.	90.	.58	.54	.51	.51	.27	.24		
97. —	- E I	60.	60· 	.40	23	.12	80.	.28	.47	.47	.33	.28	_	
- 19	•15	.05	.40	-36.	89.	.74	88.	.50	.33	.47	.20	.42		
51	- 30	•18	.29	.32	.56	.74	22.	.74	.91	1.05	.91	• 59		
- 55.	.05	.32	.25	•00	.22	•18	.81	.84	.71	22.	.39	44.		
.25	.43	.32	.58	8	.11	.17	.49	.45	.59	•56	.21	. 33		
•13	10. –	.33	.23	.23	•58	.48	92.	.48	.37	.27	.20	.37		
4.	72. —	.08	.0	•19	. 29	.13	.36	.01	. 29	.53	.36	.38		
-36	- 14	•13	.28	01	20.	- 14	03	35	62	55	24	.24		
12- 1	1-2	2 – 3	3- 4	4-5	5 — 6	2 —9	8 —2	6 —8	9—10	10-11	11—Mittern.	Mittel		

Sonnblickgipfel. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit. Willkürliche Einheiten. x=0 für 111/y Nachts. Anhang. Tabelle III.

			i'd		ia a	9,1	'n	9,	9,
	$p_1$	91	22	4.5		:	•	:	•
							berechnet mit		
		nach den Beobachtungen	obachtungen		3 GI	2 Gliedern	3 Glie	3 Gliedern	2 Gliedern
Jänner	-0.27	0.53	-0.62	0.54	0.59	20.0	0.50	0.28	0.05
Februar	1.59	-0.38	-0.21	89.0	06.0	0.22	1.13	-0.42	-0.28
März	0.94	-1.31	-0.59	0.38	0.91	-0.82	1.01	-1.13	+6.0-
April	0.36	-1.30	0.64	-0.03	0.89	-1.61	99.0	-1.42	-1.57
Mai	0.81	-1.31	68.0	-0.21	1.07	-1.87	86.0	-1.66	-1.83
Juni	2.13	-1 68	-0.16	0.22	1.38	-1.61	1.61	- 1.80	-1.65
Juli	0.93	-1.61	-0.35	0.03	1.46	1-11	1.55	- 1.32	-1.28
August	1.01	-0.55	60.0	0.11	1.05	92.0—	0.82	29.0-	86 0—
September	62.0	09.0-	0.24	-0.37	0 33	99.0—	0.24	-0.45	-0.83
October	-0.61	-1.02	-0.40	-0.25	-0.27	-0.63	-0.04	0.83	29.0-
November	-0.01	-0.15	-0.39	0.51	0.35	-0.44	-0.37	-0.65	-0.38
December	0.37	-0.45	0.48	0.35	90.0	0.10	-0.17	60.0	90.0-
Jahr	29.0	-0.82	0.00	0.16	0.67	-0.82	29.0	-0.82	78.0
_			_						_

 $0.002 + 0.260 \sin (321.4 + x) + 0.251 \sin (234.9 + 2.x) + 0.408 \sin (144.0 + 2.x)$  $0.668+0.718 \sin (3239+x)+0.390 \sin (6794+2x)+0.247 \sin (33896+3x)$  $q_1 = -0.822 + 0.767 \sin(129.7 + x) + 0.366 \sin(55.0 + 2x) + 0.283 \sin(132.1 + 3x)$  $0.163 + 0.318 \sin(77.3 + x) + 0.251 \sin(113.9 + 2x) + 0.165 \sin(284.0 + 2x)$  $q'_1 = -0.867 + 0.802 \sin(124 \cdot 1 + x) + 0.282 \sin(62 \cdot 4 + 2x)$ 

Berechnete Werthe der Constanten.

	<i>p</i> <sub>1</sub>	16	<i>p</i> <sub>3</sub>	43	$a_1$	£ .	$A_1$	A.2
Jänner	0 59	0.05	-0.13	0.54	0.59	0.55	8591	346°5
Februar	06.0	-0.28	-0.59	0.20	0.84	0.77	107.3	310.3
März	0.91	-0.94	-0.17	0.34	1.31	0.38	135.3	333.4
April	0.89	-1.57	0.74	00.0	1.81	0.74	150.5	0.08
Mai	1.07	-1.83	0.73	-0.12	2.12	0.74	149.7	86.3
Juni	1.38	-1.65	90.0-	0.14	2.15	0.15	140.1	336.8
Juli	1 - 46	-1.28	-0.28	0.24	1.94	0.37	131.2	310.6
August	1.05	86.0-	0.14	-0.12	1.44	0.18	133.0	130.6
September	0.33	-0.82	0.13	-0.45	0.88	0.44	158.1	162.8
October	-0.27	29.0-	-0.33	-0.13	0.72	0.35	202.0	248.5
November	-0.35	-0.38	-0.27	0.39	0.52	0.47	222.6	325.3
December	90.0	90.00	0.11	09.0	80.0	0.61	135.0	10.4
Jahr	0.67	-0.87	00.0	0.16	1.09	0.16	142.4	6.0

Anhang. Tabelle IV. Säntis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit. Mittel aus acht Jahren (1886—1893). Meter pro Secunde.

	-													
	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr	
Mittn. — 1ha.	8.49	8.60	7.39	99.9	6.92	7.52	9.12	8.49	7.81	7.86	7.94	8.81	7.97	1
$\frac{1}{2}$	8.49	99.8	2.36	6.51	6.28	7.31	9.21	8.43	2.80	7.80	2.80	99.8	7.90	
2 - 3	8.52	8 36	7.30	6 21	68 9	7.35	9-10	8.24	7.62	2.79	7.78	8.51	2.16	
3- 4	8 66	8.72	7.26	6.58	9.28	7.50	9.24	8.36	7.84	7.84	7.78	8.48	7.88	
4- 5	8.59	8.46	7 . 24	6.58	6.40	7.25	8-99	8.09	7.42	7.80	7.44	8.31	2 69	
5-6	8.75	8.58	7.20	6.25	99.9	96.9	19.8	8.01	7.42	7.71	7.73	8.36	7.65	
6 - 7	8.81	8.21	7 14	6.12	6.45	88.9	2.98	2.90	7.29	7 94	69.2	8.26	2.56	
2- 8	9.15	8.39	7.74	6.05	99.9	09-9	7.71	7.74	7.05	8.00	8.09	8.62	7.65	
	00.6	8.47	2.65	92.9	6.30	6 45	7.45	7.24	6.63	7.84	2.80	8.54	7.44	
	10.6	8 36	2.50	5.65	6-11	6.25	7 31	2.08	6.21	7.92	2.86	8 59	7 36	
10-11	9.04	8.40	7.71	2.22	90.9	60.9	26.9	98 9	6.46	7.54	7.75	8.80	7.27	
11 - Mittag	60.6	8.15	92.2	9.28	6.55	6 17	6.91	6.84	6.40	7.48	7.92	10.6	7.28	
12 - 1	8.72	8.25	7.81	2.64	6.25	6.45	7.16	7.14	6.31	7.46	7 75	81.6	7.34	
1 2	89.8	8.45	89 2	9.69	6.25	6.62	7.36	2.08	6.31	7.49	2.22	98.8	7.33	
2 3	8.80	8.36	7.62	5.74	6.04	6.24	7.55	90.2	6.14	2.66	7.51	8.72	7.31	
1	00 6	8 61	68.2	5.84	6.45	6 70	8.01	7.21	6.43	7.73	7 74	9.31	7.58	
1	0.03	8.70	2.80	5.84	6 38	6.74	8.45	7.34	6.52	8.15	7.92	02 6	7.72	
9 - 9	8 76	8.74	8.04	6 28	99.9	68.9	8.60	7.64	6.48	8.42	7.92	9.30	62.2	
t	8.85	8.74	68.2	6.50	68.9	7.16	8.92	68.2	98.9	8.36	2.98	9 29	7.94	
2 – 8	8.70	8.65	2.22	6.36	60.2	7.29	80 6	7.81	7.15	8.45	2.86	9.01	7.93	
6 —8	8.75	8.28	92.2	6.30	7.25	7.26	90.6	2.90	7.45	8.12	98.2	8.85	7.93	
9-10	8 80	8.51	7.91	6.46	7.38	7 38	9.14	8 34	2.20	8.16	8 06	69.8	8.04	
10-11	8 69	8.60	2.68	09.9	7.16	7.25	9.15	8.38	7.73	8.10	26.7	8.72	8.00	
11 - 12	8.64	8.35	29.2	6.58	6.94	7.38	8.83	8.24	99.2	7.84	2.90	8.93	7.93	
Mittel	8.79	8.48	7.63	14.9	8.58	6.95	8.33	7.72	7.05	68.2	7.82	8.81	7 68	

Anhang. Tabelle V. Paris, Bureau Central.

			-						
		Meter pro	Meter pro Secunde			Abw	Abweichung vom Mittel	Mittel	
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
					ł				1
Mitternacht	2.02	1.83	1.60	76.1	<del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del> <del>*</del>	₹c.	0c. –	77	ج ا
1 a.	2 03	1.80	1.48	1 · 46	*82	57	79. <u> </u>	33	. +5
. 2	2.06	1.68	1.44	1.38	25	69.	99. –	41	03.
. 65	60.8	1.73	1.38	1.34	. 22	64*	72*	45*	51
4	200	1.69	1.40	1.36	72	89. –	02. –	- 43	52
٠.	2.2	1 · 73	1.4:1	1.36	02	64	69. —	43	49
· •	. 60.	1 - 77	1.52	1.39	*82	09.	82.	1.40	46
~	.03	86-1	1.84	1 - 47	28	66. –	26	32	31
. 00	2.12	2.33	2.02	1.62	61	<b>*</b> 0. !	.03	21. —	= 1
6	2 21	2.60	2.32	1.83	10	.23	.22	<b>*</b> 0.	•10
10	2.49	5.89	2 60	2 12	.18	.52	.50	.33	.38
=	2.62	3.00	2.80	2.37	.31	. 63	. 70	• 58	. 55
Mittag	2.75	3.11	2.80	2.52	. 44	.74	. 20	.73	. 65
-	2.77	3.12	2.93	2.51	.46	.75	.83*	.72*	69
8	2.83	3.18	2 90	2.47	.25*	*18.	08.	89.	•02•
က	2.65	3.10	8.79	2.30	.34	.73	69.	.51	. 57
4	2.57	3.10	2.83	2.18	. 26	.73	.73	• 39	.53
ıc	2.41	2.99	2.76	1.96	01.	.62	99.	- 11	.39
9	2.40	2.70	2.46	1.78	60.	.33	.36	10.	•19
	2.31	2.39	5.06	1.74	8.	.02	- 40.	<u>2</u> 0. –	.03 -
· oc	2.31	2.23	1.79	1.67	00:	15	31	12	1 - 14
· σ.	2.26	2.16	1.75	1.65	05	21	35	- 14	- 19
· <u>c</u>	2.14	1.97	1.73	1.56	17	40	28. —	23	62. —
=	2.10	1.86	1.64	1.51	21	16. –	48	28	98. –
								,	•
Mittel	2.31	2.37	2.10	1.79	.23	.51	.52	.34	.40

Anhang. Tabelle VI. Eiffelthurm.

			Meter pro	Meter pro Secunde			Abw	Abweichung vom Mittel	Mittel	
	ļ.	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
	Mitternacht	9.62	10.16	8.94	9.44	.43	1.28	1.25	1.05	1.00
	_	9.59	9.92	8.78	9.24	.40	1.04	1.08	.85	.84
-	63	9.55	9.76	8.78	60.6	.36	88.	1 · 09	.70	92.
	က	82.6	. 9-73	8.61	6.04	62.	.85	-92	.65	.75
	4	9.76	6.59	8.35	96.8	.57	.71	99.	.57	.63
_	10	9.82	9.49	8.32	8.80	.63	.61	.63	.41	.57
	9	9.74	9.23	98.2	8.84	.55	.35	.17	.45	.38
	7	9.73	8.73	7.11	8.84	54	15	58	.45	90.
	œ	29 6	7.92	6.21	8.38	.48	96. –	-1.48	10.	49
	6	9.43	7.34	6.04	7.74	.24	-1.54	-1.65	9. –	06.
-	10	9.13	7.42	6.25	7.12	90	-1.46	-1.44	-1.27	90.1-
	=	8.46	7.53	09.9	6.97	73	-1.35	1.09	-1.42	-1.15
_	Mittag	8.04	7.63	6.79	6.93	-1.15	-1.25	06. –	-1.46	-1.12
-	_	7.77	2.28	96.9	7.03	-1.42	-1:10	73	-1.38	-1.15
	2	7.73	7.84	7.21	7.04	- 1.46	-1.04	48	-1.35	-1.08
	က	7.83	8.14	7.12	7.24	-1.36	42. —	57	-1:15	96.
	+	8.54	8.46	7.28	7.43	95	42	41	96.	69. I
	10	69.8	8.34	7.44	7.92	09.	54	25	47	++. 1
	9	9.56	8.60	7.48	8.49	-00	28	21	•10	80. 1
	١,٠	9 57	9.56	7.58	8.97	.38	.38	1	.58	•30
	œ	9.84	9.81	8.17	9.39	.65	.93	.48	1.00	.76
	6	06.6	10.08	8.64	9.43	.71	1.20	.95	.1.03	26
	2	9.75	10.10	8.99	9.58	.56	1.22	1.30	1.19	1.06
<b>-</b>	-	6.72	10.23	9.05	6+-6	.53	1 · 40	1.36	1.10	1.10
-	Mittel	9.19	8.88	69.2	8.39	79.	06.		.84	.76
		-	_	-	_	=	_			

Anhang. Tabelle VII. Blue Hill.

		Meter pro	Meter pro Secunde			Abw	Abweichung vom Mittel	Mittel	
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht 1	10.01	8:58	7.28	8.23	1 .	9.	.45	10	
- 1	9.74	8.45	7.12	60.8	1 .13	87.	.29	1 . 15	20. —
, 6,     6,	82.6	32.5	86.9	× ×	90	1	3 :		-
	88.6	8.54		80.8	-		÷ •	-	
4 5	6.6 6.83	8.36	6.75	<del>-</del>	+0	37		-	
5 6	8.78	8.33	6.62	8.14	60.	14. –	21	91.	02
2 -9	9.78	8.23	6.44	8.18	60. –	0ë.	68	98. I	97. —
∞   '`	69.6	8.18	6.21	96.2	81.	55	62	82.	14
8 - 9	8.48	8.45	6 26	60.8	60.	28	. 22	15	72. —
9-10	10.01	29.8	6.35	8.36	-14	90. –	48	.12	20. –
10-11	96.6	29.8	6.44	8.41	60.	90	- 39	.17	<u>0</u> 0. –
11 - Mittag	10.01	8.72	6.57	8 54	4.	ī0. 	26	.30	•0•
12 1	10 23	80.6	6.84	8.82	.36	.35	.01	.61	.33
1- 3	10.14	9.17	6.94	8.76	.27	. 44	=	.52	.34
2-3	10.19	9.53	7.03	8.54	.32	08.	.20	.30	07.
3- +	10 01	12.6	7.12	8.45	<b>*</b> I.	86.	.29	.21	0+.
<del>+</del> 5	$69 \cdot 6$	9.57	86.9	8.00	81.  -	.84	.15	+2	<del>*</del> .
9 - 6	9 61	9.13	08.9	00·x	96. –	07.	03	+2	03
2 -9	69.6	8.67	6.71	60.8	<u>*</u> -	90. –	12	15	13
2 - z	0.92	8.72	68.9	8.27	.05	- 10. 1	90.	•03	.03
8 - 9	96.6	8.67	7.12	60.8	60.	90.	.29	15	+0.
9-10	9.83	8.63	7.15	8.09	<del>7</del> 0	01	.32	15	.01
10-11	08.6	8.45	7.15	8.05	20. —	28	.32	- 19	05
11-12	9.62	8.58	7.24	8.14	23	<u>9</u> . –	.41	10	02
Mittel	9.87	8.73	6 83	8.54	-14	.31	.26	61.	.15

Anhang. Tabelle VIII. Ben Nevis.

<u> </u>																											
	Jahr	.47	ř	.47	. 59	.70	99.	8	•10	20.	90. I	03	- 18	24	37	++-	++-	62. —	82. —	<del>1</del> 2. –	48	45	20. <del> </del>	•16	.21	.34	.32
Mittel	Herbst	A.	3	.35	.20	.68	.62	- 10	13	20. —	16	20. —	37	46	37	52	22	22	+0.	04.	34	87. –	•05	.17	.20	.47	-31
Abweichung vom Mittel	Sommer	.45	2	.26	.72	.75	.83	.34	.42	.28	.00	91. –	- 18	- 32	64. –	79. —	79. –	51	49	29. –	19. –	88. –	20. –	.15	•15	.58	14.
Abw	Frühling	.48	2	.54	99.	.81	.57	20. —		80.	10. –	80.	13	13	28. —	1 .43	99. —	. +0	94. —	. 52	55	89. –	16	.29	.23	68.	•36
	Winter	38.	3	.47	.47	.57	.61	18	.0	02	60.	•05	90. —	<u>2</u> 0. –	25	81.	- 38	90.	15	19	19. —	82. –	80.	.05	•18	.24	.26
	Herbst	8.04	5	2.80	2.98	8.16	8.10	7.38	7.35	7.41	7.32	7.41	7.11	7.02	7.11	96.9	7.26	7.26	7.44	2.08	7.14	7.20	7.53	7.65	2.77	2.95	7.48
Meter pro Secunde	Sommer	7. AO	80	2.80	5.98	5.99	6.07	5.58	2.66	5.52	5.25	2.08	2.06	4.92	4.75	4.62	4.62	4.73	4.75	4.62	4.73	4.86	5.17	5.38	5.39	2.23	5.24
Meter pro	Frühling	16.8	17	8.27	8.39	8.54	8.30	69.2	7.84	7.81	7.72	7.81	2.60	2.60	7.36	7.30	7.18	7.33	7.27	7.21	7.18	7.15	7.57	8.02	2.98	8.12	7.73
	Winter	11.19	71 17	11.21	11.21	11.31	11.35	10.56	10.75	10.72	10.65	10.79	10.69	10.69	10.49	10.56	10 36	10.69	10.59	10.13	10.23	10.16	10.82	10.79	10.92	10.98	10.74
		Witternacht	Mitterliacit	_	2	က	4	ē	9	2	∞	6	10	11	Mittag	_	2	က	4	c	9	2	∞	<b>5</b>	10	11	Mittel
1		-	-	_							_						_	_						_			

Anhang. Tabelle IX. Obir.

| - 1      |  |   |  |   |  | _   |   |  |  | _  | _   | _   
   
   | -  |  
  |  |   | -   | _   
   |   
  |   |  
  |   | _  |  |  |   |
|----------|--|---|--|---|--|---|---|--|--|--|---
--
---|--
--
---|--|---|---
--
---|--
---|---|---|--|--|--|---|
| Jahr     | .42  |   | 86.<br>•   | .30   | . 25   | . 26  | .20   | .11  | 10. –  | 1.13   | 28  | - 42  
   
   | 54   | 89. –  
  | 73   | 65  | 58  | 43  
   | 13  
  | •16   | .44  
  | . 56  | . 55   | .48  | .49  | æ.  |
| Herbst   | .42  | 1   | 44.  | - 58  | . 29   | .32   | . 25  | 11.  | •05  | 10.  | = 1   | - 34  
   
   | 42   | <del>1</del> 9. I  
  | 92. —  | 99. —   | 6 <del>4</del>  | 94. –   
   | 60.   
  | - 16  | .37  
  | .40   | 98.  | .32  | .46  | .35   |
| Sommer   | 10.1   |   | 68.  | .73   | .73  | 69.   | .53   | . 26   | 41.  | 7 1  | 22. —   | 94  
   
   | -1.12  | -1.12  
  | -1.20  | 1.12  | 3<br>1  | 88.<br>   
   | 45  
  | 01.   | .49  
  | .63   | .63  | 1.05   | 1.01   | 22.   |
| Frühling | .30  | 3   | .24  | .32   | .24  | .28   | . 24  | .20  | £0.  | 91. –  | 24  | 32  
   
   | - 47   | 63   
  | 69.  | 69.   | 19. –   | 69  
   | 28  
  | •16   | .35  
  | .51   | 29.  | 68.  | .47  | .37   |
| Winter   | 1  |   | 9. 1   | 13  | 25   | 25  | 12. —   | - 13   | .07  | .03  | - 01  | 05  
   
   | 17   | .33  
  | 37   | 25  | 21. —   | •19   
   | .30   
  | .42   | .54  
  | .38   | • 58   | .15  | .03  | .20   |
| Herbst   | 2.00   | - 1   | 7.02   | 6.87  | 6.87   | 06.9  | 6.83  | 69.9   | 6.63   | 6.29   | 6.47  | 6 · 24  
   
   | 91.9   | 5.94   
  | 28.9   | 5.94  | 26.93   | 6.12  
   | 6.49  
  | 6.74  | 6.92   
  | 86.98   | 6.94   | 06.9   | 7.04   | 6.58  |
| Sommer   | g.70   | 2 !   | 29.9   | 6.51  | 6.51   | 6.47  | 6.31  | 6.04   | 5.64   | 5.37   | 5.01  | 4.84  
   
   | 4.66   | 4.66   
  | 4.58   | 4.66  | 4.78  | 4.90  
   | 5.33  
  | 2.68  | 6.27   
  | 6.75  | 6.71   | 6.83   | 6.79   | 5.78  |
| Frühling | 10.6   | 3 :   | 6.83   | 6.91  | 6.83   | 6.87  | 6.83  | 6 · 26   | 6.29   | 6 43   | 6.35  | 6.54  
   
   | 6.12   | 2.96   
  | <b>9</b> ·00   | 9.00  | 80.9  | 9.00  
   | 6.31  
  | 6.75  | 6.94   
  | 7 · 10  | 7.26   | 86.98  | 90.2   | 6.29  |
| Winter   | 7.07   | -   | 26.2   | 68.2  | 2.22   | 7.77  | 7.81  | 7.89   | 8.09   | 8.05   | 8.01  | 7.97  
   
   | 7.85   | 69.2   
  | 7.65   | 7.77  | 28.2  | 8.21  
   | 8.32  
  | 8.44  | 8.56   
  | 8.40  | 8.28   | 8.17   | 8.05   | 8.02  |
|          | "  |   | 63<br> <br> -  | 2— 3  | 3- 4   | 4- 5  | 5 - 6   | 6- 7   | 7—8  | 8 - 8  | 910   | 10-11   
   
   | 11-Mittag  | 12-1   
  | 1 - 2  | 2 – 3   | 3 4   | 4-5   
   | 5-6   
  | 6-7   | 2 - 8  
  | 8 - 9   | 9 – 10   | 10-11  | 11 - 12  | Mittel  |
|          | Frühling Sommer Herbst Winter Frühling Sommer Herbst | Winter Frühling Sommer Herbst Winter Frühling Sommer Herbst Jah | Frühling   Sommer   Herbst   Winter   Frühling   Sommer   Herbst   Jah | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .32         1.01         .42           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 <sup>h</sup> a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.89         6.91         6.51         6.87        13         .32         7.73         .29 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .32         1.01         .42           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.51         6.87        15         .29         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00         — .05         .32         1.01         .42           2         7.97         6.83         6.67         7.02         — .05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.87         — .13         .32         .73         .29           4         7.77         6.87         6.51         6.87         — .25         .28         .69         .32           5         7.77         6.87         6.90         — .25         .28         .69         .32 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00         — .05         .32         1.01         .42           2         7.89         6.91         6.51         6.87         — .13         .32         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87         — .25         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.47         6.90         — .25         .28         .69         .32           6.87         6.83         6.51         6.80         — .25         .24         .73         .29           7.77         6.83         6.81         6.90         — .25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.83         — .25         .24         .53         .25 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00         — .05         .32         1.01         .42           3         7.89         6.91         6.79         7.02         — .05         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87         — .25         .24         .73         .29           5         7.81         6.87         6.90         — .25         .28         .69         .32           6         7.81         6.83         6.91         6.69         — .13         .20         .26         .11           7         7.89         6.79         6.04         6.69         — .13         .20         .26         .11 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00         — .05         .32         1.01         .42           2         7.97         6.83         6.67         7.02         — .05         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87         — .25         .24         .73         .29           5         7.81         6.87         6.90         — .25         .28         .69         .32           6         7.81         6.83         6.94         6.83         — .25         .28         .69         .32           7         7.89         6.79         6.04         6.69         — .13         .20         .26         .11           8         0.99         6.59         6.04         6.69         — .13        03         — .14         .05         — . | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00         — .05         .32         1.01         .42           2         7.97         6.83         6.67         7.02         — .05         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87         — .25         .24         .73         .29           5         7.77         6.83         6.31         6.80         — .25         .28         .69         .32           6         7.81         6.83         6.94         6.83         — .25         .28         .69         .32           7         7.89         6.79         6.69         — .25         .28         .69         .35           7         7.89         6.79         6.69         — .21         .24         .53         .25           8         8.09         6.59         5.64         6.69         — .14         .05         — .14           9         8.05         6.43 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.51         6.87        13         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.90        25         .28         .69         .32           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .53         .25           7         7.89         6.79         6.69        13         .20         .24         .53           8         8.09         6.59         5.64         6.63        14         .05        11           9         8.01         6.35 <td< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1<sup>14</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .53         .25           7         7.89         6.79         6.04         6.69        13         .20         .24         .53         .25           8         8.09         6.54         6.69        13         .07        03        14         .05        41           10         8.01         6.24         4.84         6.59         .05        11         .94</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        13         .24         .73         .29           4         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.91         6.83        25         .24         .73         .29           7         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           7         7.89         6.79         6.04         6.69        13         .20         .24         .53         .25           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .20        14         .05        11           <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -:05         :24         :89         :44           2         7:89         6:91         6:51         6:87         -:05         :24         :73         :29           4         7:77         6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           5         7:77     
   6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           6:81         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           6:82         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           7:81         6:83         6:31         6:83         -:21         :24         :53         :25           8         8:09         6:79         6:04         6:69         -:13         :20         :24         :53           10         8:05         6:43         5:64         6:69</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         H</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.91         6.83        21         .24         .73         .29           8         6.59         6.79         6.69        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           8         8.09         6.79         6.79         6.69        13        14         .05           9         8.05         6.47         6.69         <td< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1<sup>14</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.89         6.91         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         6.79         6.91         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.21         6.90        25         .24         .69         .32           8         8.09         6.79         6.04         6.69        13         .24         .53         .25           9         8.05         6.47         <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ba.         7·97         6·91         6·79         7·00         — ·05         ·32         1·01         ·42           2         7·97         6·83         6·67         7·02         — ·05         ·24         ·89         ·44           3         7·89         6·91         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           4         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           6         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           7         7·80         6·79         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·87         6·83         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·94         6·90         -13         ·20         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·25         ·24</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         .44           2         7:87         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :89         .44           5         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           6         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:70         -25         :24         :73         :29           6         7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:00         -25         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:00         6:69         -13         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:04         6:</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ba.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         -44           2         7:89         6:91         6:70         7:02         -05         :24         :89         -44           3         7:89         6:91         6:51         6:87         -13         :28         :73         :29           4         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           6         7:80         6:91         6:87         -25         :28         :69         :25           7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           7:89         6:79         6:79         6:83         -11         -25         :28         :69         :25           8         6:99         6:79         6:99         -12         -24         :53         :25         :28         :69         :11         :25         :28         :69         :11         :11         :25</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 lba.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.70         7.02        05         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.91         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.94         6.89        13         .22         .24         .73         .29           7         7.89         6.74         6.89        13         .24         .73         .25         .24         .73         .29           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .24         .75         .11         .01         .25         .24         .75</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.59         6.31         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           8         7.73         6.74         6.90        25         .28         .69         .11           10         8.01         6.74         6.93        21         .24         .59         .25           8         8.09         6.59         6.04         6.83         6.24         6.93</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11<sup>1</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.77         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           4         7.77         6.83         6.61         6.87        25         .24         .89         .44           7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.94         6.69        13         .24         .73         .29           7.78         6.79         5.64         6.69        13         .24         .73         .29           8.05         6.43         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           9         8.05         6.43         6.31         6.49         .03        14</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Her</td></t<></td></td<></td></t<></td></td<> | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter
        Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 <sup>14</sup> a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .53         .25           7         7.89         6.79         6.04         6.69        13         .20         .24         .53         .25           8         8.09         6.54         6.69        13         .07        03        14         .05        41           10         8.01         6.24         4.84         6.59         .05        11         .94 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        13         .24         .73         .29           4         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.91         6.83        25         .24         .73         .29           7         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           7         7.89         6.79         6.04         6.69        13         .20         .24         .53         .25           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .20        14         .05        11 <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -:05         :24         :89         :44           2         7:89         6:91         6:51         6:87         -:05         :24         :73         :29           4         7:77         6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           5         7:77         6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           6:81         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           6:82         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           7:81         6:83         6:31         6:83         -:21         :24         :53         :25           8         8:09         6:79         6:04         6:69         -:13         :20         :24         :53           10         8:05         6:43         5:64         6:69</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         H</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.91         6.83        21         .24         .73         .29           8         6.59         6.79         6.69        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           8         8.09         6.79         6.79         6.69        13        14         .05           9         8.05         6.47         6.69         <td< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1<sup>14</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.89         6.91         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         6.79         6.91         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.21         6.90        25         .24         .69         .32           8         8.09         6.79         6.04         6.69        13         .24         .53         .25           9         8.05         6.47         <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ba.         7·97         6·91         6·79         7·00         — ·05         ·32         1·01         ·42           2         7·97         6·83         6·67         7·02         — ·05         ·24         ·89         ·44           3         7·89         6·91         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           4         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           6         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           7         7·80         6·79         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·87         6·83         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·94         6·90         -13         ·20         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·25         ·24</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         .44           2         7:87         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :89         .44           5         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           6         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:70         -25         :24         :73         :29           6         7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:00         -25         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:00         6:69         -13         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:04         6:</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ba.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         -44           2         7:89         6:91         6:70         7:02         -05         :24         :89         -44           3         7:89         6:91         6:51         6:87         -13         :28         :73         :29           4         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           6         7:80         6:91         6:87         -25         :28         :69         :25           7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           7:89         6:79         6:79         6:83         -11         -25         :28         :69         :25           8         6:99         6:79         6:99         -12         -24         :53         :25         :28         :69         :11         :25         :28         :69         :11         :11         :25</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 lba.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.70         7.02        05         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.91         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.94         6.89        13         .22         .24         .73         .29           7         7.89         6.74    
    6.89        13         .24         .73         .25         .24         .73         .29           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .24         .75         .11         .01         .25         .24         .75</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.59         6.31         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           8         7.73         6.74         6.90        25         .28         .69         .11           10         8.01         6.74         6.93        21         .24         .59         .25           8         8.09         6.59         6.04         6.83         6.24         6.93</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11<sup>1</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.77         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           4         7.77         6.83         6.61         6.87        25         .24         .89         .44           7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.94         6.69        13         .24         .73         .29           7.78         6.79         5.64         6.69        13         .24         .73         .29           8.05         6.43         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           9         8.05         6.43         6.31         6.49         .03        14</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Her</td></t<></td></td<></td></t<> | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -:05         :24         :89         :44           2         7:89         6:91         6:51         6:87         -:05         :24         :73         :29           4         7:77         6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           5         7:77         6:87         6:51         6:87         -:25         :24         :73         :29           6:81         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           6:82         6:51         6:87         -:25         :28         :69         :32           7:81         6:83         6:31         6:83         -:21         :24         :53         :25           8         8:09         6:79         6:04         6:69         -:13         :20         :24         :53           10         8:05         6:43         5:64         6:69 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         H | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.91         6.83        21         .24         .73         .29           8         6.59         6.79         6.69        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           8         8.09         6.79         6.79         6.69        13        14         .05           9         8.05         6.47         6.69 <td< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1<sup>14</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.89         6.91         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         6.79         6.91         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.21         6.90        25         .24         .69         .32           8         8.09         6.79         6.04         6.69        13         .24         .53         .25           9         8.05         6.47         <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ba.         7·97         6·91         6·79         7·00         — ·05         ·32         1·01         ·42           2         7·97         6·83         6·67         7·02         — ·05         ·24         ·89         ·44           3         7·89         6·91         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           4         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           6         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           7         7·80         6·79         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·87         6·83         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·94         6·90         -13         ·20         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·25         ·24</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         .44           2         7:87         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :89         .44           5         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           6         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:70         -25         :24         :73         :29           6         7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:00         -25         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:00         6:69         -13         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:04         6:</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ba.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         -44           2         7:89         6:91         6:70         7:02         -05         :24         :89         -44           3         7:89         6:91         6:51         6:87         -13         :28         :73         :29           4         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           6         7:80         6:91         6:87         -25         :28         :69         :25           7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           7:89         6:79         6:79         6:83         -11         -25         :28         :69         :25           8         6:99         6:79         6:99         -12         -24         :53         :25         :28         :69         :11         :25         :28         :69         :11         :11         :25</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 lba.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3        
7.89         6.91         6.70         7.02        05         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.91         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.94         6.89        13         .22         .24         .73         .29           7         7.89         6.74         6.89        13         .24         .73         .25         .24         .73         .29           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .24         .75         .11         .01         .25         .24         .75</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.59         6.31         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           8         7.73         6.74         6.90        25         .28         .69         .11           10         8.01         6.74         6.93        21         .24         .59         .25           8         8.09         6.59         6.04         6.83         6.24         6.93</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11<sup>1</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.77         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           4         7.77         6.83         6.61         6.87        25         .24         .89         .44           7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.94         6.69        13         .24         .73         .29           7.78         6.79         5.64         6.69        13         .24         .73         .29           8.05         6.43         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           9         8.05         6.43         6.31         6.49         .03        14</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Her</td></t<></td></td<> | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 <sup>14</sup> a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           3         7.87         6.83         6.51         6.87        05         .24         .89         .44           5         7.89         6.91         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.89         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         6.79         6.91         6.90        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.21         6.90        25         .24         .69         .32           8         8.09         6.79         6.04         6.69        13         .24         .53         .25           9         8.05         6.47 <t< td=""><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ba.         7·97         6·91         6·79         7·00         — ·05         ·32         1·01         ·42           2         7·97         6·83         6·67         7·02         — ·05         ·24         ·89         ·44           3         7·89         6·91         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           4         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           6         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           7         7·80         6·79         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·87         6·83         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·94         6·90         -13         ·20         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·25         ·24</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         .44           2         7:87         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :89         .44           5         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           6         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:70         -25         :24         :73         :29           6         7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:00         -25         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:00         6:69         -13         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:04         6:</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ba.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         -44           2         7:89         6:91         6:70         7:02         -05         :24         :89         -44           3         7:89         6:91         6:51         6:87         -13         :28         :73         :29           4         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           6         7:80         6:91         6:87         -25         :28         :69         :25           7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           7:89         6:79         6:79         6:83         -11         -25         :28         :69         :25           8         6:99         6:79         6:99         -12         -24         :53         :25         :28         :69         :11         :25         :28         :69         :11         :11         :25</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 lba.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.70         7.02        05         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.91         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.94         6.89        13         .22         .24         .73         .29           7         7.89         6.74         6.89        13         .24         .73         .25         .24         .73         .29           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .24         .75         .11         .01         .25         .24         .75</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.59         6.31         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           8         7.73         6.74         6.90        25         .28         .69         .11           10         8.01         6.74         6.93        21         .24         .59         .25           8         8.09         6.59         6.04         6.83         6.24         6.93</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11<sup>1</sup>a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24      
  .89         .44           3         7.77         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           4         7.77         6.83         6.61         6.87        25         .24         .89         .44           7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.94         6.69        13         .24         .73         .29           7.78         6.79         5.64         6.69        13         .24         .73         .29           8.05         6.43         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           9         8.05         6.43         6.31         6.49         .03        14</td><td>Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Her</td></t<> | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1ba.         7·97         6·91         6·79         7·00         — ·05         ·32         1·01         ·42           2         7·97         6·83         6·67         7·02         — ·05         ·24         ·89         ·44           3         7·89         6·91         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           4         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           6         7·77         6·83         6·51         6·87         — ·25         ·24         ·73         ·29           7         7·80         6·79         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·87         6·83         6·83         -25         ·24         ·73         ·29           8         0.0         6·94         6·90         -13         ·20         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·24         ·53         ·25         ·24 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 ha.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         .44           2         7:87         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :89         .44           5         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           6         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:70         -25         :24         :73         :29           6         7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :24         :73         :29           7         7:89         6:79         6:00         -25         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:00         6:69         -13         :24         :73         :29           8:01         6:79         6:04         6: | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ba.         7:97         6:91         6:79         7:00         -05         :24         :89         -44           2         7:89         6:91         6:70         7:02         -05         :24         :89         -44           3         7:89         6:91         6:51         6:87         -13         :28         :73         :29           4         7:77         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           6         7:80         6:91         6:87         -25         :28         :69         :25           7:81         6:83         6:51         6:87         -25         :28         :69         :25           7:89         6:79         6:79         6:83         -11         -25         :28         :69         :25           8         6:99         6:79         6:99         -12         -24         :53         :25         :28         :69         :11         :25         :28         :69         :11         :11         :25 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           1 lba.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.89         6.91         6.70         7.02        05         .24         .73         .29           5         7.77         6.87         6.91         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.79         6.90        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.87         6.94         6.89        13         .22         .24         .73         .29           7         7.89         6.74         6.89        13         .24         .73         .25         .24         .73         .29           8         8.09         6.59         5.64         6.69        13         .24         .75         .11         .01         .25         .24         .75 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11ha.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           4         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.80         6.59         6.31         6.87        25         .24         .73         .29           7         7.81         6.83         6.91         6.83        21         .24         .53         .25           8         7.73         6.74         6.90        25         .28         .69         .11           10         8.01         6.74         6.93        21         .24         .59         .25           8         8.09         6.59         6.04         6.83         6.24         6.93 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Jah           11 <sup>1</sup> a.         7.97         6.91         6.79         7.00        05         .24         .89         .44           2         7.97         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           3         7.77         6.83         6.67         7.02        05         .24         .89         .44           4         7.77         6.83         6.61         6.87        25         .24         .89         .44           7.77         6.83         6.51         6.87        25         .24         .73         .29           6         7.81         6.83         6.94         6.69        13         .24         .73         .29           7.78         6.79         5.64         6.69        13         .24         .73         .29           8.05         6.43         6.31         6.83        21         .24         .73         .29           9         8.05         6.43         6.31         6.49         .03        14 | Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Winter         Frühling         Sommer         Herbst         Her |

Anhang. Tabelle X. Säntis.

1	Meter pi	Meter pro Secunde			Abw	Abweichung vom Mittel	n Mittel	
Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
33	66.9	8.38	7.87	90.	22	.72	87.	290
93	6.82	8.32	28.2	60. –	.05	99.	87.	. 225
8 46	6.63	8.23	7.73	23	41	<u> </u>	.14	.085
: <u>;</u>	6.70	8.37	7.82	20	20. —	.71	.23	.200
8.45	6.64	8.11	99.2	24	13	. 45	03	.012
94	6.67	2.86	7.62	23	01	.20	.03	025
8.+3	6.57	7.59	7.64	92. —	02. —	20. —	.05	120
61	6.82	7.35	7.71	.03	<b>c</b> 0.	31	.12	027
37	6.57	7.05	7.46	03	20	61	13	240
35	6.49	88.9	7.43	<del>+</del> 0	28	82. –	16	315
12	6.45	6.64	7.25	90.	32	-1.02	- 34	405
63	6.51	6.64	7.27	.03	92. –	-1.02	.33	392
13	6.57	6.93	21.2	.03	07	+2. —	42	332
96	6.54	7.02	7.12	03	23	64	74. —	342
33	24.9	7.05	2.10	90. –	08.	19. —	6+	365
37	6.73	7.31	7.30	.28	<del>1</del> 0. –	35	62. —	100
<b>+</b>	6.71	7.51	7.53	.45	90. –	<u>:</u> 1.	90. –	.045
<u> </u>	96.9	7.71	19.2	.21	.19	.05	20.	.117
96	2.09	66.2	7.73	72.	.32	.33	.14	. 265
- 62	2.07	90.8	7.82	.10	.30	0+.	.53	.257
- 23	7.10	8.07	7.81	.04	.33	.41	.22	. 250
37	7.25	8.29	26.2	02	.48	.63	.38	.367
37	7.15	8.26	7.93	.03	.38	09.	.34	.325
34 	2.05	8.18	08.2	<u> </u>	87.	.52	ē:	.240
8.60	22.9	2.68	69-2	- 12		53.	÷;	666.
•						_		•

Anhang, Tabelle XI. Sonnblick.

1	Meter pro Secunde	Secunde			1	Abweichung vom Mittel	n Mittel	
Winter Frühling	ì	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
-	1	8.71	16.0	=	00.	66.	.07	06.
			200	1 6			. 6	3 8
		0.0	00.6	A7.	80. 	= :    -	22	3
		8.55	9.30	98.	12	20.	80. 	90. 
		8.53	01.6	.05	16. –	.05	81	01.
8.83		8.53	9.15	.05	48	.25	13	- 13
8.71		8.58	9.17	-11-	59	02	11	20
8.62	~	3.03	9.17	- 03	89. –	45	= -	32
99.8	~	.73	60.6	72. —	64	92. —	19	46
8.76	2	02.	60.6	35	<u>+6. –</u>	82. —	19	74. —
8.81	2	.83	9.17	28	49	<u>9</u> . –	=  -	88
86.8	2	.81	80.6	09.	.33	29. —	02.	42
9.17	2	96.	9.15	36	- 13	. 52	- 13	87. –
9 · 49	∞	.15	9.59	-00	61.	- 33	.01	10.
9.45	<b>x</b>	.33	9.43	80. 	.15	- 15	.15	.00
8.62	<b>3</b> 0	. 28	9.20	.12	.32	Ξ.	. 22	•19
9.55	∞	89.	9.43	<u>+</u>	.25	.20	.15	•18
9.40	∞	.58	9.33	90.	91.	01.	.05	90.
8.28	œ	.83	9.63	-14	.29	.34	.34	.28
9.57	w.	3.05	9.47	80. 	.27	.54	.19	.23
26.6	တ	.07	9:70	.12	29.	62.	.42	.45
88.6	00	66.	9.44	80·	.58	.51	.16	.29
9.85	دن	90.0	9.40	- 04	.55	•58	.12	.30
10.44 9.83 8	ω,	9.15	9.33	.04	.53	.67	•00	.32
9.26		20.6	9.15	-14	.26	.59	13	.21
06.0		9,40	00.00		96.	06.	<u>.</u>	. 69
10.40   8.30   3	~	9.49	92.A	<b>/I</b> .	ရန်. —	<b>၀</b> င်	21.	67.

Anhang. Tabelle XII. Pike's Peak.

		Meter pro	Meter pro Secunde			Abw	Abweichung vom Mittel	Mittel	
	TITE AND	-		TITLE	WEALT	1		1177	1.4.7
	winter	rruning	Sommer	Herbst	winter	rruning	Sommer	nerost	Janr
Witternocht	11.90	11.37	2.47	10.93	18.	1.34	70.	1.04	90.
Mittelliaciii—1	20 11	7	-	2 :	5 ;		# : 0 .	• •	00
1-2	11.77	11.37	7.57	10.23	.51	1.34	1.04	1.02	86.
2— 3	11.80	11.53	7.80	10.23	.54	1.50	1.27	1.04	1.09
3- 4	11.93	11.53	2.90	10.50	29.	1.50	1.37	1.01	1 · 14
4- 5	11.83	11.33	7.83	10.01	.57	1.30	1.30	88.	1.01
9 - 9	11.67	11.03	29.2	06.6	.41	00.1	1 · 14	.71	.81
6-7	11.70	10.67	7.27	6.77	.44	-64	-74	.58	09.
8 - 2	11.27	10.13	09.9	9.30	10.	01.	20.	=	20.
6 <del>-</del> 8	11.00	29.6	6.07	8.73	28	98. —	46	46	- 38
<u>\$1−6</u>	10.80	9.13	5.60	8.30	46	06. —	.93	68.	62. —
10-11	10.63	8.57	5.20	06.2	. 63	-1.48	- 1.33	-1.29	-1.18
11-Mittag	10.43	8.27	5.03	2.60	83	-1.76	- 1.50	-1.59	-1.42
12- 1	10.63	8.43	5.17	2.80	.63	-1.60	-1.36	-1.39	-1.24
1 2	10.73	8.63	5.43	7.93	53	-1.40	-1.10	-1.26	-1.07
2-3	10.80	8.83	5.77	8.13	46	-1.20	92. —	-1.06	28. —
3- 4	10.90	9.10	6.03	8.40	98. —	93	09	62. —	64
4- 5	11.00	9.17	6.10	8.63	97. —	98. –	43	99. —	. 53
5 - 6	11.07	9.37	6.10	8.97	19	99. –	43	22	37
2 -9	11.37	9.83	6.20	9.37		20	.33	.18	90. –
2- 8	11.30	10.03	6.40	9.20	.04	90.	13	.31	.05
6 -8	11.33	10.43	09.9	6.63	-00	.40	20.	44.	. 24
9-10	11.43	10.67	08.9	6.83	.17	.64	.27	.64	.43
10-11	11.54	10.73	2.00	06.6	• 58	.70	. 47	.71	.54
11-12	11.53	10.93	7.20	10.10	.27	06.	29.	16.	69.
Minel	90.11	60.0	0		06.		- 22.	0	.70
witter .	07.11	20.01	0.00	A1.A	AC.	3		200	7)

## Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes

von

## Max Jüllig,

dipl. Ingenieur, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, Oberingenieur der k. k. österr. Staatsbahnen.

(Mit 4 Tafeln und 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Ferraris hat gezeigt, dass man durch zwei Wechselströme von constanter Phasendifferenz, welche die Stromleiter mn und op durchfliessen (Fig. 1), eine hohle Kupfermasse K, die an einem dünnen Faden hängt, in rotirende Bewegung versetzen kann. Die Intensitäten der beiden Wechselströme sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$J_{\mathrm{1}} = J_{\mathrm{0}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad J_{\mathrm{2}} = J_{\mathrm{0}}' \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

wobei

$$0 < \varphi < \pi$$

Ein ähnliches Phänomen hat Tesla durch vier Magnetpole a, b, c, d (Fig. 2) von variabler Intensität hervorgerufen und zur Construction eines für technische Zwecke dienlichen Motors verwendet. Zur Erregung der Magnetpole a, b, c, d dienten die Wechselströme  $J_1$  und  $J_2$  (Fig. 2), deren Intensitäten sehr nahe den Werthen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Rotazioni elettrodinamiche prodotto per mezzo di correnti alternate. Nota del prof. Galileo Ferraris. Atti della R. Accademia delle science di Torino, 1887—1888, p. 360.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Berliner elektrotechn. Zeitschr., Bd. 9, S. 343. D. R. Patent Nr. 47885, von 1. Mai 1888 ab giltig.

$$J_{1} \equiv J_{0} \cos \frac{2\pi t}{T},$$
 
$$J_{2} \equiv J_{0} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

entsprachen.

Die Kupfermasse  $^1$  K (Fig. 2) rotirt um eine zur Zeichnungsfläche senkrechte Axe.

Sowohl beim Apparate von Ferraris, als bei jenem von Tesla entstehen magnetische Felder, deren Kraftlinien ihre Gestalt periodisch ändern und in unmittelbarer Nähe der Drehungsaxe der Kupfermasse K ein nahezu homogenes

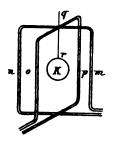


Fig. 1.

magnetisches Feld bilden, das um die Axe qr (Fig. 1), beziehungsweise um eine durch den Punkt K (Fig. 2) senkrecht zur Zeichnungsfläche gelegten Axe rotirt.

Die Einwirkung der rotirenden Kraftlinien auf die bewegliche Kupfermasse ist gleichartig mit jener eines um die Axe yy' (Fig. 3) rotirenden Magnetes<sup>2</sup> und die Erklärung der auftretenden Ro-

tationserscheinungen ist identisch mit jener, welche für die Phänomene des Arago'schen Rotationsmagnetismus gegeben wurde.

In der Literatur über magnetische Drehfelder existiren keine präcisen Darstellungen der beim Ferraris'schen oder Tesla'schen Phänomen in Betracht kommenden Kraftlinien. Es würde auch kaum möglich sein, unter Berücksichtigung aller Einflüsse durch Rechnung die Gestalt der Kraftlinien zu ermitteln.

Macht man jedoch gewisse vereinfachende Annahmen, so ergeben sich übersichtliche Resultate, welche eine Beurtheilung der Beschaffenheit des Drehfeldes in allen seinen Theilen gestatten. Nehmen wir zunächst an, dass die beiden Strom-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Beziehungsweise ein mit Kupferdraht umgebener Eisenkern.

 $<sup>^2</sup>$  In Fig. 3 bedeutet abcd eine gläserne Schutzhülle, um Luftströme abzuhalten.

schleifen mn und op (Fig. 1) aus unendlich dünnen Drähten bestehen, die in zwei auseinander senkrechten Ebenen liegen. Die Gestalt der beiden Leiter wird durch Fig. 4 versinnlicht.

Die geradlinigen Leiter 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV sind zur Axe AB parallel und unendlich lang; die kürzesten Abstände

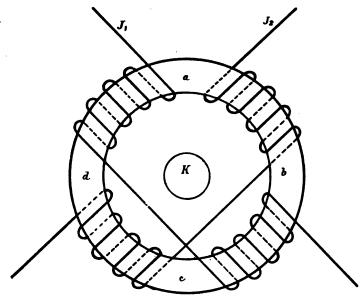


Fig. 2.

des Punktes O von den genannten vier unendlich langen Leitern  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$ ,  $O\delta$  seien einander gleich.

In den Schleifen  $1\,\mathrm{II}\,12$  und  $3\,\mathrm{III}\,1V\,4$  circuliren die Ströme

$$J_1=J_0\cosrac{2\,\pi t}{T}$$
 und 
$$J_2=J_0\sinrac{2\,\pi t}{T}$$

Zunächst soll das magnetische Potential  $V_2$  des in Fig. 4 dargestellten Leiters 3III IV4 für einen beliebigen Punkt G bestimmt werden. Es ist bekanntlich  $V_1 = J_2 w$ , wobei w einen körperlichen Winkel bezeichnet, der von allen geradlinigen Leit-

strahlen, die man vom Leiter III.3.4. IV zum Punkte G ziehen kann, umschlossen wird. 1

Dieser körperliche Winkel wird durch den Inhalt einer Fläche f gemessen, welche ein vom Punkte G ausgehender

Fahrstrahl, während er über die Schleife III.3. .4.IV gleitet, aus einer Kugeloberfläche herausschneidet, deren Mittelpunkt mit dem Punkte G zusammenfällt und deren Radius gleich 1 gewählt wird. Die Fläche f wird positiv gerechnet, wenn der Strom, von G aus gesehen, entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung verläuft.

Im vorliegenden Falle ist die Fläche f ein sphärisches Zweieck (Fig. 4), da die Leit-Fig. 3. strahlen G 3, G 4 und G III, G IV mit dem Kugeldurchmesser dc // AB zusammenfallen, wenn wir die

Schleife III.3.4.IV unendlich lang machen.

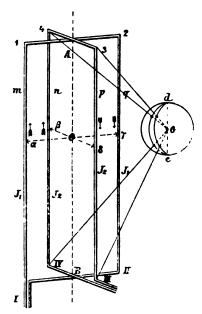


Fig. 4.

Bezeichnen wir mit  $\varphi$  den Neigungswinkel der Ebenen 3IIIG und 4 IVG, so ist  $f=2\varphi$  und somit

$$V_2 \equiv 2J_2 \varphi$$
.

Bezeichnen wir ferner mit  $\psi$  den Neigungswinkel der Ebenen 2IIG und 1IG, so ist das durch die Stromschleife I12II im Punkte G hervorgerufene elektromagnetische Potential

$$V_1 = 2J_1\psi$$
.

Fig. 5 zeigt eine orthogonale Projection des in Fig. 4 dargestellten Stromsystems, wobei die Zeich-

nungsfläche mit der Ebene  $\alpha\beta\gamma\delta$  identisch ist und OA zur

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, Vieweg, 1891, 2. Aufl., S. 376, §. 186.

Zeichnungsfläche senkrecht steht. Das Zeichen + in Fig. 5 bedeutet, dass der Strom von der Zeichnungsfläche zum Be-

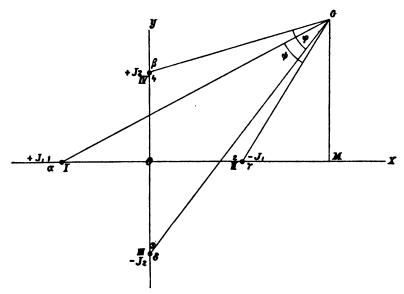


Fig. 5.

schauer fliesse, das Zeichen — die entgegengesetzte Stromrichtung.

Wir betrachten die Geraden  $O_7$ ,  $O_8$ ,  $O_8$  (Fig. 4 und 5) als x-, y- und z-Axen eines rechtwinkeligen Coordinatensystems.

Die Gleichung der Niveauflächen lautet:

$$V_1 + V_2 = C,$$

wobei C eine willkürliche reelle Grösse ist. Um die Gleichung der Niveauflächen in rechtwinkeligen Coordinaten darzustellen, setzen wir OM = x, MG = y,  $O\alpha = O\beta = O\gamma = O\delta = g$  und es ergibt sich

$$\varphi = \arctan \frac{2gx}{x^2 + y^2 - g^2}; \qquad \varphi = \arctan \frac{2gy}{x^2 + y^2 - g^2}.$$

Bezeichnen wir das Potential im Punkte G mit V, so ist

$$V = V_1 + V_2 = 2(\varphi J_2 + \psi J_1)$$

Sitzb. d. mathem -naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. Il. a.

und mit Berücksichtigung der Werthe von φ und ψ

$$\frac{V}{2} = J_2 \arctan \frac{2gx}{x^2 + y^2 - g^2} + J_1 \arctan \frac{2gy}{x^2 + y^2 - g^2}.$$
 1a)

Es ist dies die Gleichung der Niveauslächen. Da in derselben die Variable z nicht erscheint, sind die Niveauslächen, wie vorauszusehen war, Cylinderslächen. Schneidet man dieselben durch eine zur Z-Axe senkrechte Ebene, so erhält man als Schnittlinien eine Schaar von Niveaulinien, deren Gleichung mit Gleichung 1a) identisch ist.

Die Kraftlinien bilden eine Schaar von Curven, welche die Niveauflächen normal schneiden. Da die ersteren Cylinderflächen bilden, deren Erzeugende sämmtlich zu einander parallel sind, so sind die Kraftlinien ebene Curven, welche in jeder beliebigen, zur xy-Ebene parallelen Ebene dargestellt werden können.

Bestimmt man aus Gleichung 1 a) den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = Q,$$

so ist die Differentialgleichung der Kraftlinien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{Q}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1a) erhält man

$$Q = \frac{(s^4 + 4g^2y^2)J_2(y^2 - x^2 - g^2) - (s^4 + 4g^2x^2)J_12xy}{(s^4 + 4g^2y^2)J_22xy - (s^4 + 4g^2x^2)J_1(x^2 - y^2 - g^2)},$$

wobei zur Abkürzung

$$x^2 + y^2 - g^2 = s^2$$

gesetzt wurde. Die Differentialgleichung der Kraftlinien lautet somit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(s^4 + 4g^2y^2)J_2 \cdot 2xy - (s^4 + 4g^2x^2)J_1(x^2 - y^2 - g^2)}{(s^4 + 4g^2y^2)J_2(y^2 - x^2 - g^2) - (s^4 + 4g^2x^2)J_1 \cdot 2xy} \quad 2)$$

Dieser Differentialgleichung genügt die endliche Gleichung

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{(x+g)^2 + y^2}{(x-g)^2 + y^2} - J_2 \log \operatorname{nat} \frac{(y+g)^2 + x^2}{(y-g)^2 + x^2} = C, \quad 3)$$

wobei unter C eine willkürliche Constante zu verstehen ist.

Sind  $J_1, J_2$  und C gegeben, so lässt sich für jede Abscisse x die zugehörige Ordinate y berechnen.

Die Gleichung 3) wurde jedoch nicht durch Integration der Differentialgleichung 2), sondern auf einem Umwege gefunden, der nun beschrieben werden soll und auch zu einer einfachen Construction der durch Gleichung 3) dargestellten Curven geführt hat.

Setzt man in Gleichung 2)

$$J_{\bullet}=0$$
,

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + g^2 - x^2}{2xy}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht integriren und führt zur endlichen Gleichung

$$\frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2}=C,$$
 4)

wobei C eine willkürliche Constante ist.

Durch eine einfache Transformation erhält man aus Gleichung 4) die Gleichung

$$y^2 + (\gamma - x)^2 = r^2,$$
 5)

wobei

$$\gamma = g \frac{C+1}{C-1}; \qquad r = \frac{2g\sqrt{C}}{C-1}$$
 6)

Gleichung 5) ist die Gleichung eines Kreises vom Radius r, dessen Mittelpunkt auf der Abscissenaxe liegt und um die Länge  $\gamma$  vom Ursprung des Coordinatensystems entfernt ist.

Zu dem gleichen Resultate kann man auf synthetischem Wege gelangen.

Lassen wir in Fig. 5  $J_2$  verschwinden, so erhalten wir nachstehende Figur 6.

Das magnetische Potential im Punkte M ist  $2\psi J_1=V_1$ . Für jede Niveausläche (beziehungsweise Niveauslinie) ist  $V_1$  constant, somit auch  $\psi$  constant. Hieraus folgt mit Rücksicht auf einen bekannten Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass der Kreisbogen IM II eine Niveauslinie ist.

Die Niveaulinien der Stromschleife  $J_1$  bilden eine Schaar von Kreisbögen, die sich in den Punkten I und II schneiden, und die Niveauflächen sind Kreiscylinderflächen, deren Erzeugende

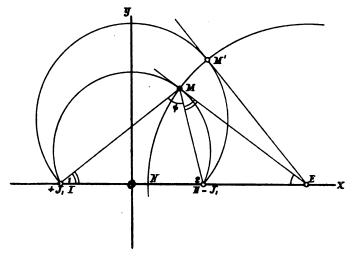


Fig. 6.

zu den Geraden I1 und II2 parallel sind und deren Mantelflächen sich in den Geraden I1 und II2 schneiden.

Behufs Ermittlung der Gestalt der Kraftlinien ziehen wir durch M (Fig. 6) eine Tangente ME und bezeichnen die Entfernung OE mit  $\Gamma$ .

Es soll zunächst die Länge ME berechnet werden. Bekanntlich ist

$$\angle EIM = \angle EMII.$$

Da ferner die Dreiecke MEII und MEI den Winkel bei E gemein haben, sind dieselben ähnlich und es besteht die Proportion

$$\overline{IE}: \overline{ME} = \overline{ME}: \overline{IIE}$$

oder

$$\overline{ME^2} = \overline{1E}.\overline{1E}$$

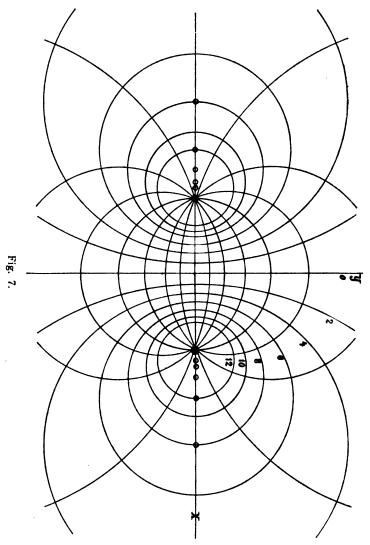
Setzen wir ME = R und berücksichtigen, dass  $\overline{OE} = \Gamma$ ,  $\overline{OI} = \overline{OII} = g$ , so ergibt sich

$$R^2 = (\Gamma + g)(\Gamma - g) = \Gamma^2 - g^2$$

Ziehen wir vom Punkte E aus an eine beliebige andere Niveaulinie IM'II eine Tangente EM', so erhalten wir für die Länge M'E immer denselben Werth  $\sqrt{\overline{\Gamma^2-g^2}} = R$ , und liegen die Punkte MM'... in der Peripherie eines Kreises, der sämmtliche Niveaulinien normal schneidet und somit als eine Kraftlinie angesehen werden muss. In Fig. 7 ist ein System von Kraft- und Niveaulinien dargestellt. Die Niveaulinien entsprechen gleichen Potentialdifferenzen und die Kraftlinien sind derart angeordnet, dass die Intensität des magnetischen Feldes durch die Anzahl der Kraftlinien bestimmt wird, welche eine auf beliebiger Niveaufläche befindliche Flächeneinheit durchdringen. Sämmtliche Kraftlinien liegen in parallelen Ebenen, deren Entfernung gleich 1 cm gewählt wurde. Legt man durch je zwei benachbarte Kraftlinien zwei zur Zeichnungsfläche senkrechte Kreiscylinder, so wird durch diese aus einer 1 cm hohen, zur Zeichnungsfläche parallelen Schicht eine Kraftröhre (Sphondyloid) herausgeschnitten. Jede Einheits-Kraftröhre 1 ist derart beschaffen, dass sie in einem bewegten linearen Stromleiter, welcher dieselbe in einer Secunde durchschneidet, elektromotorische Kräfte wachruft, deren Mittelwerth der absoluten elektromagnetischen Einheit der elektromotorischen Kraft gleich ist, wobei jedoch die Rückwirkung eines im besagten Leiter eventuell entstehenden Stromes auf die Gestalt der Kraftlinien unberücksichtigt bleibt. Für jedes magnetische Feld lassen sich unzählig viele verschiedene Anordnungen der Sphondyloiden finden, welche obiger Bedingung entsprechen. Es muss desshalb die Gestalt des Querschnittes der Sphondyloiden noch durch willkürliche Nebenbedingungen näher bestimmt werden. Im vorliegenden Falle wird angenommen, dass die Schnitte der Einheits-Kraftröhren mit der Ebene 11 II 2 Rechtecke bilden, deren Höhe = 1 cm und deren sonstige Anordnung aus Fig. 8 zu entnehmen ist.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Maxwell, Lehrb. der Elektricität und des Magnetismus, II. Bd.

Diese Figur zeigt in etwas vergrössertem Massstabe einen Schnitt des in Fig. 7 dargestellten magnetischen Feldes durch



eine Ebene, welche die x- und z-Axe in sich enthält und somit zur Zeichnungsfläche der Figur 7 senkrecht steht.

Bestimmen wir zunächst die magnetische Intensität, welche durch die Stromschleife 1 I II 2 in verschiedenen Punkten der Ebene 1 I II 2 erzeugt wird.

Es sei n (Fig. 8) eine nordmagnetische Masse = 1, On = x, so wirkt der Strom 2 II auf n mit der Kraft  $P_1 = 2J_1$ : (g-x), der Strom 1 I mit der Kraft  $P_1 = 2J_1$ : (g+x). Somit ist die magnetische Intensität für jeden Punkt, der in der Ebene 1 III 2 liegt und von OZ um x absteht

$$H = 2J_1 \left( \frac{1}{g-x} + \frac{1}{g+x} \right) \tag{7}$$

Bewegt sich ein Stromleiter OO' von 1 cm Länge von OO' parallel zu sich selbst in der Ebene 1 I II 2 nach  $a_1 a'$ ,  $a_2 a'_2 \dots$  u. s. w., so wird in jedem Zeitelement dt, in welchem der Strom-

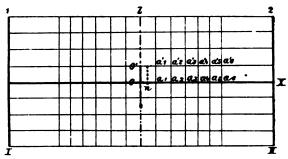


Fig. 8.

leiter das Wegelement dx zurücklegt, die im beweglichen Leiter OO' inducirte elektromotorische Kraft

$$e=H.\frac{dx}{dt}$$
,

somit

$$edt = Hdx$$
.

Der Mittelwerth von e im Verlaufe der Zeit t ist

$$e_m = \frac{1}{t} \int_0^t e dt = \frac{1}{t} \int_0^x H dx$$
 8)

wobei vorausgesetzt wird, dass O' nach t Secunden den Weg x zurückgelegt hat.

Es sollen nun die Strecken

$$oa_1 \equiv x_1, oa_2 \equiv x_2, oa_3 \equiv x_3 \dots oa_n \equiv x_n$$

so gewählt werden, dass für t = 1 Secunde, die Mittelwerthe

$$e'_{m} = \int_{0}^{x_{1}} H dx = 1, \quad e''_{m} = \int_{0}^{x_{2}} H dx = 2, \quad e'''_{m} = \int_{0}^{x_{0}} H dx = 3,$$

und allgemein

$$e_m^{(n)} = \int_0^{x_n} H dx = n \tag{9}$$

sind.

Setzt man in Gleichung 8) für H den Werth aus Gleichung 7) und  $e_m^{(n)}$  statt  $e_m$ ,  $x_n$  anstatt x, t = 1, so ergibt sich

$$e_m^{(n)} = 2J_1 \int_0^{x_n} \left( \frac{dx}{g-x} + \frac{dx}{g+x} \right) = n$$
 10)

und nach Durchführung der Integration

$$e_m^{(n)} = n = 2J_1 \log \operatorname{nat} \frac{g + x_n}{g - x_n},$$

somit

$$x_n = g \cdot \frac{e^{\frac{n}{2J_1}} - 1}{e^{\frac{n}{2J_1}} + 1}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$e^{\frac{n}{2J_1}} = x_{\cdot \cdot \cdot}$$

setzen,

$$x_n = g \frac{x_n - 1}{x_n + 1}.$$

Für jedes Rechteck  $oo'a_1'a_1$ ,  $a_1a_1'a_2'a_2$ ,  $a_2a_2'a_3'a_3$  u. s. w. ist das Doppelintegral

$$\int_{x=x_{n}}^{x=x_{n+1}} \int_{z=0}^{z=1} H dx dz = 1.$$

Die Gleichung einer Kraftlinie, welche die Abscissenaxe in der Entfernung  $ON = x_n$  (Fig. 6) schneidet, hat die Form

$$y^2+(\gamma_n-x)^2=r_n^2.$$

Setzen wir y = 0, so erhalten wir allgemein

$$x = \gamma_n \pm r_n$$
.

Von den beiden Werthen  $x = \gamma_n + r_n$  und  $x = \gamma_n - r_n$  entspricht der kleinere dem Werthe  $x_n$  der Gleichung 11) und ist somit

$$x_n = \gamma_n - r_n = g \frac{x_n - 1}{x_n + 1}.$$
 12)

Da ferner (wie aus der Erläuterung zu Fig. 6 zu entnehmen ist)

$$\gamma_n^2 - g^2 = r_n^2, \qquad 13)$$

erhalten wir aus den Gleichungen 12) und 13)

$$\gamma_{n} = g \frac{\mathbf{x}_{n}^{2} + 1}{\mathbf{x}_{n}^{2} - 1}$$

$$r_{n} = g \frac{2 \mathbf{x}_{n}}{\mathbf{x}_{n}^{2} - 1}$$
14)

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 6) die physikalische Bedeutung der Constante C der Gleichung 4)

$$C = \chi_n^2 = e^{\frac{n}{J_1}},$$

wobei n = 1, 2, 3, ...

Setzen wir J=4 in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessenen Stromeinheiten =40 Ampère, so wird

$$x_n = e^{\frac{n}{8}} = 1 \cdot 133148^n$$
.

In der Tabelle A sind die Werthe für

$$\frac{x_n}{g} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma_n}{g} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}$$

für n = 1 bis n = 12 zusammengestellt.

Tabelle A.

n	$\frac{x_n}{g} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$	$\frac{\gamma_n}{g} = \frac{\kappa_n^2 + 1}{\kappa_n^2 - 1}$
1	0.062	8.045
2	0.124	4.083
3	0.185	2.790
4	0.245	2 · 164
5	0.303	1.803
6	0.358	1.574
7	0.412	1 · 421
8	0.462	1.313
9	0.510	1 · 236
10	0.555	1 · 179
11	0.596	1.137
12	0.635	1 · 105

Mit Hilfe dieser Tabelle wurden die in Fig. 7 dargestellten Kraftlinien construirt, und zwar für n = 2, 4, 6, 8, 10 und 12.

Als Controle für die Richtigkeit der Zeichnung dient die Thatsache, dass die Kraftlinie 12 den Mittelpunkt der Kraftlinie 6, die Kraftlinie 8 den Mittelpunkt der Kraftlinie 4 und allgemein die Kraftlinie n den Mittelpunkt der Kraftlinie  $\frac{n}{2}$  in ihrer Peripherie enthält. Dies lässt sich aus den Gleichungen 14) leicht ersehen.

Jede Kraftlinie mit dem Index 2n schneidet die positive x-Axe in zwei Punkten, deren Abscissen gleich  $\gamma_{2n}-r_{2n}$  und  $\gamma_{2n}+r_{2n}$  sind.

Nun ist aus den Gleichungen 14) zu entnehmen, dass

$$\gamma_{2n} + r_{2n} = g \frac{x_{2n} + 1}{x_{2n} - 1}$$

und da

$$x_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \quad x_{2n} = e^{\frac{2n}{2J_1}} = x_n^2,$$

so ergibt sich

$$\gamma_{2n}+r_{2n}=g\frac{x_n^2+1}{x_n^2-1}=\gamma_n.$$

Aus dieser Gleichung ist die oben angeführte geometrische Beziehung unmittelbar ersichtlich.

In Fig. 9, Taf. I sind alle der Tabelle A entsprechenden Kraftlinien gezeichnet. Fig. 10 zeigt die Kraftlinien eines magnetischen Feldes, das von den coëxistirenden Strömen

$$J_1 = 4 \cos 15^\circ$$
,  $J_2 = 4 \sin 15^\circ$ 

erzeugt wird. Die Figuren 9 bis 15 auf Tafel I bis IV entsprechen den Strömen

Fig. 9.... 
$$J_1 = 4 \cos 0^{\circ}$$
  $J_2 = 4 \sin 0^{\circ}$   
Fig. 10....  $J_1 = 4 \cos 15$   $J_2 = 4 \sin 15$   
Fig. 11....  $J_1 = 4 \cos 30$   $J_2 = 4 \sin 30$   
Fig. 12....  $J_1 = 4 \cos 45$   $J_2 = 4 \sin 45$   
Fig. 13....  $J_1 = 4 \cos 60$   $J_2 = 4 \sin 60$   
Fig. 14....  $J_1 = 4 \cos 75$   $J_2 = 4 \sin 75$   
Fig. 15....  $J_1 = 4 \cos 90$   $J_2 = 4 \sin 90$ .

Fig. 15 ist mit Fig. 9 congruent und aus dieser durch Drehung um 90° entstanden. Die übrigen Figuren zeigen die Zwischenstadien. Zur Construction der Figur 10 dienten zwei Tabellen, welche gerade so wie Tabelle A berechnet wurden. Für die eine Tabelle ist

$$x_n = e^{\frac{n}{8 \sin 15^{\circ}}}$$
, für die zweite  $x_n = e^{\frac{n}{8 \cos 15^{\circ}}}$ .

Die Mittelpunkte der kreisförmigen Kraftlinien für

$$x_n = e^{\frac{n}{8\cos 15^{\circ}}}$$

liegen in der Geraden ab (Fig. 10), jene für

$$x_n = e^{\frac{n}{8\sin 15^{\circ}}}$$

in der zu *ab* senkrechten Geraden *cd*. Die resultirenden Kraftlinien erhält man durch entsprechende Verbindung der Schnittpunkte der beiden Kraftliniensysteme.<sup>1</sup>

In ähnlicher Weise wurden die übrigen Figuren gezeichnet und sind die Figuren 13 und 14 die um 90° gedrehten Spiegelbilder der Figuren 11 und 10.

Die Figuren auf Taf. I bis IV zeigen die successiven Veränderungen der Kraftlinien eines elektromagnetischen Drehfeldes.

Aus der angegebenen Construction lässt sich auch die Gleichung der Kraftlinien ableiten.

Wir haben eine Schaar von Kreisen, deren Gleichung durch die Formel

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = r_n^2$$
 15)

gegeben ist, mit einer zweiten Schaar von Kreisen zum Schnitt zu bringen, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + (\gamma_m - y)^2 = r_m^2,$$
 16)

wobei für ein und dieselbe Kraftlinie

$$n-m = \text{Const.} = C.$$
 17)

Es ist ferner

$$\gamma_n = g \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}, \qquad 18)$$

$$r_n^2 = \gamma_n^2 - g^2, \qquad 19)$$

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \qquad 20)$$

$$\gamma_m = g \frac{x_m^2 + 1}{x_m^2 - 1}, \qquad 21)$$

$$r_m^2 = \gamma_m^2 - g^2, \qquad \qquad 22)$$

$$\mathbf{x}_m = e^{\frac{m}{2J_2}}.$$
 23)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. auch Maxwell, Lehrb. der Elektricität und des Magnetismus, I. Bd., S. 179.

Eliminirt man aus den neun Gleichungen 15) bis 23) die Grössen

$$\gamma_n$$
,  $r_n$ ,  $x_n$ ,  $n$ ,  $\gamma_m$ ,  $r_m$ ,  $x_m$ ,  $m$ 

so ergibt sich die allgemeine Gleichung der Kraftlinien.

Zunächst erhält man aus den Gleichungen 15), 19) und 16), 22):

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = \gamma_n^2 - g^2$$
  
 $x^2 + (\gamma_m - y)^2 = \gamma_m^2 - g^2$ 

Durch Auflösung nach  $\gamma_n$  und  $\gamma_m$  erhält man

$$\gamma_n = \frac{x^2 + y^2 + g^2}{2x} \tag{24}$$

$$\gamma_m = \frac{x^2 + y^2 + g^2}{2 y}$$
 25)

Aus Gleichung 20) und 23) folgt

$$n = 2J_1 \log \operatorname{nat} x_n = J_1 \log \operatorname{nat} x_n^2,$$
  
 $m = 2J_2 \log \operatorname{nat} x_m = J_2 \log \operatorname{nat} x_m^2,$ 

und mit Berücksichtigung der Gleichung 17):

$$n-m = C = J_1 \log \operatorname{nat} x_n^2 - J_2 \log \operatorname{nat} x_m^2$$
 26)

Bestimmt man  $x_n^2$  und  $x_m^2$  aus den Gleichungen 18) und 21), so erhält man

$$\chi_n^2 = \frac{\gamma_n + g}{\gamma_n - g}, \qquad \chi_m^2 = \frac{\gamma_m + g}{\gamma_m - g}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen 24) und 25)

$$\mathbf{x}_{n}^{2} = \frac{(g+x)^{2} + y^{2}}{(g-x)^{2} + y^{2}}, \qquad \mathbf{x}_{m}^{2} = \frac{(g+y)^{2} + x^{2}}{(g-y)^{2} + x^{2}}.$$
 27)

Setzt man diese Werthe in Gleichung 26) ein, so ergibt sich als Schlussresultat

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{(g+x)^2 + y^2}{(g-x)^2 + y^2} - J_2 \log \operatorname{nat} \frac{(g+y)^2 + x^2}{(g-y)^2 + x^2} = C.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, welche mit Gleichung 3) identisch ist, erhält man die Differentialgleichung 2) und gelangt somit auf zwei verschiedenen Wegen zum gleichen Resultate.

Jedes der in Fig. 9 bis 15 dargestellten Kraftliniensysteme wird durch eine Kraftlinie, welche durch den Mittelpunkt der betreffenden Figur geht, in zwei congruente Hälften getheilt, von denen die eine mit der anderen durch eine Drehung um 180° zur Deckung gebracht werden kann. Alle Kraftlinien mit Ausnahme der Mittelpunktskraftlinien sind geschlossene Curven. Dieselben sind in nächster Nähe der Leiter 1I, 2 II, 3 III, 4 IV nahezu kreisförmig, nehmen dann eine unregelmässig eiförmige Gestalt an, aus der sie in die Lemniscatenform übergehen. Die weiteren Übergangsformen sind aus den Figuren zu entnehmen. Die Mittelpunktskraftlinien sind in Fig. 9, 12 und 15 gerade Linien, in Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 transcendente Curven, deren Gleichung lautet:

$$J_{\rm 1} \log {\rm nat} \frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} = J_{\rm 2} \log {\rm nat} \frac{(y+g)^2+x^2}{(y-g)^2+x^2}. \eqno 28)$$

Sucht man aus dieser Gleichung  $\frac{dy}{dx}$ , so ergibt sich Gleichung 2) und folgt aus der letzteren für x = y = 0

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{J_1}{J_2} = \frac{J_0 \cos \frac{2\pi t}{T}}{J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi t}{T}, \qquad 29)$$

das heisst: die durch die Gerade AB (Fig. 4) gehenden Kraftlinienelemente rotiren mit der constanten Winkelgeschwindigkeit  $\frac{2\pi}{T}$ .

Um auch über die Lage der unendlich fernen Punkte der Mittelpunktskraftlinien Aufschluss zu erhalten, führen wir

<sup>1</sup> Wir wollen dieselbe der Kürze halber mit dem Namen »Mittelpunkts-kraftlinie« bezeichnen.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Vergl. Gleichung 1).

Polarcoordinaten ein und setzen

$$x = \rho \sin \varepsilon$$
,  $y = \rho \cos \varepsilon$ .

Gleichung 28) nimmt dann folgende Form an:

$$J_{1} \log \operatorname{nat} \frac{g^{2} + 2g\rho \sin \varepsilon + \rho^{2}}{g^{2} - 2g\rho \sin \varepsilon + \rho^{2}} = J_{2} \log \operatorname{nat} \frac{g^{2} + 2g\rho \cos \varepsilon + \rho^{2}}{g^{2} - 2g\rho \cos \varepsilon + \rho^{2}}. \quad 30)$$

Dividirt man in beiden Brüchen Zähler und Nenner durch p² und sagt

$$\frac{g}{a} = \delta$$
,

so ergibt sich

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{\delta^2 + 2\delta \sin \varepsilon + 1}{\delta^2 - 2\delta \sin \varepsilon + 1} = J_2 \log \operatorname{nat} \frac{\delta^2 + 2\delta \cos \varepsilon + 1}{\delta^2 - 2\delta \cos \varepsilon + 1}.$$
 31)

Für sehr grosse Werthe von  $\rho$  sind die Binome  $\delta^2 + 2\delta \sin \epsilon$ ,  $\delta^2 - 2\delta \sin \epsilon$ ,  $\delta^2 + 2\delta \cos \epsilon$ ,  $\delta^2 - 2\delta \cos \epsilon$  sehr klein und jedenfalls kleiner als 1.

Man kann somit die Logarithmen in Reihen entwickeln und erhält, wenn noch Glieder der dritten Ordnung berücksichtigt werden

$$\begin{split} J_{\mathbf{1}} & \sin \varepsilon \left[ 1 + \delta^{\mathbf{2}} \left( \frac{4}{3} \sin^{\mathbf{2}} \varepsilon - 1 \right) \right] = \\ & = J_{\mathbf{2}} \cos \varepsilon \left[ 1 + \delta^{\mathbf{2}} \left( \frac{4}{3} \cos^{\mathbf{2}} \varepsilon - 1 \right) \right] \end{split} \quad 32) \end{split}$$

Für  $\rho = \infty$  wird  $\delta = 0$  und

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{\infty} = \frac{J_2}{J_1} = \operatorname{tg} \frac{2\pi t}{T}.$$

Es geht somit eine Tangente, welche die Mittelpunktskraftlinie im Ursprung des Coordinatensystems berührt, durch die beiden unendlich fernen Punkte dieser Curve.

Eine solche Tangente ist zugleich eine Asymptote. Dies lässt sich leicht mit Hilfe der Gleichung 2) nachweisen. Dividirt

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Gleichung 29.

man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch  $x^6$  und setzt der Kürze halber

$$1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{g^2}{x_2} = \sigma^2,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\sigma^{4} + 4g^{2}\frac{y^{2}}{x^{4}}\right)J_{2}.2\frac{y}{x} - \left(\sigma^{4} + 4g^{2}\frac{1}{x^{2}}\right)J_{1}\left(1 - \frac{y^{2}}{x^{2}} - \frac{g^{2}}{x^{2}}\right)}{\left(\sigma^{4} + 4g^{2}\frac{y^{2}}{x^{4}}\right)J_{2}\left(\frac{y^{2}}{x^{2}} - 1 - \frac{g^{2}}{x^{2}}\right) - \left(\sigma^{4} + 4g^{2}\frac{1}{x^{2}}\right)J_{1}.2\frac{y}{x}}$$
33)

Bezeichnen wir mit X, Y die unendlich grossen Coordinaten eines Punktes der Curve, für welchen  $\rho = \infty$ , so ist das Verhältniss

$$Y: X = \operatorname{ctg} \mathfrak{s}_{\infty} = \frac{J_1}{J_2}$$
 34)

und wir erhalten zunächst, indem wir in Gleichung 33) für x und y X und Y setzen und die Beziehung 34) berücksichtigen, unter Hinweglassung der unendlich kleinen Brüche

$$\begin{split} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} &= -\frac{2\,\sigma_{\infty}^{\mathrm{h}}\,J_{2}\,\frac{J_{1}}{J_{2}}-\sigma_{\infty}^{\mathrm{h}}\,J_{1}\left(1-\frac{J_{1}^{2}}{J_{2}^{2}}\right)}{\sigma_{\infty}^{\mathrm{h}}\,J_{2}\left(\frac{J_{1}^{2}}{J_{2}^{2}}-1\right)-\sigma_{\infty}^{\mathrm{h}}\,J_{1}\,.2\,\frac{J_{1}}{J_{2}}}\\ \sigma_{\infty}^{\mathrm{e}} &= 1+\frac{J_{1}^{2}}{J_{2}^{2}}. \end{split}$$

Durch entsprechende Reduction ergibt sich

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} = \frac{J_1}{J_2}.$$
 35)

Da

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\infty} = \operatorname{ctg} \, \varepsilon_{\infty},$$

so ist 1 jeder zu einem unendlich fernen Punkt einer Mittelpunktskraftlinie gezogene Radiusvector eine Asymptote, welche die Mittelpunktskraftlinie überdies im Coordinatenursprung

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Vergl. Gleichung 29.

berührt. Unter den Kraftlinien der Fig. 12 findet sich auch eine ∞-förmige Curve und lässt sich eine solche auch in den durch Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 dargestellten Systemen einschalten.

Für den Doppelpunkt dieser Curven nimmt der erste Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$  die Form  $\frac{0}{0}$  an.

Somit ist nach Gleichung 2)

$$2J_{2}(s^{4}+4g^{2}y^{2})xy = J_{1}(s^{4}+4g^{2}x^{2})(x^{2}-y^{2}-g^{2})$$
 36)

$$J_{2}(s^{4}+4g^{2}y^{2})(y^{2}-x^{2}-g^{2})=2J_{1}(s^{4}+4g^{2}x^{2})xy,$$
 37)

wobei

$$s^2 = x^2 + y^2 - g^2$$

Die Coordinaten  $x_a$ ,  $y_a$  des Doppelpunktes müssen überdies der Gleichung der Curve

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{(x+g)^2 + y^2}{(x-g)^2 + y^2} - J_2 \log \operatorname{nat} \frac{(y+g)^2 + x^2}{(y-g)^2 + x^2} = C$$
 38)

Genüge leisten.

Dividirt man Gleichung 36) durch Gleichung 37) und setzt  $x_a$ ,  $y_a$  an Stelle von x und y, so ergibt sich

$$\frac{2x_ay_a}{y_a^2 - x_a^2 - g^2} = \frac{x_a^2 - y_a^2 - g^2}{2x_ay_a}$$

und nach weiterer Reduction

$$x_a^2 + y_a^2 = g^2, 39)$$

das heisst: alle Doppelpunkte der schleifenförmigen Curven liegen in der Peripherie eines Kreises vom Radius g.

Bestimmt man  $x_a$  und  $y_a$  aus den Gleichungen 36) und 37) und substituirt deren Werthe in Gleichung 38), so erhält man für beliebige Werthe von  $J_1$  und  $J_2$  jenen Werth von C, für welchen die Gleichung 38) einer  $\infty$ -förmigen Curve angehört.

Da mit Rücksicht auf Gleichung 39) die Grösse

$$s^2 = x_a^2 + y_a^2 - g^2 = 0$$

ist, nehmen die Gleichungen 36) und 37) die einfache Form an.

$$2 J_2 y_a^3 = J_1 x_a (x_a^2 - y_a^2 - g^2) = -2 J_1 x_a y_a^2,$$
  

$$2 J_1 x_a^3 = J_2 y_a (y_a^2 - x_a^2 - g^2) = -2 J_2 y_a x_a^2$$

Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a.

und ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 1)

$$\frac{x_a}{y_a} = -\frac{J_2}{J_1} = -\lg \frac{2\pi t}{T}.$$
 40)

Hieraus folgt, dass die Bewegung des Doppelpunktes in einem Kreise vom Radius g mit constanter Geschwindigkeit

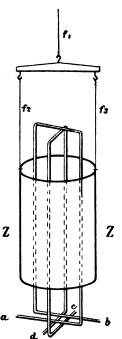


Fig. 17.

erfolgt, jedoch entgegengesetzt dem Sinne der Drehung der Asymptote der Mittelpunktskraftlinie.

Zum Schlusse möge noch eines Experimentes erwähnt werden, das als eine Ergänzung der Ferraris'schen Versuche angesehen werden kann.

Lässt man durch die Windungen ab und cd (Fig. 17) Wechselströme hindurchgehen, deren Intensitäten näherungsweise durch die Ausdrücke

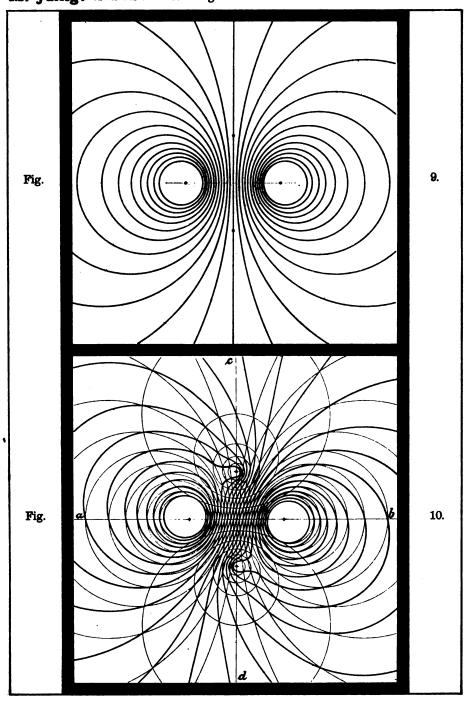
$$J_m = J \sin \frac{2\pi t}{T},$$
$$J_n = J \cos \frac{2\pi t}{T}$$

gegeben sind, so geräth ein an dünnen Seidenfäden  $f_1, f_2, f_3$  aufgehängter kupferner Hohlcylinder sofort in Rotation.

Bei Anstellung des Experimentes wurden nicht einfache Drahtwindungen

wie diese in der Figur dargestellt sind, sondern mit dünnem Kupferdraht bewickelte Rahmen mit je 480 Windungen benützt.

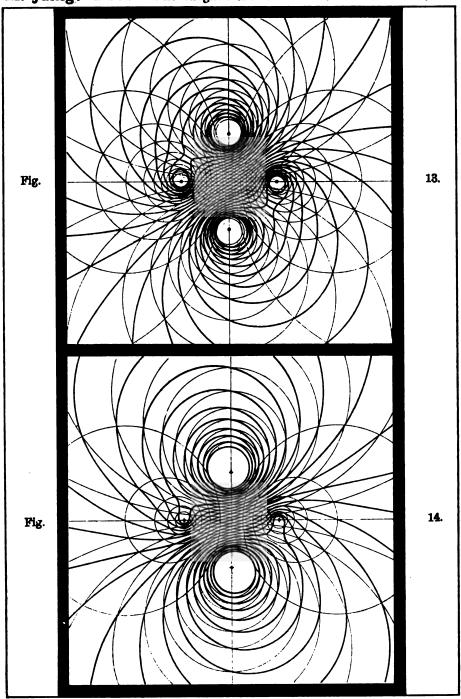
Die Erklärung des Phänomens ist durch die in den Figuren 9 bis 16 versinnlichte Bewegung der Kraftlinien unmittelbar gegeben.



Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. Clil. Abth. IIa. 1894.

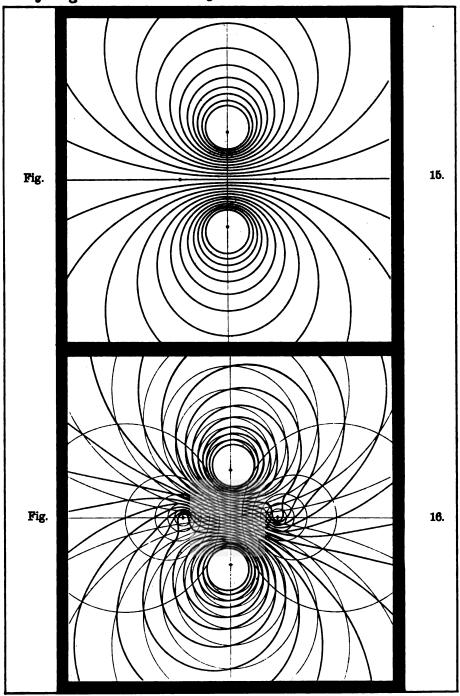
Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.





Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIa. 1894.





Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIa. 1894.

Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.



## Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Mercur

von

Dr. Eduard Frh. v. Haerdtl,

Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

Durch die grossartige Thätigkeit Le Verrier's besitzen wir heute von allen grossen Planeten Tafeln, welche die Bewegung derselben mit einer Genauigkeit darstellen, die kaum etwas zu wünschen übrig lässt.

Während für alle grossen Planeten diese Tafeln ausschliesslich auf das allgemeine Attractionsgesetz basirt erscheinen, sah sich Le Verrier bei Herstellung der Mercurstafeln, um die erforderliche Genauigkeit in der Darstellung der Beobachtungen dieses Planeten zu erreichen, gezwungen, ein empirisches Glied zu Hilfe zu nehmen. Diese empirische Correction bezieht sich ausschliesslich auf die Bewegung des Perihels der Mercurbahn, und zwar erscheint die säculare Bewegung dieses Elements um 38" grösser angenommen, als jener Werth, welchen die Theorie mit den von Le Verrier adoptirten Werthen der Massen der Planeten für diese Grösse finden lässt.

Die Astronomen haben mühevolle Arbeiten nicht gescheut, diese Unvollkommenheit in der Mercurstheorie zu beseitigen. Die Rechnungen Le Verrier's sind revidirt und auf die neuesten Beobachtungen ausgedehnt worden, aber nur mit dem Erfolge, die Resultate des berühmten Astronomen zu bestätigen.

Le Verrier selbst hat schon den Versuch unternommen, mit Zuhilfenahme einer Hypothese den Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtungen zu lösen, und zwar suchte er die anormale Bewegung des Perihels durch die Einwirkung eines oder einer Gruppe von kleinen Planeten zwischen Mercur und der Sonne zu erklären. Die Frage, ob solche Planeten wirklich existiren, beschäftigte lange Zeit hindurch die Astronomen in intensivster Weise, doch hat das eifrigste Nachforschen nach solchen Körpern bis heute noch zu keinem Resultate geführt.

Diese zuerst von Le Verrier ausgesprochene Hypothese eines intramercuriellen störenden Körpers hat mehrfache Modificationen erfahren, indem man an die Stelle eines Planeten mehrere kleinere Planetoiden treten liess oder beziehungsweise einen Ring sehr kleiner Körper. Diese Hypothesen bilden den Gegenstand einer sehr hübschen Arbeit Bauschinger's. Ich glaube mich hier mit einem Hinweis darauf begnügen zu können (Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Mercur, München 1884).

Wenngleich zugegeben werden muss, dass die Hypothesen eines oder mehrerer intramercurieller Planeten oder eines Planetoidenringes gewiss zu keiner offenbaren Unwahrscheinlichkeit oder Unmöglichkeit führen, so scheinen mir doch zu viele gewichtige Gründe gegen diese Hypothesen zu sprechen Ich will hier aber auf diese Gründe nicht näher eingehen, denn in der erwähnten Arbeit Bauschinger's findet sich das Für und Wider, welches sich gegen jede dieser einzelnen Hypothesen vom theoretischen Standpunkte sagen lässt, in einer so vollständigen Weise zusammengestellt, dass ich diesen Bemerkungen nichts Neues beizufügen hätte. Was sich aber vom Standpunkte der Beobachtung noch ausserdem gegen diese Hypothesen anführen lässt, hat wieder von Newcomb in seiner »Populären Astronomie« eingehende Behandlung gefunden.

Es ist mir nicht recht erklärlich, aber es ist Thatsache, dass in allen Arbeiten, welche sich auf die Bewegung des Mercurperihels beziehen, einer Hypothese nicht einmal Erwähnung geschieht, die auf den ersten Blick die anormale Bewegung des Mercurperihels in ungezwungenster Weise zu erklären scheint. Wenngleich wir in der Folge sehen werden, dass sich gegen diese Hypothese auch ein gewichtiger Ein-

wand erheben lässt, so scheint es mir doch nicht gerechtfertigt, dass man dieselbe bisher ganz unberücksichtigt liess. Ich vermuthe, dass man an die folgende Hypothese überhaupt nicht gedacht habe, und dass es sich einzig daraus erklärt, dass man nicht zusah, wie sich denn die Verhältnisse bei näherem Eingehen auf diese Hypothese gestalten.

Die Hypothese, auf deren nähere Untersuchung wir im Folgenden eingehen wollen, lässt sich in vier Worte zusammenfassen: Mercur habe einen Satelliten.

Bezeichnet man mit M, m, m' die Massen beziehungsweise der Sonne, des Mercur und des hypothetischen Satelliten, mit  $\mu$  die Summe dieser drei Massen

$$\mu = M + m + m',$$

so gelten die folgenden drei Differentialgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Mercursystems

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dy}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dz}.$$

Nehmen wir an, dass die Entfernungen des Satelliten und des Mercur zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt klein seien im Verhältniss zur Entfernung des Mercur von der Sonne, so lässt sich  $\Omega$  nach Potenzen der Verhältnisse  $\frac{\rho}{R}$  und  $\frac{\rho'}{R}$  entwickeln. Die Entwicklung wollen wir einstweilen nur so schreiben:

$$\Omega = \frac{1}{R} + \Omega'.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes stellt uns jenes Glied vor, von welchem die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes unter der Annahme abhängt, dass die Massen des Planeten, wie des Satelliten in demselben vereint seien.  $\Omega'$  hingegen liefert uns die Variationen der Mercurselemente, welche aus der Anwesenheit eines Satelliten resultiren würden.

Bezeichnet man mit a, a' die grossen Halbaxen der Mercursbahn und der Satellitenbahn, mit e, e' die Excentricitäten, mit l, l' die mittleren Längen, mit  $\overline{\omega}, \overline{\omega}'$  die Perihellängen, endlich mit  $\gamma$ 

die Neigung der Satellitenbahn, so liefert die Entwicklung von  $\Omega'$  bekanntlich den folgenden Ausdruck:<sup>1</sup>

$$\Omega' = + \frac{mm'}{(m+m')^2} \frac{a'^2}{a^3} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \dots + \frac{3}{4} \cos(2l'-2l) + \dots \right\}$$

In der ganzen Entwicklung von  $\Omega'$ , wenn wir dieselbe hingeschrieben denken, kommt kein Glied vor, welches  $\overline{\omega}'$  allein enthält. Wir schliessen demnach sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten keine säculare Variation der Excentricität der Mercursbahn resultiren kann. Dieses Resultat scheint mir desshalb erwähnenswerth, da der Versuch Le Verrier's, eine etwaige säculare Verbesserung dieser Excentricität empirisch aus dem Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie zu ermitteln, welche Bestimmung auch scheinbar befriedigend ausfiel, doch zu solchen Consequenzen führte, dass Le Verrier schliesslich es für besser hielt, von den hiefür erhaltenen Werth lieber keinen Gebrauch zu machen.

Aber die Variation des Perihels des Mercur enthält ein säculares Glied, welches durch den Ausdruck dargestellt erscheint:

$$e^{\frac{d\overline{\omega}}{dt}} = \frac{f\mu}{na^2} \sqrt{1 - e^2} \frac{d\Omega'}{de} =$$

$$= + \frac{3}{4} \frac{mm'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 e^{\sqrt{1 - e^2}} .n$$

und die Integration dieses Ausdruckes liefert sofort

$$\delta \overline{\omega} = \frac{3}{4} \frac{m \, m'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sqrt{1-e^2} \cdot nt.$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Le Verrier: Annales de l'Observatoire de Paris, t. IV, p. 45.

Setzen wir

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varphi}{2},$$

so geht das säculare Glied in  $\Omega'$ , welches  $\sin^2\frac{\gamma}{2}$  enthält, über in

$$-\frac{3}{8} \frac{m m'}{(m+m')^2} \frac{a'^2}{a^3} \varphi^2$$

und hiemit findet sich für die säculare Variation des Knotens der Mercursbahn der Ausdruck

$$\delta\Theta = -\frac{3}{4} \frac{m \, m'}{(m+m')^2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 nt.$$

Aus dem Vergleiche dieses Ausdruckes mit dem von òw ergibt sich sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung des Knotens resultiren müsse, welche der Grösse nach gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt der säcularen Bewegung des Perihels wäre. Wir werden auf diesen Punkt erst weiter unten näher eingehen.

Nach den früheren Bemerkungen beträgt die jährliche Variation des Perihels, welche durch die Wirkung des Satelliten zu erklären wäre, +0'38. Nimmt man aber auf jene Werthe der Massen Rücksicht, welche nach dem Stande der heutigen Forschung als die wahrscheinlichsten bezeichnet werden müssen, so erhebt sich der Werth der Perihelsbewegung auf +0'43. Wir wollen diesen letzten Werth den nachfolgenden Ausführungen zu Grunde legen, da bei Annahme dieses Werthes sich die Verhältnisse durchwegs ungünstiger gestalten, als bei Zugrundelegung des kleineren Werthes.

Substituiren wir nun für die Mercurselemente sofort die bekannten numerischen Werthe und vernachlässigen gleich im obigen Ausdrucke für ôw die Masse des Satelliten gegen die Masse des Mercur, da dieselbe ja jedenfalls nur Bruchtheile der ersteren betragen kann, so geht der obige Ausdruck in die folgende Gleichung über:

$$+0.43 = +394500 \cdot \left(\frac{m'}{m}\right) \left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

oder

$$+0.0000001089 = \left(\frac{m'}{m}\right) \left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

Wie man sieht, stehen rechts zwei Unbekannte, erstlich nämlich das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Mercur, zweitens das Verhältniss der grossen Halbaxe der Satellitenbahn zur grossen Halbaxe der Mercursbahn.

Macht man also über eine der Grössen eine beliebige Annahme, so gestattet uns diese Gleichung, sofort die andere Unbekannte zu bestimmen.

Nehmen wir an — ein Fall, der sich ja in der Wirklichkeit thatsächlich vorfindet, und zwar zwischen Mond und Erde — dass das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Planeten Mercur  $\frac{1}{80}$  betrage, so folgt sofort aus obiger Gleichung:

$$\frac{a'}{a} = +0.00295.$$

Das analoge Verhältniss  $\left(\frac{a'}{a}\right)$  zwischen Mond und Erde beträgt bekanntlich +0.00256. Man sieht, der obigen Gleichung kann man durch Annahmen genügen, die vollkommen plausibel sind und für die Analoga in unserem Planetensystem schon vorhanden sind.

Nach Le Verrier beträgt die jährliche analoge Variation des Erdperihels, also die durch den Mond auf die Erde ausgeübte säculare Störung des Erdperihels

$$\delta \overline{\omega} = +0.0698 t$$

Dieselbe ist viel kleiner als die Variation des Mercurperihels, was sich einerseits daraus erklärt, dass der Werth von  $\left(\frac{a'}{a}\right)^2$  sich ja in beiden Fällen nicht völlig deckt, anderseits aber auch daraus, dass auf der rechten Seite der Factor n, also die mittlere Bewegung des Planeten selbst, vorkommt. Dieselbe ist ja für Mercur n = 14732°, für die Erde nur n = 3548°.

Wir schliessen sofort daraus, dass für Mars und Jupiter, caeteris paribus, der Einfluss der Satelliten auf die Perihelsbewegung dieser Planeten noch kleiner sein müsse.

Ich habe das obige numerische Beispiel nur herausgegriffen, um zu zeigen, dass unsere Hypothese gewiss nicht so viel Unwahrscheinliches an sich habe, dass es gerechtfertigt erscheint, dieselbe rundweg abzulehnen. Übrigens leisten mehrere Annahmen nahezu dasselbe, wie die obige. Um einen Überblick hierüber zu ermöglichen, habe ich das folgende Täfelchen gerechnet.

Unter nachfolgenden Annahmen über das Verhältniss der Masse des Satelliten zur Masse des Mercur, welche sich in der ersten Verticalreihe angegeben finden, resultiren jene Werthe von a', also die zugehörigen Werthe der grossen Halbaxe der Satellitenbahn, die sich in der zweiten Verticalreihe wiedergegeben finden.

In der letzten Verticalreihe theile ich endlich noch die entsprechenden Umlaufszeiten mit.

m'	log a' (astr. Einheiten)	a' (in Einheiten des aeq. Durchmessers des Mercur)	T (in Tagen)
1: 50	6.956	28	23
1: 80	$7 \cdot 058$	35	33
1:100	7 · 106	40	39
1:150	7 · 194	49	53
1:200	$7 \cdot 257$	56	66

Hätten wir für die jährliche Bewegung den kleineren Werth Le Verrier's statt des Werthes +0.43 zu Grunde gelegt, so könnte man noch die Masse des Satelliten kleiner annehmen, als es hier zulässig erscheint.

Greift man nun auf die früher gegebene Entwicklung von  $\Omega'$  zurück, so lässt eine kurze Rechnung uns sofort finden, dass bei Zugrundelegung auch des grösstmöglichen Werthes für die Masse des Satelliten, alle Ungleichheiten, welche aus den periodischen Gliedern der Function  $\Omega'$  resultiren würden, nur verschwindende Coëfficienten erreichen können.

Wie wir schon bemerkten, bedingt die Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung der Knotenlänge, welche jener der Perihelslänge an Grösse nicht nachsteht.

Derselben scheinbaren Schwierigkeit begegnet man aber auch dann, wenn man, von der Hypothese Le Verrier's oder einer dieser ähnlichen Hypothese ausgehend, die anormale Perihelsbewegung des Mercur zu erklären versucht, denn sofern man nicht die Lage der Bahn des einzelnen Planeten oder der Planetengruppe oder des Planetoidenringes mit der Lage der Mercursbahn nahe zusammenfallend annimmt, resultirt auch hier ein sehr merkbarer Betrag für die Änderung dieses Elements. Es genügt wohl, hier diesen Umstand erwähnt zu haben.

Man könnte sofort, das Nichtvorhandensein einer Anomalie in der Bewegung des Knotens der Mercursbahn als feststehende Thatsache ansehend, zur Erklärung dieses Umstandes, welcher mit unserer Hypothese in Widerspruch zu stehen scheint, eine weitere Hypothese heranziehen, nämlich die Annahme, dass die Neigung der Bahn des Satelliten verschwindend sei. Unter dieser Annahme wird  $\sin\frac{\gamma}{2}=0$ , es verschwindet also das säculare Glied mit der Neigung als Factor in  $\Omega'$ , mithin wird auch  $\delta\theta=0$ .

Obwohl es sich nicht verkennen lässt, dass eine solche Annahme hier absolut nicht so viel Bedenkliches an sich trägt wie die analoge Annahme im Falle der intramercuriellen Planeten, will ich diese Annahme hier aber gar nicht ernstlich in Erwägung ziehen, denn es scheint mir, dass kein zwingender Grund besteht, der ersten Hypothese gleich mit einer zweiten zu Hilfe zu kommen.

Die diesbezügliche Frage, welche ich hier noch in Kürze behandeln will, möchte ich so formuliren: Ist es zulässig, eine Knotenbewegung der Mercursbahn ungefähr von derselben Grösse wie die Perihelsbewegung anzunehmen? Oder auch: Begegnet man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmaterials, welches Le Verrier der Ermittlung der Constanten der Mercursbahn zu Grunde gelegt hat, schon derartigen Schwierigkeiten, dass man mit voller Berechtigung behaupten könne, die Beob-

achtungen liessen die Annahme einer derartigen Bewegung überhaupt nicht zu?

An mehreren Orten habe ich die Behauptung aufgestellt gefunden, dass die Untersuchungen Le Verrier's evident bewiesen, dass keine Abweichung zwischen dem theoretischen und beobachteten Werthe der Knotenbewegung der Mercursbahn vorhanden sei. So genau ich die schönen Arbeiten Le Verrier's auch durchgesehen habe, so habe ich trotzdem nirgends von Le Verrier selbst eine derartige Behauptung ausgesprochen gefunden. Und wie wir gleich sehen werden, sprechen viele Umstände dagegen, dass Le Verrier auch diese Ansicht überhaupt habe aussprechen können. Im Gegentheil, Le Verrier macht selbst ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Bestimmung der Knotenlänge sehr unsicher sei. Während z. B. sämmtliche Meridianbeobachtungen für die Knotenlänge die Correction  $\delta\theta = +12.4$  ergeben, zeigt es sich, dass den Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus den Mercursdurchgängen abgeleitet hatte, besser genügt werde, wenn man für δθ einen negativen Werth annimmt. Le Verrier bemerkt hiezu noch (p. 92): »N'ayant aucune raison de choisir entre ces deux quantités, nous accepterons la valeur moyenne  $\delta \theta = +5.5$ 

Die Behauptung also, dass eine grössere Bewegung des Knotens ausgeschlossen erscheine, ist demnach nicht auf Le Verrier zurückzuführen und dieser Umstand allein vermindert schon wesentlich das Gewicht derselben.

Nehmen wir für die jährliche Änderung des Knotens denselben Werth an, wie für die jährliche Änderung des Perihels, also  $\delta\Theta = -0.43 t$ , so resultiren für die folgenden Jahre, 1697, 1723... bis 1848, also jene Jahre, in welchen die Mercursdurchgänge beobachtet wurden und welche allein zur Verbesserung der Elemente dieses Planeten von Le Verrier herangezogen erscheinen, die folgenden Variationen der Position des Knotens, welche wir mit  $\delta\Theta$  bezeichnen und in der zweiten Verticalreihe ansetzen wollen.

Datum	96		. <i>E</i>
1697	+65'9	+0.032 \$\textit{\theta}	+2:1
1723	+54.6	+0.01290	+0.7
1736	+49.0	$\begin{array}{l} +0.0458\theta \\ -0.0528\theta \end{array}$	$\begin{cases} +2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 5 \end{cases}$
1743	+46.0	$\begin{cases} -0.039  \theta \\ +0.024  \theta \end{cases}$	$\begin{cases} -1.8 \\ +1.1 \end{cases}$
1753	+41.7	<b>—</b> 0⋅033 <b>₹</b> 9	-1 · 4
1769	+34.8	+0·018 8 <del>0</del>	+0.6
1782	+29.2	( +0.055 8 <del>0</del> ( −0.056 8 <del>0</del>	$\{ +1.6 \\ -1.6 $
1786	+27.5	$\begin{array}{l} (-0.085 \delta \Theta) \\ +0.057 \delta \Theta \end{array}$	$\begin{pmatrix} -2 \cdot 3 \\ +1 \cdot 6 \end{pmatrix}$
1789	+26.2	$\begin{cases} -0.033  \theta \\ +0.018  \theta \end{cases}$	(-0·9 (+0·5
1799	+21.9	$\begin{array}{l} +0.020  \delta\Theta \\ -0.052  \delta\Theta \end{array}$	$\{ +0.4 \\ -1.1 $
1802	+20.6	—0·012 <del>80</del>	-0.5
1832	+ 7.7	\( \begin{aligned} \cdot \cdo	\( \( \begin{array}{c} -0.5 \\ +0.3 \end{array} \)
1845	+ 2.2	+0.041 8€	+0.1
1848	+ 0.9	+0.001 9 <del>0</del>	0.0

Die Zahlen der dritten Verticalreihe habe ich den Untersuchungen Le Verrier's entnommen, und zwar der Zusammenstellung der Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus der Discussion der Beobachtungen der Mercursdurchgänge abgeleitet hat (S. 80, Bd. V).

Multiplicirt man die Zahlen dieser dritten Zeile mit den nebenanstehenden Zahlen linker Hand, so resultiren die Zahlen E, die wir in der vierten Verticalreihe angesetzt haben. Ein Blick auf diese Werthe genügt, um uns davon zu belehren, welch' ausserordentlich geringen Einfluss sogar sehr starke Variationen der Knotenlänge hier nur ausüben.

Die E-Werthe übersteigen nur in wenigen Fällen jene Fehler, welche in den Bedingungsgleichungen übrig bleiben

wenn man in demselben die von Le Verrier schliesslich adoptirten Verbesserungen der Constanten der Mercursbahn zurücksubstituirt. Wie mir eine vorläufige Rechnung gezeigt hat, lassen sich diese Fehler aber durch ganz geringfügige Variation der 14 Unbekannten, welche in den aus den Mercursdurchgängen abgeleiteten Bedingungsgleichungen vorkommen, noch sehr wesentlich herabdrücken.

Ich will hier auf diese Rechnung nicht näher eingehen, denn ich glaube, die wenigen Zahlen, die ich hier mitgetheilt habe, beweisen zur Genüge, dass das Beobachtungsmaterial, welches Le Verrier, so weit es die Mercursdurchgänge anlangt, herangezogen hat und heranziehen konnte, keineswegs die Behauptung stützt, dass eine der Perihelsbewegung adäquate Änderung des Knotens, als ausgeschlossen zu betrachten sei.

Zu ganz demselben Resultate haben mich meine provisorischen, die Meridianbeobachtungen betreffenden Rechnungen geführt, aus welchen Le Verrier 195 Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, die die Form haben:

$$c_1\delta\varphi+c_2\delta\Theta\pm C=0.$$

Für die Meridianbeobachtungen, welche die Jahre 1801 bis 1842 umfassen, ist das Maximum von  $\delta\Theta$  rund 20". Wirst man aber einen Blick auf die Bedingungsgleichungen (S. 89, Bd. V), so sieht man, dass im Mittel die Coëfficienten  $c_2$  rund  $\pm 0.05$  betragen. Wir schliessen sofort, dass hier der Einfluss einer Correction der Knotenlänge demnach auch nicht über 1" steigen könne.

In vielen der untersuchten Fälle zeigte mir die Rechnung, dass bei Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in dem Ausdrucke der Knotenlänge sich sogar die Darstellung der Beobachtungen besserte. In keinem einzigen Falle, obwohl ich gerade die Bedingungsgleichungen, in welchen  $c_2$  möglichst gross war, heranzog, stieg der Fehler auf einen solchen Betrag, dass die Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in  $\Theta$  als unzulässig bezeichnet werden könnte.

Die wenigen Bemerkungen, die ich zu dieser Frage hier mittheilte, beweisen zur Genüge, dass man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmateriales, welches Le Verrier der Ermittlung der Constanten der Mercursbahn zu Grunde legte, mit der Annahme einer der Perihelsbewegung adäquaten Bewegung des Knotens keineswegs auf derartige Schwierigkeiten stösst, dass man behaupten darf, die Beobachtungen schliessen eine derartige Annahme überhaupt aus. Ob bei Heranziehung des seither angewachsenen Beobachtungsmateriales sich nicht die Verhältnisse ungünstiger gestalten, lässt sich natürlich ohne eingehende Untersuchung nicht beurtheilen. Eine derartige Untersuchung liegt in meiner Absicht.

Vom theoretischen Standpunkte scheint sich mir, wie aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt, wohl kein Argument deduciren zu lassen, das die Hypothese eines Mercursatelliten als unhaltbar erscheinen liesse. Wohl erübrigt es noch zu untersuchen, ob die aus der Anwesenheit eines Satelliten resultirenden periodischen Störungen kurzer Dauer nicht mit den Beobachtungen in Widerspruch gerathen. Diese Störung ist jedoch so geringfügig, dass es sehr eingehender Untersuchungen bedürfte, um hierüber ein Urtheil gewinnen zu können.

Vom Standpunkte der Beobachtung lässt sich aber gegen diese Hypothese ein sehr gewichtiger Einwand vorbringen, dem ich hier noch Platz geben will.

Die Existenz eines Satelliten ist bekanntlich nur dann möglich, wenn die Massen und Entfernungen des Satelliten wie des Planeten der Gleichung genügen:

$$\frac{m+m'}{r'^2} > \left(\frac{1}{r+r'}\right)^2 - \frac{1}{r^2}.$$

Mit Berücksichtigung einiger Vernachlässigungen, die wohl keiner näheren Rechtfertigung bedürfen, lässt sich diese Ungleichheit auf die folgende zurückführen:

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 < \frac{m}{2}$$
.

Nehmen wir nun die Masse des Mercur zu 1:5,500.000 an, so wird erst

$$\frac{r}{r'} > 220$$
,

und die Substitution dieses Werthes in die Bedingungsgleichung für die Perihelsbewegung ergibt für das Verhältniss der Massen die Bedingung

$$\frac{m'}{m} > 0.005.$$

Unter der Annahme, dass die Dichte des Satelliten gleich der Dichte des Mercurs sei, müssen die Oberflächen derselben Bedingung genügen und man ist sofort in der Lage, auch die Grössenclasse des Satelliten zu bestimmen. Legt man aber auch andere Annahmen über das Dichtenverhältniss zu Grunde, man gelangt durchwegs zu analogen Resultaten, dass nämlich der Satellit so hell wäre, dass es als nicht wahrscheinlich bezeichnet werden muss, dass der hypothetische Satellit bis heute sich der Beobachtung habe entziehen können. Um die Grössenclasse des Satelliten wesentlich unter die fünfte herabzudrücken, müsste man schon zu Annahmen greifen, die nicht mehr den Charakter der Ungezwungenheit an sich tragen.

Wohl könnte man durch die Annahme mehrerer Satelliten, durch entsprechend veränderte Annahme über die Masse des Mercurs, welche Constante ja heute noch keineswegs als vollkommen verbürgt angesehen werden kann, endlich durch eine Zugrundelegung eines etwas kleineren Werthes für die Differenz der Perihelsbewegung als jenen, von dem wir Gebrauch gemacht haben, es erreichen, dass die Sichtbarkeitsbedingungen merklich ungünstigere würden, doch glaube ich nicht, dass die Hypothese eines Satelliten durch solche Stützen auf schwankendem Boden an Haltbarkeit gewinne.

## Ein Beitrag zur Kenntniss der 26tägigen Periode des Erdmagnetismus

von

## J. Liznar.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Existenz einer fast 26tägigen Periode der erdmagnetischen Kraft dürfte nach den vielfachen darüber angestellten Untersuchungen als vollkommen erwiesen betrachtet werden. Alle Forscher, welche sich mit dieser Frage beschäftigt haben, suchten zunächst die Dauer der Periode zu ermitteln, ohne auf deren weitere Eigenschaften näher einzugehen. Eine periodische Änderung ist aber durch ihre Dauer allein nicht hinreichend charakterisirt, es müssen vielmehr noch die Eintrittszeiten der Extreme, sowie die Grösse der Schwankung in Betracht gezogen werden. Hiezu wäre erforderlich, dass die 26 tägige Periode für verschiedene Orte aus gleichzeitigen Beobachtungen abgeleitet werde. Dies ist nur für Wien und Kremsmünster und für die zwei Polarstationen Jan Mayen und Fort Rae geschehen. Man kann aus der graphischen Darstellung der Periode ersehen, dass der Verlauf derselben an den beiden Stationen ein ganz gleichartiger ist. Obwohl sich dieses Resultat zunächst blos auf jene Änderungen bezieht, welche die tägliche Schwankung im Laufe der 26 tägigen Periode zeigt, so ist es kaum zweifelhaft, dass auch die Richtungsänderungen an den beiden Polarstationen in ganz gleicher Weise erfolgen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Liznar, Über die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente in hohen magnetischen Breiten. Diese Sitzungsberichte, XCV.

In einer im October-Heft 1893 der meteorologischen Zeitschrift veröffentlichten kleinen Abhandlung habe ich gezeigt, dass die tägliche Periode des Erdmagnetismus eine eigenthümliche Abhängigkeit von der geographischen Breite zeigt, wenn man nämlich die Bewegungen der Magnetnadel, welche sie unter dem Einflusse der die Variationen bedingenden Kraft im Raume ausführt, ins Auge fasst. Es hat sich unter Anderem ein vollkommener Gegensatz zwischen der Bewegung in mittleren und hohen Breiten ergeben, indem in mittleren Breiten die Magnetnadel im Laufe des Tages eine Kegelfläche im Sinne des Uhrzeigers, in hohen Breiten aber gegen denselben, beschreibt. Dieser Unterschied in der Bewegung gab mir Veranlassung, zu untersuchen, ob ein solcher Gegensatz auch bei der 26tägigen Periode anzutreffen sei, und wie sie sich überhaupt in mittleren und hohen Breiten zu gleicher Zeit abspielt.

Obwohl es sehr wünschenswerth gewesen wäre, Beobachtungen von mehreren Orten zu verwenden, wozu ich mich aber aus Mangel an Zeit nicht entschliessen konnte, so glaube ich doch, dass die im Nachfolgenden nur für zwei Orte dargestellte 26 tägige Periode genug Interesse bietet, um eine Besprechung derselben zu rechtfertigen. Zur Berechnung der Periode habe ich die gleichzeitigen Beobachtungen von Pawlowsk und der österreichischen Polarstation Jan Mayen verwendet. Die einjährige Beobachtungsreihe der letzteren Station umfasst blos 12 Sonnenrotationen, ich hätte also eigentlich auch für Pawlowsk die Beobachtungsdaten derselben Zeit in Rechnung ziehen sollen. Um aber die Zahlen der 26tägigen Periode für Pawlowsk genauer zu erhalten, habe ich noch die zwölf nächsten Rotationen hinzugenommen, habe hiebei jedoch die Zählung der Tage an beiden Orten mit dem 8. September 1882 begonnen.

Zur graphischen Darstellung der Periode nach der von mir beschriebenen Methode i musste diese Periode sowohl für die Declination, als auch für die Inclination berechnet werden. Nachdem für Pawlowsk die Tagesmittel der Inclination nicht veröffentlicht werden, und ich dieselben für den vorliegenden

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Liznar, Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen des Erdmagnetismus. Diese Sitzungsberichte, C.

Zweck nicht eigens berechnen wollte, so habe ich zunächst die 26 tägige Periode der Horizontal- und Verticalintensität ermittelt und aus derselben die der Inclination zukommende Periode abgeleitet.

In der nachfolgenden Tabelle findet man unter  $\Delta D$ ,  $\Delta H$  und  $\Delta V$  die 26 tägige Periode der Declination, Horizontal- und Verticalintensität durch Differenzen gegen das Mittel dargestellt. Unter  $C_s$  stehen die Correctionen, welche an die Zahlen wegen der säcularen Änderung angebracht werden müssen und welche aus den Jahresmitteln für 1882 und 1884 berechnet wurden. Nach diesen Mittelwerthen beträgt die säculare Änderung bei der

Declination	Horizontalintensität	Verticalintensität
4 ' 75	0.00080	0.00205

## Pawlowsk.

	$\Delta D$	Cs	d	$\Delta H$	$C_s$	h	71.	$C_{\mathcal{S}}$	v	i
0	0:05	0!17	_0 <sup>!</sup> 12	3.7	10.3	3 . 4	4 • 1	+0.7	5.1	0!34
li		-0.16				-4.3		+0.6		
2	1	-0.12				-1.0		+0.6		0.10
3		-0.13			+0.2			+0.5		-0.12
4		-0.12	0 18		+0.2	1		+0.5		
5	0.28	-0.10	0.18	1 · 1	+0.2			+0.4		-0.10
6		-0.09	0.22	1.6	+0.1			+0.1		-0.11
7	0.28	-0.08	0.20	$2 \cdot 3$	+0.1	2 · 4	-1.9	+0.3	-1.6	-0.19
8	0.32	-0 06	0.26	3 · 4	+0.1	3.5	-0.6	+0.3	-0.3	-0.24
9	0.18	-0.02	0.13	2.8	+0.1	29	-1:7	+0.5	-1.5	-0.22
10		-0.03	0 · 19	2.6	+0.1	2.7	-1.3	+0.1	-1.2	-0 22
11	0.27	-0.02	0.25	2 · 4		2 · 4	0.6	+0.1	0.7	-0.16
12		-0.01	-0.16	-0.7				0.0		-0 01 !
13		+0.01	-0.11			1	-2.0	:	-2.0	-0 08
14	1	+0.05		0.3	-	1		-0.1		-0.07
15		+0.03	1		-0.1		- 1	-0.1		-0·05
16		+0.02			-0.1	1	1	-0.5		0.02
17		+0.06			-0.1			-0.3	1	0.15
18		+0.08		,	-0.1	0.7		-0.3		0.01
19	1		-0.24					-0.4		0.53
20			0.08		-0.2	0.1		-0.4		0.03
			<b>-0</b> ⋅07		-	-1.2	- 1	-0.2	1 . 3	0.11
22	1		-0.50			-4·2	- 1	-0.5		0.24
			-0.14					-0.6	1	0.00
			-0.02		-0.3	1.3		-0.6	2.2	-0.03
25	-0.48	+0.17	-0.31	-2.3	-0.3	-2 6	5.0	-0.7	1.3	0.30
i	ı		1	i	ı	1	!	I	1	1

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Bei der Horizontal- und Vertical-Intensität bedeuten die Zahlen Einheiten der 5. Decimale (Mm., Mg., Sec.).

Die Zahlen unter d, h und v stellen demnach die von der säcularen Änderung befreite 26 tägige Periode dar, und unter i ist die aus h und v abgeleitete Periode der Inclination ersichtlich.

Für Jan Mayen sind die Tagesmittel der Inclination publicirt worden, und ich konnte also die 26 tägige Periode dieses Elementes direct ermitteln. Indem ich auch an die Daten dieser Station die früher erwähnte Correction wegen der säcularen Änderung (0 '029 bei der Declination und 0 '012 bei der Inclination pro Tag) anbrachte, erhielt ich die auf S. 731 unter \*Beobachtung\* stehenden Zahlen.

Wollte man diese Zahlen graphisch darstellen, so ergäben sich vielfach gebrochene Linien, aus welchen man eine Gesetzmässigkeit der Bewegung kaum entnehmen könnte; die Zahlen mussten daher einer Ausgleichung unterzogen werden. Um bei dieser Operation jede Willkür zu vermeiden, berechnete ich die zwei ersten Glieder der Bessel'schen Formel und erhielt:

Pawlowsk 
$$\begin{cases} y_d = -0.2098 \sin (148.296 + 13.846 x) - \\ -0.0587 \sin (124.837 + 27.692 x) \end{cases}$$

$$y_i = 0.1779 \sin (139.743 + 13.846 x) + 0.0723 \sin (51.414 + 27.692 x)$$

$$\begin{cases} y_d = -1.0453 \sin (157.378 + 13.846 x) + \\ +0.3547 \sin (57.373 + 27.692 x) \end{cases}$$

$$y_i = 0.7602 \sin (145.906 + 13.846 x) - 0.0761 \sin (49.235 + 27.692 x)$$

wobei y den dem Tage x (vom 8. September gezählt) entsprechenden Werth der Differenz der Declination oder Inclination vorstellt, je nachdem es den Index d oder i trägt. Nach den vorstehenden Formeln habe ich die in den folgenden Tabellen unter d' und i' stehenden Werthe berechnet. Der vollkommen übereinstimmende Gang der für beide Stationen durch Rechnung erhaltenen Zahlen würde allein genügen, um das Vorhandensein einer 26 tägigen Periode ersichtlich zu machen. Auch die Eintrittszeit der Extreme zeigt eine hinreichende Übereinstimmung, wenn man die verhältnissmässig kurze Beobachtungszeit berücksichtigt. Wir sehen aber einen

sehr bedeutenden Unterschied in den Amplituden. Dieselbe beträgt:

I	Declination	Inclination
Pawlowsk	0 ! 469	0'413
Jan Mayen	2.212	1.521

Die Amplitude ist demnach nicht nur grösser in Jan Mayen, sondern übereinstimmend auch grösser für die Declination an beiden Orten.

Pawlowsk.

Tacl	Beobachtung		eobachtung Rechnung		$d'\cos J$	1'=40 cm	
Tag	d	i	ď'	i'	a cos J	x	у
1							
0	-0!12	0!34	-0 <sup>1</sup> 158	0:171	-0 <sup>1</sup> 052	-2.1	6.8
1	-0.36	0.32	-0.091	0.150	-0.030	-1.2	6.0
2	0.07	0.10	-0.014	0.108	-0.002	-0.5	4 · 3
3	0.15	-0.12	0.063	0.048	0.021	0.8	1.9
4	0.18	-0.14	0.133	-0.024	0.044	1.8	-1.0
5	0.18	-0.10	0.186	-0.099	0.061	2.4	-4.0
6	0.22	-0.11	0.219	-0.165	0.072	2.9	-6.6
7	0.20	-0.19	0.229	-0.214	0.076	3.0	-8.6
8	0.26	-0.24	0.220	-0·240	0.073	2.9	9.6
9	0.13	-0.22	0.195	-0.239	0.064	2.6	-9.6
10	0.19	-0.22	0.162	-0.214	0.053	2 · 1	-8.6
11	0.25	-0.16	0 · 126	-0.170	0.042	1 · 7	-6.8
12	-0.16	-0.01	0.091	-0.115	0.030	1 · 2	-4.6
13	-0.11	-0.08	0.062	-0.058	0.020	0.8	-2.3
14	0.30	-0.07	0.037	-0.008	0.012	0.5	-0.3
15	0.44	-0.05	0.015	0.030	0.005	0.2	1.2
16	-0.50	0.02	-0.008	0.056	-0.003	-0.1	2 · 2
17	-0.37	0.12	-0.036	0.068	-0.012	-0.5	2 · 7
18	0.00	0.01	-0.069	0.074	-0.023	-0.9	3.0
19	-0.24	0.23	-0.109	0 077	-0.036	-1.4	3 · 1
20	0.08	0.03	-0.152	0.083	-0.050	-2.0	3.3
21	-0.07	0.11	-0.192	0.095	-0.073	-2.5	3.8
22	-0.50	0.24	-0.224	0.115	-0.074	-3.0	4.6
23	-0.14	0.00	-0·240	0.138	-0.079	-3.5	5.5
24	-0.05	-0.03	-0.236	0.160	-0.078	-3.1	6.4
25	-0.31	0.20	0.208	0.178	-0·0 <b>6</b> 9	-2.8	6.9

Jan Mayen.

Tes	Beoba	Beobachtung		Rechnung		1'=	10 cm
Tag	d	i	d'	i'	$d'\cos J$	x	у
0	-0 <sup>1</sup> 26	1 ! 01	-0 <sup>1</sup> 103	0!368	-0'020	-0.2	3 · 7
1	1.74	0.14	0.194	0.189	0.037	0.4	1.9
2	1.71	0.68	0.420	0.011	0.080	0.8	0.1
3	0.80	-0.22	0.565	<u>-0.155</u>	0.107	1 · 1	-1.5
4	-0.80	-0.48	0.639	-0.302	0.121	1.2	-3.0
5	1 · 79	-0.59	0.657	-0.427	0.125	1.2	<b>-4</b> 3
6	0.77	-0.39	0.665	-0.529	0.126	1.3	-5.3
7	0.50	-0.98	0.671	-0.608	0.127	1.3	-6.1
8	0.64	-0.48	0.694	-0.664	0 · 132	1.3	6.6
9	0.94	-0.86	0.738	-0.693	0.140	1 · 4	-6.9
10	1.62	-0.92	0.787	-0·69 <del>4</del>	0 · 150	1.5	-6.9
11	0.56	-0.55	0.817	-0.662	0.155	1.6	-6.6
12	0.63	-0.42	0.787	0.592	0.150	1.5	5.8
13	-0.58	-0.44	0.701	-0.484	0.133	1.3	-4.8
14	-0.88	1 · 41	0.513	-0.337	0.097	1.0	-3.4
15	0.84	-0.99	0.235	-0.158	0.045	0.4	-1.6
16	1 · 50	-1.29	-0.113	0.042	-0.021	-0.5	0.4
17	0.74	-0.69	-0.493	0.250	-0.094	-0.8	2.5
18	-1.21	1.33	-0 856	0.448	-0.163	-1.6	4.5
19	-2.86	0.95	-1.154	0.618	-0.215	-2.1	6.2
20	0.08	0.54	-1:342	0 744	-0.255	-2.5	7.4
21	-4.42	2.63	-1.895	0.816	-0.265	-2.6	8.2
22	0.08	1.17	-1:307	0.827	0.248	-2.5	8.3
23	-1.52	-1.08	1.095	0.779	-0.208	-2.1	7.8
24	0.18	-0.25	0.792	0.678	-0.150	-1.5	6.8
25	-0.39	0 80	<b>-0.436</b>	0.536	0.083	0·8	5 · 4

Eine noch bessere Übersicht über den Verlauf der Periode erhalten wir durch die graphische Darstellung derselben. Um die Abscissen zu erhalten, müssen die Werthe d' mit dem Cosinus der Inclination multiplicirt werden. Für Pawlowsk beträgt  $J=70^{\circ}44'$  (cos J=0.33), für Jan Mayen ist  $J=79^{\circ}2!1$  (cos J=0.19). Um die Curven in entsprechendem Massstab zu erhalten, wurden die unter d' cos J und i' befindlichen Werthe bei Pawlowsk mit 40, bei Jan Mayen mit 10 multiplicirt, d. h. es wurde der Massstab für die Zeichnung so

gewählt, dass im ersten Falle  $1' = 40 \, cm$ , im zweiten aber  $1' = 10 \, cm$ . Diese so berechneten Coordinaten findet man unter der Überschrift x, y auf S. 733 und 734. Der Massstab entspricht bei Pawlowsk einer Entfernung der Zeichnungsfläche vom Schwerpunkte der Magnetnadel = 1375 m, während er bei Jan Mayen auf ein Viertel reducirt ist und der Distanz = 344 mzukommt. Die Verschiedenheit des Massstabes beider Curven hat den Nachtheil, dass man das wirkliche Flächenverhältniss derselben nicht direct ersieht. Da ich die kleine Bewegung in Pawlowsk besser zur Anschauung bringen wollte, musste ein grösserer Massstab gewählt werden, nach welchem aber die Curve für Jan Mayen den Umfang des Formats überschritten hätte, und aus diesem Grunde eine Reduction des Massstabes erheischte. Aus dem unter  $\delta' \cos J$  und i' stehenden Zahlen ist übrigens Jedermann in der Lage, die Curven in einem beliebigen Massstabe zu construiren, wenn ihn das wirkliche Flächenverhältniss interessiren sollte: ich habe durch die entworfenen Curven vornehmlich die Form derselben veranschaulichen wollen.

Die beigegebene Tafel enthält die diesen Coordinaten entsprechenden Curven. Wenn man die tägliche Bewegung der Magnetnadel an den beiden Orten graphisch darstellt, so ergeben sich Curven, welche ein gänzlich verschiedenes Aussehen haben. Während die für Pawlowsk erhaltene Curve einer Ellipse nicht unähnlich sieht, deren grössere Axe horizontal liegt, ist umgekehrt bei Jan Mayen die Curve mehr nach der Inclinationsrichtung gestreckt. Bei der 26tägigen Periode ist in der Form der beiden Curven kein wesentlicher Unterschied vorhanden. und die Formen würden vielleicht noch übereinstimmender sein, wenn ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial ihrer Construction zu Grunde gelegt werden könnte. Überraschend ist die vollkommen gleiche Lage der Curven gegen den mittleren magnetischen Meridian. Sieht man von dem kleinen oberen Theile der für Jan Mayen gezeichneten Curve ab, so ergibt sich auch die Richtung der Bewegung für beide Orte gleich, nämlich im Sinne des Uhrzeigers.

Die vorstehenden Darlegungen machen es höchst wahrscheinlich, dass die Bewegung der Magnetnadel wäh-

rend der 26tägigen Periode in mittleren und hohen Breiten eine vollkommen gleichartige ist.

Der ganz gleichartige Verlauf der Periode, sowie die Kleinheit ihrer Amplitude könnten die Vermuthung aufkommen lassen, dass diese periodische Änderung einem directen magnetischen Einflusse zuzuschreiben sei. In diesem Sinne äussert auch H. Wild seine diesbezügliche Ansicht in einer jüngst erschienenen Abhandlung 1 mit folgenden Worten: »Mit einem directen magnetischen Einfluss der Sonne auf die Erde lässt sich weiterhin wieder die von Braun und Hornstein ermittelte. der Dauer der Sonnenrotation entsprechende, circa 26 tägige Periode der erdmagnetischen Elemente vereinen, die später mannigfache Bestätigungen erfahren hat. Dass deren Amplitude, die z. B. in Pawlowsk für die Declination nach Müller 0'52 beträgt, nach Liznar mit höherer Breite des Beobachtungsortes zunimmt, stimmt auch generell mit unserer Berechnung, doch weist auch da die relativ viel stärkere Zunahme auf weitere modificirende Umstände hin.«

Würden die im Verlauf der 26 tägigen Periode auftretenden Abweichungen von der Mittellage von einer directen magnetischen Einwirkung der Sonne herrühren, so liesse sich die Grösse und Richtung der ablenkenden Kraft in sehr einfacher Weise berechnen. Die Richtung der ablenkenden Kraft, die ihren Sitz in der Sonne haben sollte, müsste dann stets nach der Sonne weisen.

Ich habe diese Berechnung für Pawlowsk durchgeführt und hiezu die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Daten verwendet. Unter D, H, V stehen die durch directe Berechnung der 26 tägigen Periode erhaltenen Zahlen, aus denen die auf S. 728 mitgetheilten Differenzen abgeleitet worden sind.

Unter  $D_1$ ,  $H_1$ ,  $V_1$  habe ich jene Zahlen eingetragen, welche durch eine Ausgleichung nach der Formel  $\frac{w_{m-1}+w_m+w_{m+1}}{3}$  erhalten worden sind, wobei  $w_m$  den Werth eines der erdmagnetischen Elemente bedeutet, der dem  $m^{\text{ten}}$  Tage der Periode

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Magnetische Wirkung der Gestirne auf der Erde. Mélanges phys. et chim., tome XIII, p. 338.

Pawlowsk.

	D	H	v	$D_1$	$H_1$	$V_1$
0	0°41'01	1 · 63752	4.68639	0°40'97	1.63752	4.68615
1	40.77	743	605	40.99	757	606
2	41.20	776	605	41.08	775	599
3	41 · 28	805	587	41.26	796	590
4	41.31	807	579	41.30	803	583
5	41.31	799	583	41.33	803	580
6	41.37	803	577	41.34	803	57 <b>7</b>
7	41.33	810	572	41.36	811	578
8	41 · 39	821	585	41.33	815	577
9	41 · 26	815	573	41 · 32	816	578
10	41.32	813	576	41.32	813	581
11	41.38	810	595	41 · 22	801	579
12	40.97	779	565	41 · 12	795	576
13	41.02	797	568	41 • 14	788	566
14	41.43	789	566	41.31	792	571
15	41.57	791	580	41.31	786	574
16	40.93	778	577	41.09	779	583
17	40.76	769	591	40.94	780	593
18	41.13	793	611	40.93	769	592
19	40.89	746	574	41.08	775	596
20	41.21	787	604	41.05	769	593
21	41.06	774	- 601	40.97	778	593
22	40 <del>0</del> 3	744	573	40.89	768	587
23	40.99	785	586	40 90	776	591
24	41.08	799	613	40.96	781	600
<b>25</b>	40.82	760	601	40.97	770	617
	0°41!13	1.63786	4.68588	0°41!13	1.63786	4.68588

zukommt. Bezeichnet man die am Fusse der Tabelle stehenden Mittelwerthe mit  $D_0$ ,  $H_0$ ,  $V_0$ , jene aber, die einem beliebigen Tage der Periode entsprechen, mit  $D_m$ ,  $H_m$ ,  $V_m$ , so sind die drei Componenten der ablenkenden Kraft gegeben durch die Ausdrücke:

$$x = H_m \cos D_m - H_0 \cos D_0$$
  

$$y = H_m \sin D_m - H_0 \sin D_0$$
  

$$z = V_m - V_0$$

Die Componenten x und y wirken in der Ebene des Horizonts, und zwar erstere in der Meridianebene und positiv nach N, letztere senkrecht dazu und positiv nach W. Die Kraft z steht senkrecht gegen den Horizont und ist positiv, wenn sie nach abwärts wirkt. Aus den drei Componenten folgt die ablenkende Kraft  $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Für das Azimut  $\alpha$  und die Neigung n derselben gegen den Horizont hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}^{1}, \quad \operatorname{tg} n = \frac{z}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}}.$$

Die folgende Tabelle enthält die Werthe von x, y, z, A,  $\alpha$  und n. Die Kraft ist in Einheiten der fünften Decimale des Mm. Mmg. Sec.-Systems ausgedrückt. Die Zählung des Azimuts erfolgt von N über W von 0°—360°; die Neigung n hat das positive Vorzeichen, wenn die Kraft unter den Horizont gerichtet ist.

Nachdem sämmtliche Zahlen für die 26 tägige Periode aus den Tagesmitteln abgeleitet worden sind, also für den Mittag der einzelnen Tage gelten und ausserdem als Mittelwerthe von 24 Sonnenrotationen fast derselben Höhe der Sonne entsprechen, so müsste sich vor Allem der Werth von u stets gleich ergeben, oder er dürfte nur geringe Variationen zeigen. Das Azimut müsste den Werth 180° und 0° aufweisen. Wir sehen, dass die Daten der Tabelle diesen Forderungen nicht entsprechen und müssen daraus schliessen, dass die zur Berechnung der ablenkenden Kraft benützten Formeln auf unrichtigen Voraussetzungen basiren. Wir gelangen somit zu dem Endergebniss, dass auch die verhältnissmässig kleinen Variationen, welche die 26 tägige Periode des Erdmagnetismus bilden, nicht von einer directen magnetischen Wirkung der Sonne herrühren können, sondern dass auch sie ihren Grund in einer indirecten Wirkung der Sonne haben müssen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> In der in der meteorologischen Zeitschrift (October-Heft 1893) erschienenen Abhandlung steht infolge eines Druckfehlers tg  $\alpha = \frac{y}{2}$ .

Tag	х	У	<i>z</i>	A	α	п
0	-34	<b>—</b> 8	27	44	193°2	3797
1	29	<b>—</b> 7	18	35	193.6	31.1
2	-11	<b>— 7</b>	11	17	212.5	40.1
3	7	6	2	9	<b>4</b> 0 · <b>6</b>	12.2
4	17	8	<b>—</b> 5	19	25.2	-14 9
5	17	10	<b>—</b> 8	21	30.2	<b>—22</b> ·1
6	17	10	11	23	30.5	-29.1
7	26	11	-10	30	22.9	<b>—19·5</b>
8	29	10	11	33	19.0	-19.7
9	<b>3</b> 0	9	-10	33	16.7	-17.7
10	27	9	<b>— 7</b>	29	18.4	-13.8
11	16	4	— 9	19	14.0	-28.6
12	9	0	-12	15	0.0	—53°1
13	2	0	-22	22	0.0	-84.8
14	6	9	-17	20	56.3	-57.5
15	0	9	-14	17	90.0	57.3
16	<b>—</b> 7	- 2	<del></del> 5	9	195.9	-34.5
17	- 6	- 9	5	12	236 · 3	24.8
18	<b>—</b> 17	-10	4	20	210.5	11.5
19	-11	<b>—</b> 3	8	14	195.3	35.0
20	—17	- 4	5	15	193.2	16.0
21	-18	- 8	5	20	204.0	14.2
22	18	-12	1	22	213.7	- 2.6
23	-10	—11	3	15	227 · 7	11.4
24	- 4	<b>—</b> 8	12	15	243 · 4	53.5
25	16	8	29	34	206.6	62.9

Wenn man einmal das Wesen dieser indirecten Einwirkung erkannt haben wird, dürfte die Erklärung der bisher so räthselhaften Änderungen kaum grössere Schwierigkeiten darbieten. Da nach den bisherigen Untersuchungen die so ausgesprochen von der Sonne abhängigen Variationen eine directe magnetische Wirkung derselben nicht erkennen lassen, so dürfte es schon aus diesem Grunde schwer fallen, jene kleinen Variationen, welche Leyst für die verschiedene Stellung der Planeten zur Erde aus den Pawlowsker Beobachtungen abgeleitet hat,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Über den Magnetismus der Planeten. Repert. f. Met., XVII. Mir ist diese Arbeit noch nicht zugänglich gewesen, ich habe von ihr Kenntniss erhalten durch die oben angeführte Abhandlung von H. Wild.

auf eine magnetische Wirkung dieser Planeten zurückzuführen. Zu dieser Folgerung gelangt auch Wild in seiner früher citirten Abhandlung, und zwar auf einem ganz anderen Wege, als es der ist, den ich hier eingeschlagen habe. Die in früherer Zeit so häufig gehegte Vermuthung, dass die Sonne und möglicherweise auch die Planeten directe magnetische Wirkungen ausüben könnten, hat demnach keine Berechtigung.

Die Erkenntniss, dass alle beobachteten Variationen des Erdmagnetismus auf eine indirecte Wirkung zurückgeführt werden müssen, lässt es umso wünschenswerther erscheinen. dass auch über etwaige Verschiedenheiten der Variationen mit der Entfernung von der Erdoberfläche sorgfältige Beobachtungen angestellt werden. In dieser Beziehung ist noch fast gar nichts geschehen; denn, soviel mir bekannt, existiren aus grösseren Höhen nur die Variationsbeobachtungen der Declination vom Säntis, welche von Dr. F. Maurer und theilweise von Beyer im Herbst und Winter 1884 ausgeführt worden sind.<sup>1</sup> Aber selbst dieses spärliche Beobachtungsmaterial scheint auf eine nicht unbedeutende Verschiedenheit der Variationen in der Höhe gegen jene der Tiefe hinzudeuten. Ein Vergleich der gleichzeitigen Daten vom Säntis und von Wien ergibt für die Höhenstation eine um 0.5 grössere Amplitude, und zwar sowohl im November, als auch im December. Dieser Unterschied würde sich aber höchst wahrscheinlich für die Sommermonate noch grösser ergeben haben.

Um ein richtiges Bild der Variationen in der Höhe zu bekommen, genügt es aber durchaus nicht, nur etwa die Declinationsvariationen zu beobachten, es müssten vielmehr die drei
Elemente: Declination, Horizontal- und Verticalintensität wenigstens durch ein volles Jahr regelmässig aufgezeichnet werden.
Am einfachsten liesse sich das erforderliche Beobachtungsmaterial durch einen Magnetographen beschaffen, dessen Bedienung mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden ist
und der auch ohne Controle durch absolute Messungen ein
zur Ableitung der täglichen Periode geeignetes Material liefern

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Maurer, Einfluss der Höhe auf die täglichen Variationen der magnetischen Declination. Met. Zeitschr., XX, S. 180.

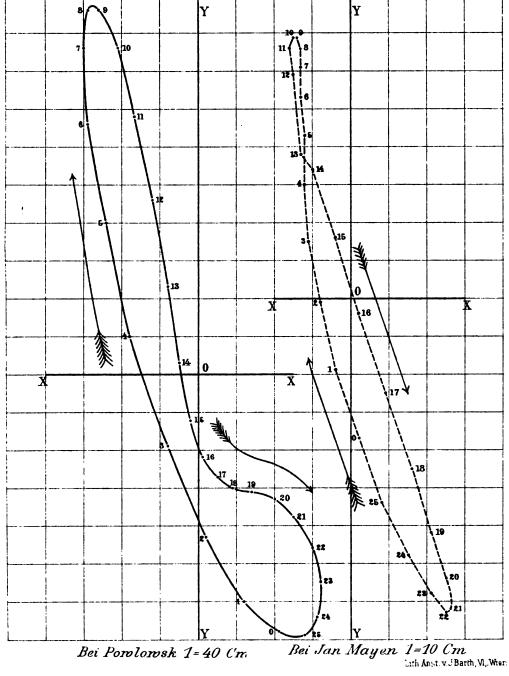
würde. Da meteorologische Observatorien auf Berggipfeln ohnehin bestehen, so kann es sich bei der hier angeregten Frage nur um jene Geldsummen handeln, welche zur Herstellung eines geeigneten Locales zur Unterbringung des Magnetographen und zur Anschaffung des letzteren nöthig sind.

Zur Aufstellung eines Magnetographen scheint mir unser höchstes Bergobservatorium am Sonnblick, dem die meteorologische Wissenschaft so manche Bereicherung verdankt, sehr geeignet zu sein, und es würde sich sehr empfehlen, an diesem Observatorium den ersten derartigen Versuch zu unternehmen. Es ist kaum zweifelhaft, dass, wenn sich hier eine Verschiedenheit der Bewegung der Magnetnadel ergeben sollte, dann auch andere Bergobservatorien dem Beispiele mit Eifer nachfolgen werden, und dass wir dann in nicht sehr langer Zeit ein hinreichendes Material besitzen werden, um uns über die Verschiedenheiten der Variationen ein richtiges Bild verschaffen zu können, während wir heute auf blosse Vermuthungen angewiesen sind, die selbstverständlich nie einer Erklärung der Variationen zur Grundlage dienen können.

Der Umstand, dass sich zur Erhaltung des Observatoriums am Sonnblick ein eigener Verein gebildet hat, der »Sonnblick-Verein«, lässt mich hoffen, dass die von mir gegebene Anregung auch bei diesem Vereine eine entsprechende Würdigung finden werde.

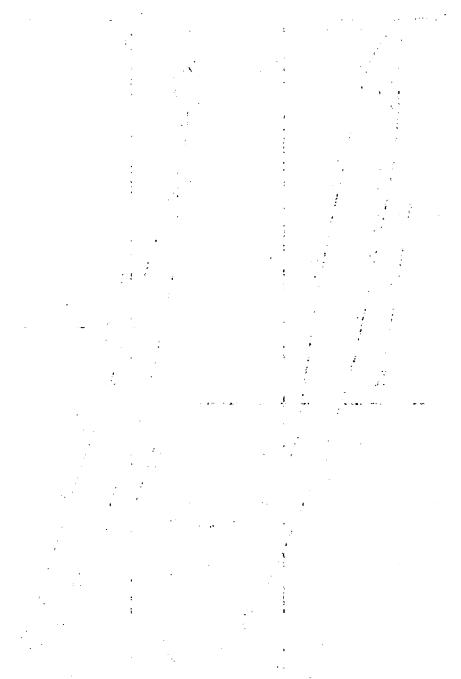
## J. Liznar: 26 tägige Periode des Erdmagnetismus

Parolorosk : -



Jan Mayen : -

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIb. 1894.



14 1 18 18 18

## Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper

von.

## M. v. Smoluchowski.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

I.

Weiche Körper, z. B. Wachs, Paraffin, Kautschuk etc. sind für die Elasticitätstheorie hauptsächlich in zweifacher Hinsicht von Interesse. Erstens nimmt der Elasticitätsmodul derselben mit steigender Temperatur in unverhältnissmässig stärkerem Masse ab, als dies bei anderen Körpern, z. B. Metallen, der Fall ist; zweitens finden sich bei ihnen die grössten Werthe der Elasticitätszahl  $\mu$  (Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation).

Bezüglich des ersten Punktes liegt bisher nur eine Beobachtung von Stefan¹ vor, welcher, anlässlich einer Untersuchung über die Schallgeschwindigkeit in Stäben von Wachs und Unschlitt, die er nach der im Folgenden beschriebenen Methode ausführte, die grosse Veränderlichkeit derselben — also auch des Elasticitätsmoduls — bemerkte.

Für Wachs ergeben seine Versuche:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, LVII, 1868.

Für Unschlitt machte er keine näheren Angaben.

Demnach würde sich bei Erhöhung der Temperatur von 17° auf 28° die Schallgeschwindigkeit  $\left[ = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right]$  fast auf die Hälfte, also der Elasticitätsmodul fast auf ein Viertel verringern, während bei den meisten Metallen die Abnahme des letzteren zwischen 0° und 100° nur circa  $2-4^{\rm 0}/_{\rm 0}$  beträgt. Somit scheint hier wegen der Grösse der in Betracht kommenden Änderungen Aussicht vorhanden, jene Erscheinung genauer studiren zu können, als bei den Metallen und eher eine Beziehung zu den übrigen Eigenschaften der Körper finden zu können.

In dieser Hinsicht ist namentlich der Zusammenhang mit der Wärmeausdehnung bemerkenswerth; stellt man den Elasticitätsmodul als eine lineare Function der Temperatur dar

$$E = E_0[1 - \gamma t], \tag{1}$$

so erweist sich nämlich — nach den Beobachtungen von Katzenelsohn¹ und Miller² — die Reihenfolge der Metalle nach γ als identisch mit derjenigen nach den Werthen des Wärmeausdehnungs-Coëfficienten und verkehrt jener der Schmelzpunkte. Auch die eben besprochene Beobachtung bezüglich des Wachses stimmt damit überein, da ja auch der Ausdehnungscoëfficient desselben bei mittlerer Temperatur circa 50—100 mal grösser ist als jener Metalle. Dieser Punkt musste also bei einer Untersuchung der Elasticität solcher Stoffe besonders berücksichtigt werden.

Der zweite Punkt, die Grösse der Elasticitätszahl  $\mu$ , ist namentlich im Hinblicke auf die Theorien der Elasticität von Interesse. Bekanntlich fordert die Poisson'sche Moleculartheorie, dass  $\mu=0.25$  sei; dies ist durch zahlreiche Versuche wohl genügend widerlegt worden, so z. B. schon durch die Untersuchungen von Wertheim. Dieser zog aber aus denselben den Schluss, dass  $\mu=\frac{1}{3}$  sei; in der That sind seine Zahlen für Messing, Eisen, Glas u. A. nicht weit von diesem Werthe

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Berl. In.-Diss., 1887, Winkelmann, Handb. I. S. 242.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Münch. Ber., 1886, S. 707.

entfernt. Durch neuere genaue Beobachtungen scheint auch diese Hypothese, welche übrigens auch durch keine theoretischen Erwägungen gestützt wird, widerlegt zu sein; so fand z. B. Voigt für Glas 0·208—0·213, Kirchhoff für Stahl 0·293 bis 0·295; nach Katzenelsohn wären einige Zahlen noch kleiner, z. B. Aluminium 0·13, Platin 0·16, Gold 0·17.

Die grössten Abweichungen 1 aber, im entgegengesetzten Sinne, scheinen eben bei solchen weichen Körpern vorzukommen, allerdings sind die Angaben hierüber ziemlich schwankend, z. B. Kautschuk: Röntgen 0·37—0·64, Pulfrich 0·458; Amagat 0·500, Gallerte aus Leim 0·500 (Maurer), Ebonit 0·389 (Mallock), Paraffin 0·50 (Mallock). Auch hierüber waren also weitere Versuche wünschenswerth, umsomehr als, wie weiter unten erwähnt werden wird, diese letzteren Bestimmungen nicht ganz einwandfrei sind. Um nun zur Aufklärung dieser beiden Punkte beizutragen, unternahm ich die Versuche, welche im Folgenden beschrieben sind.

II.

Die Methoden zur Bestimmung der Elasticitätsmoduln sind entweder statische oder dynamische. Für weiche Körper ist die Anwendung der statischen nicht empfehlenswerth, denn gerade bei ihnen ist die elastische Nachwirkung sehr gross, so dass sich je nach der Dauer der Einwirkung sehr verschiedene Moduln ergeben würden; zudem ist der Bereich der elastischen Vollkommenheit so klein, dass es kaum möglich sein dürfte, denselben bei statischen Messungen nicht zu überschreiten. Namentlich bei höherer Temperatur beginnen diese Körper schon unter Einwirkung der Schwerkraft langsam continuirlich zu fliessen, was dann eine directe Bestimmung des E ganz fehlerhaft machen würde, für das μ aber den Werth 0·5 wie bei Flüssigkeiten ergeben müsste.

Dies ist auch der Einwand, welchen die Anhänger der Poisson'schen Theorie gegen die früher erwähnten Mes-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Nur bei manchen Legirungen kommen auch so grosse Werthe vor, z.B. Messing 0.42 (Katzenelsohn). (Siehe auch den auf S. 15 angeführten Versuch), Vielleicht theilweise auf Äolotropie zurückzuführen.

sungen, welche auf statischen Methoden beruhen, erheben können.

Demgemäss sind hier die akustischen Methoden am Platze, welche die Schallgeschwindigkeit und hieraus den von der Nachwirkung unabhängigen Modul ergeben; allerdings ist dies nicht der isotherme, sondern der adiabatische Modul, doch ist nach den bisherigen Versuchen der Unterschied beider bei festen Körpern nur gering, und werden sich die Zahlen sehr angenähert auch auf jenen anwenden lassen.

Zur Messung der Schallgeschwindigkeiten stehen uns nur zwei Methoden zu Gebote: die Stefan'sche (l. c.) und jene von Warburg.¹ Erstere bildet eine Erweiterung des von Chladni eingeführten Verfahrens, nach welchem aus der Tonhöhe eines longitudinal schwingenden Stabes die Schallgeschwindigkeit berechnet wird; da nämlich Stäbe aus den besprochenen Materialien durch Reiben nicht zum Tönen gebracht werden können, befestigte Stefan ein Stück eines solchen an einen Holz- oder Glasstab; dies System gab einen Longitudinalton, der von den Schallgeschwindigkeiten beider Stücke abhängt und daher die Berechnung einer derselben ermöglicht, wenn die andere gegeben ist.

Warburg hingegen beobachtete die durch aufgestreuten Sand sichtbar gemachten Knoten bei einem auf einen Glasstreifen in der Mitte aufgesetzten, zusammen mit diesem transversal schwingenden Wachsstreifen; dann gilt die Gleichung

$$\frac{c}{c'} = \frac{l^2}{l'^2} \frac{h'}{h},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit, l die Abstände der Knoten, h die Dicke des einen Streifens und die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen für den anderen bedeuten.

Obwohl letztere Methode insoweit bequemer ist, als sie bloss Längenmessungen erfordert, zog ich hier die Stefan'sche vor, da diese sich, wie weiter unten erläutert wird, sofort auch auf Torsionsschwingungen anwenden lässt; dies gestattet dann die Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen, somit

<sup>1</sup> Pogg. Ann., CXXXVI.

auch des Torsionsmoduls T, woraus sich dann auch die zweite gewünschte Grösse  $\mu$  ergibt:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{T} - 1 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_L}{c_T} \right)^2 - 1.$$
 (2)

Offenbar hat diese Art der Bestimmung des µ auch den Vortheil, dass die Versuche zur Messung des E und des T an demselben Stück und unter denselben Bedingungen stattfinden was namentlich in Bezug auf die Constanterhaltung der Temperatur von Wichtigkeit ist. Diese Vortheile theilt sie mit der analogen Methode der Bestimmung des µ aus Longitudinalund Torsionston bei homogenen Glas- und Metallstäben, welche namentlich von Wertheim und Schneebeli angewendet wurde; ihr Nachtheil ist allen E und T benützenden Methoden gemeinsam: die Berechnung des µ als Differenz zweier Zahlen - wodurch die Genauigkeit verringert wird; dazu kommt noch, dass schon  $c_L$  und  $c_T$  aus der Abweichung des Tones des Systems von jenem des einen Stabes für sich, also aus einer ziemlich kleinen Grösse, bestimmt wird. Ob nun die Messung von  $c_L$  und  $c_T$  sich mit solcher Genauigkeit erzielen lässt, dass eine Berechnung des µ möglich ist, konnten nur genaue Versuche entscheiden.

III.

Zur Erläuterung der Theorie der Longitudinalschwingungen von Stäben, die aus zwei Stücken bestehen, möge kurz Folgendes erwähnt werden.

Die Fortpflanzung fortschreitender longitudinaler Wellen in einem aus zwei verschiedenartigen Stücken bestehenden, unendlich langen Stab lässt sich leicht analytisch darstellen, da man sofort die D'Alembert'sche Form der Lösung der Differentialgleichungen für die beiden Stücke anwenden kann. Bedeutet u die Verschiebung, c die Geschwindigkeit in dem von  $-\infty$  bis 0 reichendem Stücke, die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen im anderen Stücke, so lauten die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$
 (3)

wobei

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \qquad c'^2 = \frac{E'}{\rho'}.$$

Diese werden durch die Lösungen

$$u = f(x+ct) + \varphi(x-ct) \quad \text{für } -\infty < x < 0$$
  

$$u' = g(x+c't) + \gamma(x-c't) \quad \text{für } 0 < x < +\infty$$
(4)

befriedigt, wobei die willkürlichen Functionen f und  $\varphi$  für negative Argumente, g und  $\chi$  für positive, durch Einführung der Anfangsbedingungen für t = 0:

$$x < 0$$
  $u = U(x)$   $x > 0$   $u' = U'(x)$  
$$\frac{\partial u}{\partial t} = V(x)$$
 
$$\frac{\partial u'}{\partial t} = V'(x)$$
 (5)

in folgender Weise bestimmt werden:

$$f(x) = \frac{U(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int V(x) dx$$

$$\varphi(x) = \frac{U(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int V(x) dx$$

$$f \text{ für } x < 0,$$

$$g(x) = \frac{U'(x)}{2} + \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx$$

$$\chi(x) = \frac{U'(x)}{2} - \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx$$

$$f \text{ für } x > 0.$$

$$(6)$$

Die Werthe der Functionen für andere Werthe des Arguments ergeben sich aus den Bedingungen, welche aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen folgen:

für die Trennungsstelle x = 0: u = u'

[
$$q = \text{Querschnitt}$$
]  $Eq \frac{\partial u}{\partial x} = E'q' \frac{\partial u'}{\partial x}$ . (7)

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4) in diese Gleichungen und Integration erhält man

$$f(ct) = \frac{2E'q'c}{Eqc' + E'q'c}g(c't) + \frac{Eqc' - E'q'c}{Eqc' + E'q'c}\varphi(-ct)$$

$$\chi(-c't) = \frac{E'q'c - Eqc'}{Eqc' + E'q'c}g(c't) + \frac{2Eqc'}{Eqc' + E'q'c}\varphi(-ct)$$
(8)

Die Bedeutung dieser Formeln sieht man leicht in dem Falle, dass zur Zeit t=0 der ganze Stab in Ruhe und in der Ruhelage sei, mit Ausnahme des Punktes --b, welcher eine Elongation U habe.

Die Durchführung der Rechnung zeigt dann, dass diese Verrückung zwei Wellen mit der Elongation  $\frac{U}{2}$  erzeugt, von denen die eine in der Richtung  $-\infty$  sich bewegt, während die andere gleich grosse bis zur Trennungsstelle geht und sich hier in eine gebrochene Welle von der Grösse

$$\frac{Eqc'}{Eqc' + E'qc},\tag{9}$$

welche in der Richtung der  $+\infty$  mit der Geschwindigkeit c weiterbewegt und in eine reflectirte spaltet, welche mit der Amplitude

$$\frac{1}{2} \frac{Eqc' - E'q'c}{Eqc' + E'q'c} \tag{10}$$

nach -∞ zurückkehrt.

Compliciter wird die Erscheinung, wenn der zusammengesetzte Körper eine endliche Ausdehnung von 0 bis  $\lambda$  und von hier bis  $\lambda + \lambda'$  hat; man kann diesen Umstand durch die Annahme ersetzen, dass er an beiden Enden wieder an Stäbe mit unendlich kleinen q (oder E oder p) anstösst; dann werden an diesen nach (10) totale (positive) Reflexionen stattfinden, an der Trennungsstelle spalten sich wieder die Wellen u. s. w., es entsteht im Allgemeinen eine immer wachsende Zahl von Einzelwellen.

Zur Kenntniss der Schwingungszahl des Grundtons der so erzeugten stehenden Schwingungen gelangen wir jedoch auf diese Weise nicht. Diese ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der particulären Lösungen (deren unendliche Anzahl die allgemeine Lösung gibt), wie sie von Stefan¹ durchgeführt wurde.

Den Differentialgleichungen (3) und den Bedingungen für die freien Enden genügen die Lösungen

$$u = A \cos \alpha t \cos \beta x$$

$$u' = A' \cos \alpha' t \cos \beta' [\lambda + \lambda' - x],$$

$$(11)$$

wobei

$$\alpha^2 = c^2 \beta^2 = \frac{E}{\rho} \beta^2$$
$$\alpha'^2 = c'^2 \beta'^2 = \frac{E'}{\rho'} \beta'^2.$$

Aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen <sup>2</sup> folgen für die Trennungsstelle  $x = \lambda$  die Gleichungen (7). Diese erfordern

$$\int_{0}^{\lambda} q \, \rho \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dx + \int_{\lambda}^{\lambda + \lambda'} q' \, \rho' \, \frac{\partial u'}{\partial t} \, dx = 0;$$

werden darin die Werthe aus (11) eingesetzt, so ist

$$\rho q A \alpha \sin \alpha t \int_{0}^{\lambda} \cos \beta x dx + \rho' q' A' \alpha' \sin \alpha' t \int_{\lambda}^{\lambda + \lambda'} \cos \beta' (\lambda + \lambda' - x) dx = 0;$$

da diese Gleichung von der Zeit unabhängig ist, muss  $\alpha=\alpha'$  sein; durch Ausführung der Integrationen folgt dann

$$\rho q A \frac{\sin\beta\lambda}{\beta} + \rho' q' A' \frac{\sin\beta'\lambda'}{\beta'} = 0.$$

Mit Hilfe der aus der ersten Bedingung (7) folgenden zweiten der Gleichungen (12) erhält man dann direct die Formel (14).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., LV, 1867, LVII, 1868.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Es ist bemerkenswerth, dass sich die zweite der Gleichungen (7), welche ausspricht, dass an der Trennungsstelle die Druckkräfte beiderseits gleich sein müssen, auch durch die Forderung, die bei unserem Stabe selbstverständlich erfüllt sein muss, dass nämlich der Schwerpunkt an derselben Stelle bleibe, ersetzen lässt. Es muss dann die Summe der Massen × Geschwindigkeiten = 0 sein, also

$$\begin{array}{c}
\alpha = \alpha' \\
A \cos \beta \lambda = A' \cos \beta' \lambda' \\
Eq \beta A \sin \beta \lambda = -E'q'\beta' A' \sin \beta' \lambda'
\end{array}$$
(12)

und daraus folgt durch Elimination von A die Gleichung

$$Eq\beta\sin\beta\lambda\cos\beta'\lambda' + E'q'\beta'\cos\beta\lambda\sin\beta'\lambda' = 0$$
,

welche im Allgemeinen auch durch

$$qE\beta \operatorname{tg} \beta\lambda + q'E'\beta' \operatorname{tg} \beta'\lambda' = 0 \tag{13}$$

ersetzt werden kann.

Durch einige Transformationen erhält man, wenn statt  $q\lambda \rho$  und  $q'\lambda'\rho'$  die Gewichte p, p' gesetzt werden:

$$p\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda} + p'\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'} = 0. \tag{14}$$

Behufs Berechnung der Geschwindigkeit kann man diese Formel noch umgestalten, indem man die dem Tone des Systems entsprechende Monochord-Saitenlänge l und die dem Tone des Stabes  $\lambda$  allein (wenn es ohne das zweite Stück schwingt) entsprechende  $l_0$  einführt.

Stimmt die Saitenlänge L mit einer Stimmgabel, die N Schwingungen in der Secunde macht, überein, so hat man schliesslich die Formel für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$c_L' = 2\pi NL \frac{\lambda'}{lz}, \qquad (15)$$

wobei die Hilfsgrösse  $z \ (\equiv \beta' \lambda')$  aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \tag{16}$$

bestimmt werden muss.

Zur numerischen Ausrechnung des z ist es am bequemsten, sich für  $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$  eine Tafel von halben zu halben Graden zu entwerfen und dann dazwischen zu interpoliren.

Die Lage der Knotenpunkte der Schwingung erhält man nach Formel (11) durch Nullsetzen von  $\cos \beta x$  und  $\cos \beta'(\lambda + \lambda - x)$ ; im ersten Stücke sind ihre Abstände vom Nullpunkt

$$x_k = \frac{\pi}{2\beta}, \frac{3\pi}{2\beta} \dots = \frac{l_0}{l} \frac{1}{2\lambda}, \frac{l_0}{l} \cdot \frac{3}{2\lambda} \dots, \tag{17}$$

im zweiten Stücke die Abstände vom anderen Ende des zusammengesetzten Stabes

$$x'_k = \frac{\pi}{2\beta'}, \frac{3\pi}{2\beta'} \dots = \frac{c'}{c} x_k. \tag{18}$$

Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhange zwischen c' und der Tonhöhe gewinnt man mittelst einer graphischen Methode.

Werden z. B. wie auf Fig. 1 die Curven y = tg x gezeichnet, und schneidet man diese durch eine Gerade

$$y = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}},$$

so geben die Abscissen der Schnittpunkte die Werthe von z, welche, in Formel (15) eingesetzt, die Wurzeln der Geschwindigkeiten bestimmen, welche dem durch die Neigung der Geraden definirten Tone entsprechen. Der Schnittpunkt mit der durch 0 hindurchgehenden Tangentencurve gibt den kleinsten Werth von z, also die grösste Geschwindigkeit, welche bei der betreffenden Tonhöhe noch möglich ist; diese entspricht also dem Grundton des Stabes.

Dieselbe Tonhöhe kann auch durch eine geringere Geschwindigkeit erzeugt werden, wenn sie nämlich dem ersten Obertone eines Systemes entspricht; diese Geschwindigkeit ist dann gegeben durch den Schnittpunkt mit der zweiten Tangentencurve. Analog für die höheren Obertöne.

Wenn wir nun — bei constantem  $\lambda'$  und p' — die Geschwindigkeit c' und dementsprechend die Tonhöhe ändern, ergibt sich Folgendes.

Der höchste Werth, welchen der Grundton erreichen kann, also die geringste Neigung der Geraden, entspricht der Lösung z = 0, somit  $c' = \infty$ ; da diese Neigung der Geraden gleich ist der Tangente im 0-Punkte, so hat man mithin

$$1 = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \tag{19}$$

zur Bestimmung des Tones, welchen das System in dem Falle gibt, wenn die Schallgeschwindigkeit in dem angesetzten Stücke unendlich ist; weil tg  $\frac{\pi l_0}{l}$  < 0, also  $l > l_0$ , so ist dieser immer tiefer als jener, welchen der Stab ohne das angefügte

Stück schwingt. (Die übrigen Wurzeln der Gleichung entsprechen den Obertönen.) Für jede endliche Geschwindigkeit ist der Ton aber noch tiefer, denn ein je kleineres c', also grösseres z man erhalten will, desto grösser muss man die Neigung der Geraden machen.

(Wenn 
$$z > \frac{\pi}{2}$$
, also

$$c' < \frac{4}{l} \frac{NL\lambda'}{l}$$
 wird, so muss

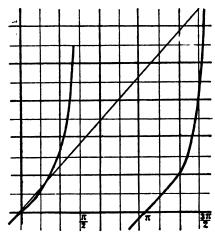


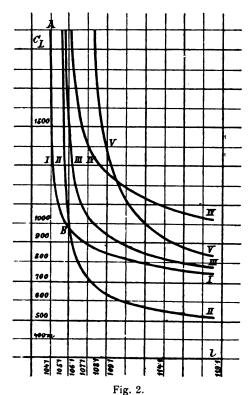
Fig. 1.

die Gerade entgegen dem Sinne des Uhrzeigers noch weiter gedreht werden, so dass sie die zweite Tangentenlinie, welche nun dem tiefsten Tone entspricht, schneidet u. s. w.)

Ähnliche Überlegungen gelten für die Obertöne; diese sind im Allgemeinen unharmonisch.

Um die günstigsten Versuchsbedingungen zu finden, muss man sich über den Einfluss von p' und  $\lambda'$ , die man ja beliebig variiren kann, klar werden. Dazu dient die Figur 2. Hier sind

(immer bei constantem p und  $\lambda$ ) für einige bestimmte Verhältnisse der Gewichte und Längen des angesetzten Stückes die Curven gezeichnet, welche die Abhängigkeit der berechneten



Geschwindigkeit  $c'_L$  (Ordinate) von der zugehörigen Länge der Monochordsaite (Abscisse) darstellen.

Für I	ist $p' = 8.92 g$ ,	$\lambda' = 120  mm$
II	17.83	80
III	17.83	120
IV	17.83	160
V	35.66	120

Dabei ist

$$p = 765.5 g$$
,  $\lambda = 1495.5$ ,  $l_0 = 104.1$ ,  $L = 417$ ,  $N = 435$ .

Daraus ergibt sich Folgendes:

Der Einfluss, welchen ein Fehler der Tonbestimmung auf die Zahl für die Geschwindigkeit hat, ist desto grösser, je grösser die Neigung der Curve in dem betreffenden Punkte ist; solange also z. B. der Punkt auf dem Stücke zwischen A und B der Linie liegt, wird die Messung sehr ungenau werden, dagegen ist in einiger Entfernung rechts von B eine ziemliche Genauigkeit erreichbar; man wird also trachten, die Dimensionen der Stäbe so zu wählen, dass die durch die Töne bestimmten Punkte auf diesen Theilen der Curven liegen.

Die Genauigkeit bei einer gegebenen Geschwindigkeit, z. B. 1000 m, ist durch die Neigung der Curven in den Punkten bestimmt, wo sie durch eine in der betreffenden Höhe gezogene Horizontale geschnitten werden. Aus dem Vergleiche von I, III, V ersieht man, dass es vortheilhaft ist, grössere Gewichte der zu messenden Stücke zu verwenden, aus dem Vergleiche von II, III und IV aber, dass insbesondere die Länge möglichst gross zu machen ist. Wie später ausgeführt werden wird, erfordert dies, damit überhaupt eine Tonerzeugung möglich werde, eine Vermehrung des Gewichtes. Anderseits aber ist bei grossen Tonvertiefungen, wie sich zeigte, der Klang merklich unreiner, so dass eine mittlere Lage die beste sein dürfte.

Die Gleichungen für die Torsionstöne ergeben sich nun aus dem Vorstehenden ganz leicht; die Differentialgleichung für drehende Schwingungen

( $\delta = \text{Winkelverschiebung})$ 

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{E}{2(\mu + 1)\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$$
 (20)

ist vollständig der Gleichung (3) analog, und die Gleichungen (7) sind durch die ähnlichen

$$\delta = \delta'$$

$$D\frac{\partial \delta}{\partial x} = D'\frac{\partial \delta'}{\partial x}$$

zu ersetzen, welche aussprechen, dass die Drehungswinkel  $\delta$  und die Drehungsmomente D an der Trennungsstelle continuirlich in einander übergehen.

D haben wir gleichzusetzen

$$=\frac{E\theta}{2(\mu+1)}=T\theta,$$

wobei  $\theta$  das Trägheitsmoment des Querschnittes mit der Flächendichte 1 bedeutet.

· Mithin gelten auch für diesen Fall die früher abgeleiteten Formeln, wenn man E durch T und q durch  $\theta$  ersetzt. Gleichung (14) wird demnach

$$\theta \lambda \rho \frac{\operatorname{tg} \beta \lambda}{\beta \lambda} + \theta' \lambda' \rho' \frac{\operatorname{tg} \beta' \lambda'}{\beta' \lambda'} = 0.$$

Ist der Stab ein Hohlcylinder, also der Querschnitt ein Kreisring mit den Radien R, r, so ist

$$\theta = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) (R^2 + r^2); \tag{21}$$

wenn man wieder  $(R^2-r^2)\pi\lambda\rho$  gleich dem Gewichte p setzt, so hat man endlich

$$p(R^{2}+r^{2})\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda}+p'(R^{2\prime}+r^{2\prime})\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'}=0. \tag{22}$$

zur Bestimmung der Tonhöhe; die zur Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen geeignetste Formel ist analog (15) und (16)

$$c_T' = 2 \pi N L \frac{\lambda'}{l \tau z_T}, \qquad (23)$$

wobei das z<sub>T</sub> aus der Gleichung

$$\frac{\lg z_T}{z_T} = \frac{p(R^2 + r^2)}{p'(R'^2 + r'^2)} \frac{\lg \frac{\pi l_{0}T}{l_T}}{\frac{\pi l_{0}T}{l_T}}$$
(24)

zu berechnen ist.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Hiebei ist also die Kenntniss von R und r nöthig; 2R wurde mit einem Dickenmesser bestimmt, r meistens aus dem Gewichte, dem specifischen Gewichte und dem R berechnet.

Kennt man  $c'_L$  und  $c'_T$ , so folgt daraus

$$E = \rho c_L^{\prime 2}; \qquad T = \rho c_T^{\prime 2} = 2(\mu + 1)E;$$
$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{T}\right) - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_L}{c_T}\right)^2 - 1.$$

Da Torsionsschwingungen zusammengesetzter Stäbe noch nicht untersucht waren, so war eine experimentelle Bestätigung der Formeln wünschenswerth. Als solche will ich die Resultate eines Versuches anführen, wobei eine Messingröhre, mit den Rändern etwas übergreifend, an eine Glasröhre angesiegelt wurde.

Es waren

$$\lambda' \equiv 305 \, mm$$
 $p' \equiv 150 \, g$ 
 $l_L \equiv 126 \cdot 6 \, mm$ 
 $l_T \equiv 218 \cdot 6 \Rightarrow$ 
 $R \equiv 14 \cdot 45 \, mm$ 
 $r \equiv 13 \cdot 79 \, mm$ 

(Die hiebei verwendete Glasröhre ist die auf S. 25 als B bezeichnete, daselbst sind auch N und L angeführt.)

Aus diesen Daten wurde berechnet

$$c'_L = 3144 \, m, \quad c'_T = 1872 \, m, \quad \mu = 0.411,$$

während die directe Bestimmung aus Longitudinal- und Transversalton eines längeren Stückes derselben Messingröhre

$$c_L = 3180 \, m$$
,  $c_T = 1881 \, m$ ,  $\mu = 0.429$ 

ergab, was in Anbetracht dessen, dass gemäss dem früher Gesagten die Genauigkeit bei so grossen Geschwindigkeiten überhaupt geringer ist, als genügende Übereinstimmung angesehen werden kann.

IV.

Stefan hatte bei seinen Versuchen als tonerregenden Theil fast ausschliesslich Holzstäbe benützt. Für longitudinale Töne sind diese auch ganz gut anwendbar, nicht aber für Torsionstöne.

Infolge der verschiedenen Elasticität in der Richtung senkrecht und parallel zu den Faserflächen, sowie infolge der Inhomogeneität des Materials gibt ein solcher Stab je nach der Art des Anreibens ganz verschiedene Torsionstöne. (Bei einem Versuche gab ein 995mm langer Stab aus weichem Holz einen Longitudinalton von 2669 Schwingungen und Torsionstöne, welche zwischen 709 und 762 schwankten, was für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen  $c_L = 5310 \, m$  und für die Torsionswellen  $c_T = 1410-1517 \, m$  ergibt.) Am besten entsprach der Anforderung auf Reinheit und Gleichmässigkeit der Töne eine ziemlich dickwandige Glasröhre, welche daher bei den im Folgenden angeführten Versuchen ausschliesslich benützt wurde.

Auch der zu untersuchende Körper wurde in Röhrenform gegossen, einerseits weil die Theorie voraussetzt, dass die Kräfte auf den ganzen Querschnitt vertheilt sind, während sie, falls man an die Glasröhre ein massives Stück anfügt, bloss an der Mantelfläche des letzteren angreifen würden, anderseits weil in einem röhrenförmigen Stücke sich viel rascher eine gleichförmige Temperatur herstellen lässt, als in einem massiven, was in Anbetracht des schlechten Wärmeleitungsvermögens solcher Körper sehr wichtig ist.

Die Befestigung des Stückes geschah auf die Weise, dass die Glasröhre bis über die Schmelztemperatur des Materiales erwärmt und dann das Stück darangefügt wurde; beim Erkalten hielt es infolge der Adhäsion meist genügend fest.

Der Ton wurde durch Reiben des Glases mittelst eines weichen, mit Wasser gut durchfeuchteten, mit Flanell überzogenen Filzlappens erregt.

Das Hauptaugenmerk musste bei den Versuchen auf die Constanterhaltung auf einer beliebigen Temperatur gerichtet werden.

Stefan hatte einfach den Stab längere Zeit an einem Orte von wenig veränderlicher Temperatur neben einem Thermometer gelassen, bevor der Ton bestimmt wurde; um grössere Temperaturunterschiede zu ermöglichen und eine grössere Genauigkeit zu erzielen, wurde bei diesen Versuchen folgende Anordnung getroffen: es wurde ein doppelwandiger paral-

lelopipedischer Kasten aus Zinkblech hergestellt, der oben durch einen gut passenden Holzdeckel verschliessbar war, in welchem sich zwei Löcher zum Durchstecken der Thermometer befanden. während an einer der Schmalseiten des Kastens eine kreisförmige Öffnung ausgeschnitten war, durch welche das Ende der Glasröhre (bis zu einer Marke) mit dem daran befestigten (z. B. Wachs-) Stücke hineinragte. In den Raum zwischen den Doppelwänden konnte mittelst zweier Röhrenansätze Wasser eingeleitet werden. Damit das Innere des Kastens von der äusseren Luft möglichst abgesperrt werde, wurde der Zwischenraum zwischen der Glasröhre und der Wand der Öffnung mit Watta ausgefüllt, welche durch zwei eingeschobene Korkringe beiderseits festgehalten wurde. Ebenso wurde ein Wattapfropfen in die Röhre gesteckt. Dass dies auf die Tönhöhe keinen irgend merkbaren Einfluss habe, wurde durch Versuche constatirt. Mittelst Durchleiten von Eiswasser konnte die Temperatur erniedrigt werden, durch Erwärmen mit einem untergestellten Bunsen-Brenner beliebig erhöht werden; die Flammenhöhe konnte so regulirt werden, dass die Temperaturschwankung im Inneren während einer Stunde 0.2-0.3° nicht überstieg. So lange wurde auch jedesmal abgewartet, bevor der Versuch begonnen wurde, damit in dem (Wachs-) Stücke eine gleichmässige Temperaturvertheilung eintrete.

Diese Anordnung der Versuche hat zugleich den Vortheil, dass, falls die äussere Temperatur gleich bleibt, der Einfluss der thermischen Änderung der Elasticität des Glases auf die Tonhöhe des Systems nur sehr klein ist, da bloss das in den Kasten hineinragende Stück diesbezüglich in Betracht kommt. Wenn man die Rechnung ganz exact durchführen will, kann man die von Stefan abgeleitete Formel für einen aus drei Stücken bestehenden Stab anwenden. Diese Stücke wären in diesem Falle:

- I. Glasröhre auf Zimmertemperatur,
- II. Glasröhre auf Temperatur des Kastens,
- III. Wachsröhre.

Bei den im Folgenden angeführten Versuchen war aber die Länge des Stückes II nur <sup>1</sup>/<sub>30</sub> von I, so dass in Anbetracht

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., LV, 1867.

des geringen Unterschiedes von  $c_1$  und  $c_2$  der Einfluss der Erwärmung desselben ganz vernachlässigt werden konnte.

Bei Anstellung der Experimente muss auch der Umstand berücksichtigt werden, dass der Knotenpunkt, in welchem der Stab festgeklemmt wird, von der jeweiligen Tonhöhe abhängt, dass daher seine Lage jedesmal aus der übereinstimmenden Saitenlänge am Monochord nach Formel (17) berechnet werden muss. Praktisch ist es, behufs Verschiebung des Einklemmungspunktes von vornherein eine Scala auf der Glasröhre einzuätzen. (Als Klemmbacken dienten zwei 1·5 cm breite, etwas ausgehöhlte Korkstücke, welche auf Brettchen aufgeleimt waren, die mit einer Schraubenzwinge zusammengedrückt wurden).

Man könnte sich von dieser Complication ganz befreien, indem man auch an der anderen Seite der Röhre ein Wachsstück befestigt, so dass das System symmetrisch wird. Dann hätte man die Rechnung für einen einseitig befestigten Stab von der halben Länge der Glasröhre mit angefügtem Wachsstück durchzuführen. Da aber in diesem Fall ein zweiter Kasten erforderlich ist, und auch die Herstellung gleicher Röhrenstücke nicht ganz leicht ist, zog ich es vor, bei der beschriebenen Anordnung zu bleiben.

Die Messung der Tonhöhe geschah, wie früher erwähnt wurde, mittelst eines Monochordes. Um bei der Abgrenzung des schwingenden Saitenstückes möglichste Genauigkeit zu erreichen, wurde die Kante des verschiebbaren Steges zugeschärft und auch eine Vorrichtung angebracht, dass die Saite von oben niedergedrückt wurde, so dass ein Schwanken derselben an den Endpunkten, welches eine Tonvertiefung zur Folge hat, vermieden wurde. Die Stahlsaite wurde durch Gewichte gespannt; die Tonhöhe blieb sehr constant; auch die Correction infolge der Steifheit der Saite war zu vernachlässigen, so dass die direct abgelesenen Saitenlängen den Schwingungszahlen verkehrt proportional gesetzt werden konnten.

Die Vergleichung der Tonhöhen der Saite und des Stabes geschah nach dem Gehör, Schwebungen konnten nicht wahrgenommen werden, aber trotzdem war eine ziemliche Genauigkeit der Einstellung möglich, da Unterschiede von 0·1 mm = 1 Schwingung auf 1500 noch merklich waren. Allerdings war diese Fehlergrenze bei Unreinheit der Töne etwas höher.

V.

Bei der Durchführung der Messungen zeigten sich besonders zwei störende Umstände, und die dadurch hervorgerufenen Fehler waren die Ursache, dass namentlich die Bestimmung des µ nicht die gewünschte Genauigkeit erlangte. So zeigt es sich nämlich, dass nur wenn die Länge des angesetzten Stückes eine gewisse Grösse nicht überschreitet, der Grundton des Systems ertönt; will man den Ton noch vertiefen, indem man ein längeres Stück ansetzt oder die Temperatur erhöht, so spricht der Grundton nicht mehr an, meist aber tritt jetzt der erste Oberton hervor. Dies hat den Effect, dass die Tonvertiefung, mit welcher nach dem auf S. 751 Gesagten die Genauigkeit wächst, nur eine gewisse Grenze erreichen kann. Oft ist es nicht einmal vortheilhaft, so weit zu gehen, da zuweilen schon vorher die Klarheit des Tones merklich getrübt ist. Insbesondere ist die Beobachtung des Torsionstones erschwert, da die durch die ruckweisen drehenden Bewegungen der Hand hervorgebrachten Töne nicht so gut charakterisirt sind, als die Longitudinaltöne, bei denen es leichter ist, je nach der Art des Reibens den Grund- oder Oberton festzuhalten.

Da das Verschwinden des Grundtones bei der grössten erreichbaren Tonvertiefung einzutreten beginnt, also wenn der Knotenpunkt des Glasstabes am meisten gegen die Trennungsstelle zu verschoben ist, meint Stefan, welcher diese Erscheinung auch beobachtete, dass ihre Ursache in der Vertheilung der Verdünnungen und Verdichtungen im schwingenden Stabe liegen müsse, welche in der Nähe der Knoten am stärksten, in der Nähe der Schwingungsbäuche am geringsten seien.

Vielleicht bietet aber folgende Überlegung eine befriedigendere Erklärung.

Man kann die Schwingungen des Wachsstückes auch als eine Art von durch die Glasröhre erzwungenen Schwingungen betrachten; für sich allein tönt das Wachsstück nicht. Unter sonst gleichen Verhältnissen werden sich diese leichter erzeugen lassen, wenn ihre Amplitude im Vergleich zur Amplitude der Glasschwingungen klein, als wenn sie gross ist. Nun ergeben die Gleichungen (12) für das Verhältniss der Amplituden

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos\beta\lambda}{\cos\beta'\lambda'} = -\frac{Eq\beta\sin\beta\lambda}{E'q'\beta'\sin\beta'\lambda'}$$

oder noch leichter Transformation, wenn wieder zur Abkürzung  $\beta'\lambda' = z$  gesetzt wird

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos\frac{\pi l_0}{l}}{\cos z} = -\frac{p}{p'} \frac{\sin\frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \frac{z}{\sin z}.$$

Betrachten wir nun die Grenzfälle, wo

- 1. der Knoten der Mitte der Glasröhre am nächsten liegt, also der Ton der höchst mögliche wird, nämlich gemäss dem auf S. 749 Gesagten gleich jenem, welcher der Gleichung (19) entspricht; dann ist z=0, also nach der ersten der obigen Formeln  $\frac{A'}{A}$  dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins, und zwar desto kleiner, je mehr  $\frac{\pi l_0}{l}$  sich von 180 entfernt, also je grösser  $\frac{p'}{n}$ .
- 2. Wenn der Knoten an der Verbindungsstelle selbst liegt, ist nach Formel (17)

$$\lambda = \frac{\pi}{23}$$
, also  $\beta \lambda = \frac{\pi l_0}{l} = \frac{\pi}{2}$ , also auch  $\beta' \lambda' = z = \frac{\pi}{2}$ ,

somit nach der zweiten der obigen Formeln

$$\frac{A'}{A} = -\frac{p}{p'}.$$

In der Regel wird nun p' bei weitem kleiner sein als p, mithin im zweiten Falle die Amplitude der Wachsschwingungen A' viel grösser sein müssen als jene der Glasschwingungen A, daher wird der Ton nur sehr schwer erzeugt werden können, während im Falle 1) das Gegentheil stattfindet.

Dies ist auch von vornherein ersichtlich, da wir im Anfange bewiesen haben, dass sich die Gleichung (14) auch aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes ableiten lässt, so dass also im Falle 2) die Amplituden der Wachsschwingungen unverhältnissmässig grösser sein müsssen als jene der erregenden Glasröhre, um diesen Gleichgewicht zu halten. Zugleich ergibt sich, dass tiefe Töne desto leichter ansprechen werden, je grösser  $\frac{p}{p}$  ist; dies stimmt mit der Erfahrung überein, z. B. ein Wachsstück vom Gewichte 58.97 g, welches an die später noch zu beschreibende Glasröhre A befestigt war, erzeugte noch einen Ton von 130 mm Saitenlänge, dagegen ein sehr dünnes vom Gewichte 17.83 g war schon bei 116 mm kaum zum Tönen zu bringen.

Es würde daraus hervorgehen, dass man p' möglichst gross machen soll, doch ist dann, wie schon früher bemerkt, die Klangreinheit beeinträchtigt. Will man dann doch Töne hervorbringen, so springen die Stücke ab — eben wegen der grossen Amplituden.

Der erste Oberton dagegen hat dann meist seinen Knoten in der Nähe der Mitte des Glasstückes, daher nach Formel (17)

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta\lambda = \pi,$$
$$\beta'\lambda' = \pi,$$
$$\frac{A'}{A} = +1,$$

daher auch

also

er wird also gerade dann leicht ansprechen.

Der zweite störende Umstand ist der, dass die Tonhöhe nicht ganz unabhängig ist von der Art des Anreibens; wenn das Reibzeug ziemlich trocken ist, daher die Reibung gross, die Töne laut, so erscheinen sie meist tiefer, als wenn man, mit ganz nassem Reibzeug, mit geringer Reibung leisere Töne erregt. Dies bildet nicht eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Stäbe, es ist auch recht deutlich an Torsionstönen (weniger gut an Longitudinaltönen) von Metallröhren, nament-

lich wenn sie mit Colophoniumlappen gerieben werden und. wie früher erwähnt, an Holzstäben bemerkbar.

Eine diesbezügliche Bemerkung fand ich bei Wertheim (Ann. chim. et phys. III), welcher dies darauf zurückführt, dass bei lauteren Tönen, also grösseren Verschiebungen, die Elasticitätskräfte nicht mehr proportional denselben, sondern langsamer wachsen.

Es wäre ganz plausibel, dass dies bei Wachs etc., wo die Elasticitätsgrenze weit niedriger ist, mehr hervortritt als bei anderen Körpern. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch die Reibung selbst, welche in der einen frei schwingenden Stab voraussetzenden Theorie nicht berücksichtigt wird, einen Einfluss hat.

Eine analoge Erscheinung wäre die, dass gestrichene Saiten einen etwas tieferen Ton geben als gezupfte. Um diese Fehlerquelle möglichst zu verringern, wurde das Reibzeug möglichst nass gemacht, und wurden meist ziemlich leise Töne erregt. Die dabei vorkommenden Schwankungen blieben meist unter  $0.1-0.2 \, mm$  Saitenlänge (bei geringer Tonvertiefung weniger).

Zur Untersuchung gelangten gelbes Bienenwachs, Paraffin, Spermacet, Kerzenstearin und weisser Schellack. Hiebei waren die Röhren durch Giessen in Formen erzeugt worden, nur jene aus Schellack musste, da dieses auch bei hoher Temperatur nicht ganz dünnflüssig wird, durch Überkleben eines geölten Messingstabes hergestellt werden.

Die Versuche konnten leider nicht bis in unmittelbare Nähe des Schmelzpunktes festgesetzt werden, denn entweder wurden die Körper schliesslich schon so weich, dass sie sich infolge der Schwerkraft zu rasch verbogen (Paraffin, Wachs, Schellack), oder sie wollten an der Glasröhre nicht mehr haften (Spermacet, Stearin).

VI.

Die Resultate der Messungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind übereinstimmend mit dem Früheren: t = Temperatur,  $\lambda' =$  Länge der angesetzten Stückes: p' = dessen Gewicht; R', r' = äusserer

und innerer Radius;  $l_L =$  die dem Longitudinalton des ganzen Systems entsprechende Saitenlänge;  $l_T =$  analog dem Torsionston;  $c'_L =$  die daraus berechnete Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in dem Versuchsstücke;  $c'_T =$  jene der Torsionswellen;  $\mu =$  das hieraus sich ergebende Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation.

Bei allen Versuchen war

$$N = 435$$
  $R = 1.2306$   
 $L = 417.1$   $r = 0.9362$ .

(Gelbes) Wachs.

$$l_{0L} = 104 \cdot 0$$
,  $p = 765 \cdot 5$ ,  $\lambda = 1495 \cdot 5$ ,  $l_{0T} = 165 \cdot 7$ . (Glasröhre A)

t	λ'	p'	R'	مو	$l_L$	l <sub>T</sub>	$c_L'$	c' <sub>T</sub>	μ
5.7	167	88.74	1.53025	0.7639	136 · 4		1032		
7.3	150.6	79 8			130 · 3	214.6	1010	615	0.356
16.4	151	79.73			135 · 98	225 · 8	922	552	0.394
16.6	130	68.0			126 · 75	209.5	900	540	0.389
25 · 7	111.5	58 · 97			127.6	210 9	737	443	0.381
26 · 1	95	50 · 19			119.08	196 • 05	735	438	0.408
30.6	130.9	68.0			98.951		670		
30.7	152	79 · 73			101 · 42 1		660		
31.6	95	50 · 19			123 · 1	205 • 4	662	388	0.454
36.6	78.5	41.8			120.6	199 9	556	329	0.424
		ł	l	I	I	l	Mitte	! <b>1</b>	0.401

Paraffin.

$$l_{0L} = 104 \cdot 0$$
,  $\lambda = 1495 \cdot 5$ ,  $p = 765 \cdot 5$ ,  $l_{0T} = 165 \cdot 7$ .

t	λ'	p'	R'	gr	$l_L$	$l_T$	$c_L'$	c' <sub>T</sub>	μ
6 · 1					121 · 26				
6.2	148.3	36.0	1 · 214	0.77	111.59	177 · 1	1501	886	0.434
6.2	117.7	28.9			109 · 1		1500		

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Erster Oberton.

t	λ'	p'	R'	مو	$l_L$	l <sub>T</sub>	$c_L'$	c' <sub>T</sub>	lr
17:3	205	54.75	1.244	0.77	124.5	199.55	1414	858	0.359
17.3	129	35 · 73	1.258	0.77	110.93	176.6	1414	828	0.459
17.3	159.3	38.05	1.214	0.77	113.34	180 · 46	1430	842	0.443
21.6	118.4	28.9	1.214	0.77	109.7	174.6	1300	733	0.574
21.7	129 · 4	35.73			111.3		1349		
24.6	160-1	38.25	1.214	U·77	116.0	185.05	1259	757	0.383
25 · 2	206.0	54.75			136.4		1194		
25.2	206.0	54.75			96 · 85 1		1189		
27.8	118.9	28.9			111.8		1035		
28.6	207	54.75			101.01		984		
29.3	103.3	25.4			111.9		851		
30.2	93.5	22.95			112.0		744		
30.8	159.3	38.05	1.214	0.77	101.91	163 - 75	751	437	0.473
32.9	56.0	14.15			108.6		470		
35.3	42.9	10.55			110.6		261		
35.3	42.9	10· <b>5</b> 5			102.41		240		
	, ,	ı		ı	1		Mittel		0.438

Spermacet.

 $l_{0L} = 10^{4} 0$ , p = 765 5,  $\lambda = 1495 \cdot 5$   $l_{0T} = 165 \cdot 7$ .

t	λ'	p'	R'	مو	$l_L$	$l_T$	$c_L'$	c' <sub>T</sub>	μ
4.9	166.6	62 · 45	1 · 366	0.773	117.7	189 4	1517	909	0.394
14·5 18·9	166·9 167	62 · 45 62 · 45			118·8 118·9		1432 1426		
19 9 24·7	167 167·2	62 · 45			119.25	191 · 45	1403 1311	859	0.334
27.5	167.4	62·45 62·45			121.37	196 1	1298	782	0.378
28·4 32·6	167·4 167·8				122·4 127·2	197·9 212·6	1258 1129	759 645	0·373 0·533
32·9 33·1	167·8 149·7	62·45 55·40			129·1 122·2	201.6	1092 1091	628	0.206
		I				[	Mittel		0 · 420

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Erster Oberton.

Weisser Schellack.

$$l_{0L} = 102 \cdot 2$$
,  $p' = 751 \cdot 0$ ,  $\lambda = 1468 \cdot 5$ . (Glasröhre  $B$ )

λ'	p'	$l_L$	$c_L'$
171.5	40.77	96 · 4 1	1009
136.5	34.32	117.7	970
104	28.42	109.5	948
136.5	34.32	124	869
104	28 • 42	110.1	865
104	28.42	111.4	821
98	23.71	111-4	762
	171·5 136·5 104 136·5 104 104	171·5 40·77 136·5 34·32 104 28·42 136·5 34·32 104 28·42 104 28·42	171·5 40·77 96·4¹ 136·5 34·32 117·7 104 28·42 109·5 136·5 34·32 124 104 28·42 110·1 104 28·42 111·4

Stearin.

$$l_{0L} = 104.0$$
,  $\lambda = 1495.5$ ,  $p = 765.5$ .

t	λ'	p'	$l_L$	$c_L'$
16.1	159.5	62 · 84	119.1	1354
17.3	188	56.9	120 8	1313
17.3	180.5	53.95	118.5	1396
18 · 1	185.3	78 · 18	126 · 16	1354
26.4	185 · 8	78 · 18	128.5	1284
33.6	186 · 2	78 · 18	133 · 25	1181
37.3	160.5	62.84	123.4	1177
38.5	186.5	78 18	135 · 4	1145
38 5	186.5	78 · 18	93 · 18 1	1138
40.8	121.3	37 · 32	113.36	1076
41.5	160-6	62 · 84	127.5	1077
49 · 2	122.0	37.32	117.6	911

Der besseren Übersicht wegen sind die erhaltenen Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Figuren 3, 4, 5 und 6 als Punkte graphisch eingetragen; man sieht sofort, dass eine

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Erster Oberton.

lineare Formel die Abhängigkeit derselben von der Temperatur nicht darstellen könne; man muss hiezu eine Function von der Form  $c = a + bx + cx^2$  verwenden, bei Paraffin müsste sogar noch ein Glied  $+dx^3$  hinzukommen.

Die Werthe dieser Constanten wurden für die Longitudinalwellen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; anstatt bei Paraffin die vierte Constante hinzuzunehmen, zog ich es vor, die Curve in drei Stücke zu theilen und für jedes

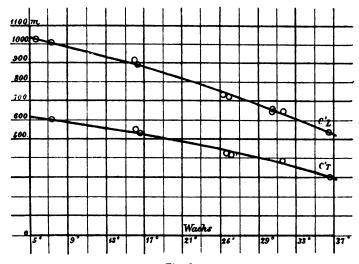


Fig. 3.

die quadratische Formel zu berechnen. Die durch diese Gleichungen dargestellten Curven sind in jenen Figuren eingetragen. Wo die Werthe des µ bestimmt waren, wurde daraus das Mittel genommen, mit dieser Zahl die Torsionswellengeschwindigkeit berechnet und die so erhaltene Curve gleichfalls eingezeichnet. Hiebei ist allerdings die Änderung des µ

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Bei Stearin gelangte ich zu keinen brauchbaren Resultaten. Wahrscheinlich liegt der Grund in der stark krystallinischen Structur und der Sprödigkeit desselben; es wird leicht von kleinen Sprüngen durchzogen, welche kaum sichtbar sind und sich nur durch Änderung des Tones bemerkbar machen.

Ebenso war bei Schellack wegen der Ungleichmässigkeit der Röhre eine Berechnung des  $\mu$  nicht möglich.

mit der Temperatur nicht berücksichtigt, doch sind dazu die Beobachtungen nicht genügend genau, ihre Zahl zu gering, und würden die Correcturen bei der Torsionsgeschwindigkeit überhaupt nicht sehr gross sein.

Die Werthe der Constanten sind:

		ongitudina ngeschwind		Torsions- wellengeschwindigkeit				
	j	b	c	a	b	С		
Wachs 6-37°	1092.9	-9:417	0·1 <del>1</del> 64	652 · 9	-5.626	_0·0874		
Spermacet 5-33°	1479 · 8	+7.526	-0·5675	878 · 1	+4*466	-0.3367		
Stearin 16-49°	1352.7	+4.9012	-0.2786		 			
Schellack 9-40°	1022 · 4	+0.1455	_0·1673					
Paraffin 6-25°	1465.8	+12.390	-0.8774	864.3	+7:306	-0·517 <b>4</b>		
25—30° 30—35°	1	+438·986 -434·826		Į.	+258·86 -256·40			
			, , ,	,	200 10	, = 0000		

Die mit Hilfe dieser Constanten für einige Temperaturen berechneten Schallgeschwindigkeiten und die daraus folgenden Elasticitätsmoduln sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	1	Schalle	geschwi	ndigkeit		1	Elasticit	ätsmodi	ıl	
	Wachs	Sper- macet	Paraf- fin	Stearin	Schel- lack	Wachs	Sper- macet	Paraf- fin	Stearin	
10°	984	1498	1502		1007	95.8	214	207		.) _:
20	846	1403	1363	1339	958	70 · 2	187	168	181	Dehnungsm.
30	679	1195	813	1249	876	44.6	134	58.6	157	) ii
40				1103	761	1			121	( <del>E</del>
<b>50</b>		•		901					87.8	۵(
10	588	889	886			34 · 2	75.5	71.9	ļ	) <del>Z</del>
20	505	833	804			25.0	65 · 8	58.5		TorsM.
30	405	709	479	!		15.9	47 · 2	20.4		امِ (ا

Wenden wir uns nun zur Discussion der Resultate.

In Betreff der Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander ergibt sich Folgendes.

Die Longitudinalgeschwindigkeiten stimmen untereinander ziemlich gut überein; die durchschnittlichen Abweichungen betragen  $1-1^1/2^0/0$ , also eine für derartige Versuche befriedigende Genauigkeit. Bei den Torsionsgeschwindigkeiten sind die Fehler etwas grösser. Bemerkenswerth ist, dass auch die

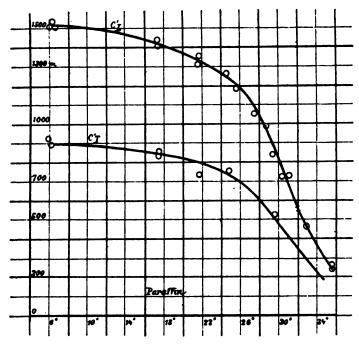
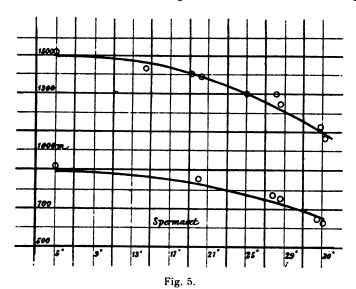


Fig. 4.

Beobachtungen bei verschiedenen Längen der Stücke und auch jene der Obertöne keine bedeutenden Differenzen zeigen — was auch als Bestätigung der Theorie gelten kann (vergl. z. B. Paraffin bei 17°3 oder bei 25°2).

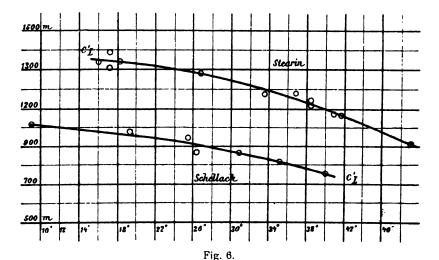
Bezüglich des Wachses muss bemerkt werden, dass Stefan zu einem etwas anderen Resultate gelangte; den in der Einleitung erwähnten Zahlen zufolge fand er bei gewöhnlicher Temperatur die Geschwindigkeit allerdings fast gleich, aber die Abnahme derselben mit wachsender Temperatur ist nach seinen Messungen noch bedeutend rascher. Vielleicht lässt sich dies dadurch erklären, dass hier gelbes Bienenwachs verwendet wurde, während er weisses Wachs gebrauchte, welches zumeist mit anderen Stoffen, namentlich Talg, versetzt wird. Auch die Differenz des Werthes für Stearin von der aus Warburg's Beobachtungen folgenden Zahl 1437 m wird sich auf eine kleine Verschiedenheit des Materials zurückführen lassen.

Allen zur Untersuchung gelangten Stoffen ist die bedeutende Abnahme der Elasticität mit wachsender Temperatur gemeinsam und bei allen erfolgt sie mit zunehmender Tempe-



ratur immer rascher, nur das Paraffin bildet hievon eine Ausnahme; seine Curve weist in der Nähe von 30° einen Wendepunkt auf und wird oberhalb dieser Abscisse wieder convex. Ob dies bloss eine Eigenthümlichkeit dieses Körpers ist, lässt sich nicht entscheiden; es wäre möglich, dass auch die anderen Stoffe bei noch höherer Temperatur eine solche Erscheinung zeigen; leider liess sich dies aus früher genannten Gründen nicht mehr untersuchen.

Es scheint ferner, dass, wenigstens beim Paraffin, die Curve sich continuirlich der Ordinate 0 nähert, um sie vielleicht beim Schmelzpunkte zu erreichen; auch bei den anderen Stoffen ist dies nicht unwahrscheinlich, da bei den höchsten Temperaturen die Neigung besonders gross ist. Es wäre nun sehr merkwürdig, wenn die wirkliche Schallgeschwindigkeit bis 0 abnehmen würde, während sie ja in den meisten Flüssigkeiten Werthe zwischen 1000 und 1500 m hat. Diese Erscheinung wird aber durch den Umstand erklärt, auf welchen zuerst Wertheim aufmerksam gemacht hat, dass nämlich diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in



Stäben nicht identisch ist mit jener in Körpern, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind.

Wird ein Stab gedehnt, so kann er sich ungehindert in der Quere zusammenziehen; in einem massiven, nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnten Körper ist dies dagegen nicht möglich, daher ergibt sich auch hier als Fortpflanzungs-

geschwindigkeit nicht 
$$\sqrt{\frac{\overline{E}}{\rho}}$$
, sondern

$$(c') = \sqrt{\frac{1-\mu}{1-2\mu}} \frac{E}{(1+\mu)\rho} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} \frac{T}{\rho} =$$

$$= c'_L \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = c'_T \sqrt{\frac{2-2\mu}{1-2\mu}}.$$

Diese Geschwindigkeit braucht auch für  $c_L'$  oder  $c_T'=0$  nicht gleich Null zu sein, wenn nämlich  $\mu=0.5$  wird — wie dies ja bei Flüssigkeiten der Fall ist. Diese Geschwindigkeit (c') ist es auch, welche bei flüssigen Körpern beobachtet wird; das c, welches den Longitudinalwellen eines Flüssigkeitsstabes (welcher seitlich durch keine festen Wände begrenzt ist) entspricht, ist gleich Null. Es folgt somit, dass unsere Curve, welche das c' in festen Körpern darstellt, bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe erreichen muss, und zwar scheint es eben nach dem Gesagten, dass sie hiebei keinen Sprung macht, sondern continuirlich verläuft. Um das (c') in ausgedehnten Körpern direct zu messen, haben wir bis jetzt kein Mittel; man könnte es bei Kenntniss von  $\mu$  berechnen, doch ist dazu die Bestimmung dieser Grösse zu unsicher, da die kleine Differenz  $1-2\mu$  im Nenner vorkommt.

Um die in der Einleitung berührte Frage des Zusammenhanges zwischen der thermischen Änderung der Elasticität und dem Ausdehnungscoëfficienten zu untersuchen, machte ich einige Messungen des specifischen Gewichtes der Körper bei verschiedenen Temperaturen. (Diese Zahlen wurden schon in den vorhergehenden Berechnungen theilweise benützt.) Diese Werthe, welche in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, sind zugleich der Massstab für die Ausdehnung.

t	Wachs	t	Paraffin	t	Spermacet	t	Stearin
1.6	$\rho = 0.9774$	0.7	$\rho = 0.9055$	1.3	0.9423	1.0	1.0017
17 7	0.9646	17.9	0.8928	17.8	0 9322	17.7	0.9931
29.7	0.9500	29.6	0.8719	29 8	0.9213	29.6	0.9849
39 · 5	0.9193	39 · 4	0.8452	34.7	0.9148	39.3	0.9748
47 · 2	0 8778		1			47.2	0.9605

Der Anblick der Curven lehrt nun, dass allerdings Paraffin und Wachs, welche sich am meisten ausdehnen, auch ihre Elasticität am meisten ändern und dass ebenso beim Stearin die Kleinheit der thermischen Coëfficienten übereinstimmt, doch fehlt in den Details die Ähnlichkeit; so hat namentlich die merkwürdige Curve der Schallgeschwindigkeit des Paraffins gar keine Analogie mit dessen Wärmeausdehnungscurve. Auch würde man beim Spermacet, welches seine Elasticität ziemlich rasch ändert, einen grösseren Ausdehnungscoëfficienten erwarten können. Es scheint somit, dass zwischen diesen Grössen nur ein mittelbarer Zusammenhang besteht. Von vornherein ist ja auch eher ein solcher zwischen dem Widerstande, welchen der Körper einer allseitigen Zusammendrückung entgegenstellt, also dem Volums-Elasticitätsmodul und der allseitigen thermischen Ausdehnung anzunehmen; man könnte

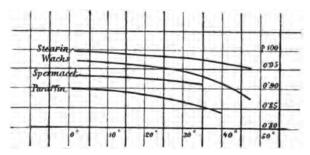


Fig. 7.

erwarten, dass nämlich die Änderung der elastischen Kräfte mit der Temperatur eben von der Vergrösserung der Distanzen zwischen den Molekülen herrührt. Der Längsmodul E folgt aus dem Volumsmodul k mit Hilfe der Formel

$$E = 3(1-2\mu)k,$$

also

$$\delta E = 3(1-2\mu)\delta k - 6k\delta\mu.$$

Da somit die Änderung des E auch durch die Änderung des  $\mu$  beeinflusst wird, ist es immerhin noch nicht ausgeschlossen, dass zwischen k und dem Ausdehnungscoëfficienten eine directe Beziehung herrscht und die Abweichungen davon bei E bei Annäherung an die Schmelztemperatur auf Rechnung des  $\mu$  zu setzen sind, welches sich dann gerade rasch ändert. Hierüber ist vorderhand eine Entscheidung nicht möglich.

In Betreff des zweiten, im Abschnitte I erwähnten Punktes, der Grösse des µ ist zu bemerken: In der That zeigen sich bei diesen weichen Körpern die µ, auch nach der dynamischen Methode bestimmt, verhältnissmässig gross; allerdings bleiben sie immerhin beträchtlich unterhalb der Zahl 0.5 von Mallock für Paraffin und dürfte dieser Werth (welcher auch  $(c) = \infty$ involviren würde) in den früher erwähnten Mängeln der statischen Methode begründet sein. Im Übrigen möchte ich den hier gefundenen Mittelwerthen auch keine sehr grosse Genauigkeit beimessen, da ja die einzelnen Messungen ziemlich grosse Abweichungen zeigen. Ein Theil von ihnen lässt sich — bei Spermacet und Wachs — wohl auf die Änderung des µ mit der Temperatur zurückführen, doch bleiben auch dann noch beträchtliche Differenzen - namentlich bei Paraffin. Dies ist bei der Grösse des Einflusses, welchen geringe Fehler bei der Tonbestimmung etc. haben, leicht begreißlich.

Immerhin ist die Anwendung dieser Methode bei weichen Körpern gerechtfertigt, da zu erwarten ist, dass sich die Fehler der Gewichtsbestimmung, Messung der Radien, Messung des Tones bei einem Mittelwerthe gegenseitig auf heben, und da eben eine andere dynamische Methode zur Bestimmung des  $\mu$  in solchen Stoffen nicht vorhanden ist.

#### VII.

Die allgemeinen Ergebnisse der Untersuchung sind also — um sie zum Schlusse noch kurz zusammenzufassen:

1. Bezüglich der Anwendbarkeit der Methoden überhaupt: Die Schwingungen zusammengesetzter Stäbe sind ein gutes Mittel zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Torsionswellen in Stäben von weichen Körpern (Paraffine, Schellack etc.) und somit auch des adiabatischen E; sie gestatten auch die Bestimmung des µ, allerdings wird sich dabei keine grosse Genauigkeit erzielen lassen.

2. Bezüglich der Änderung der Elasticität mit der Temperatur:

Die Geschwindigkeit  $c'_L$  und  $c'_T$ , somit auch E und T, nehmen mit wachsender Temperatur bei solchen Körpern sehr

rasch ab, und zwar nicht derselben proportional, sondern immer rascher; ob zum Schlusse immer wieder ein Wendepunkt eintritt — wie beim Paraffin — liess sich nicht entscheiden. Die Curven dürften bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe berühren. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dieser Abnahme und dem thermischen Ausdehnungscoöfficienten existirt nicht, doch ist damit noch nicht ausgeschlossen, dass ein solcher zwischen letzterem und dem Volumsmodul besteht, was dann die scheinbare Übereinstimmung zwischen den obigen Grössen bei Stoffen, die weit von ihrem Schmelzpunkte entfernt sind, erklären würde.

## 3. Bezüglich der Grösse des µ:

Dasselbe schwankt bei den untersuchten Stoffen (Wachs, Spermacet, Paraffin) — den Versuchen zufolge — zwischen 0·4 und 0·44, ist somit relativ gross, wenn auch nicht so, wie es die statischen Methoden zu ergeben scheinen. Bei Wachs und Spermacet war eine Zunahme mit steigender Temperatur bemerkbar.

## XIX. SITZUNG VOM 12. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IV und V (April und Mai 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Graz dankt für die ihm zur Durchführung seiner Untersuchung über die Magnetisirung durch elektrische Oscillationen bewilligte Subvention.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende zwei Arbeiten aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck:

- »Eine Studie über unipolare Induction«, von Prof. Dr. Ernst Lecher.
- 2. \*Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern«, von Joh. Zuchristian.
- Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit der Herren k. u. k. Oberstabsarzt Prof. Dr. F. Kratschmer und k. u. k. Regimentsarzt Dr. E. Wiener in Wien, betitelt: \*Grundzüge einer neuen Bestimmungsmethode der Kohlensäure in der Luft«.
- Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (II. Abhandlung), von Dr. Max Bamberger.
- Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup überreicht folgende vier im chemischen Institut der k. k. Universität in Graz ausgeführte Arbeiten:

- 1. Ȇber die Constitution der Verbindungen von Chinaalkaloiden mit Äthyljodid«, von Zd. H. Skraup.
- 2. \*Über das Verhalten von Hydrojodcinchonin zu Wasser«, von Dr. G. Pum.
- 3. »Mangantrichlorid und Chlorokupfersäure«, von G. Neumann.
- 4. »Quantitative Analyse von Schwermetallen durch Titriren mit Natriumsulfid«, von G. Neumann.

Das c. M. Prof. Franz Exner übersendet eine Arbeit, betitelt: \*Elektrochemische Untersuchungen« (IV. Mittheilung).

Ferner übersendet derselbe eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn J. G. Garvanoff: »Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur.«

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (10. Fortsetzung).

Herr Dr. Wilhelm Kaiser, k. k. Polizei-Commissär in Floridsdorf, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches angeblich die Beschreibung einer in verhältnissmässig beschränktem Raume (bei grosser Stromstärke) untergebrachten transportablen Quellenbatterie enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung über gewundene Bergkrystalle vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von E. Bryk: »Über die Einwirkung von Jod und Kalilauge auf Harnsäure«:

ferner eine von Prof. R. Přibram aus Czernowitz eingesendete Abhandlung von G. Gregor: »Über die Einwirkung von Jodmethyl auf Resacetophenonkalium«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht zwei weitere Berichte von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien: III. »Beitrag zur Flora von Thessalien« und IV. »Beitrag zur Flora von Achaia und Arcadien«, welche den Schluss der botanischen Ergebnisse einer von demselben im Auftrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften unternommenen Forschungsreise nach Griechenland bilden.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer überreicht den IV. Theil der in Verbindung mit Ed. Edl. v. Bergenstamm verfassten Vorarbeiten zu einer Monographie der Muscaria Schizometopa, welcher ein Verzeichniss der bis jetzt gezogenen Parasiten und ihrer Wirthe und eine ebensolche alphabetische Aufzählung der Wirthe und ihrer Parasiten, ferner Nachträge zu den früheren Theilen enthält.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium von Herrn Fritz Pollak durchgeführte Untersuchung: »Studien über die synthetische Bildung von Mesoweinsäure und Traubensäure«.

Das w. M. Herr Vicepräsident Prof. E. Suess übergibt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt \*Beiträge zur Stratigraphie Centralasiens\*.

Herr Dr. J. Sahulka, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: Neue Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen«.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Kaiserliche Universität in Kasan, Jubiläumsschrift zur hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. Kasan, 1894; 40.

Wilde, H. Über den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London, 1892: 4°.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, IX., Wasagasse 12) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



## SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VIII. HEFT.

JAHRGANG 1894. - OCTOBER.

### ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK.
ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 1 TAFEL UND 36 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAPTEN.

## INHALT

des	8.	Heftes Sitz	October zungsber	1894 richte	des der	CIII.	Bandes, emnatu	Abtl	neilung Classe.	II.	a.	der

XX. Sitzung vom 11 Ostober 1004 de	Selt
XX. Sitzung vom 11. October 1894: Übersicht	779
B., Anderungen des elektrischen Widerstandes wässerier-	
Losungen und der galvanischen Polarisation mit der	
Diucke. (Mit 2 Textinguren ) [Projet 25 to 50 De 1	70
Puschl C., Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz.	789
[1 1015. 20 Kr. = 50 Ptg.]	
Mahler E., Die Apisperiode der alten Ägypter. [Preis: 20 kr. =	809
40 Pfg.)	
Exner F., Elektrochemische Untersuchungen. (IV. Mittheilung.)	832
(Mit 3 Textfigurer ) [Preise 20 t	
(Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	845
Garvanoff J. G., Über die innere Reibung in Ölen und deren	
Anderung mit der Temperatur. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis:	
10 KI. = 50 FIG.	873
and a ligemeinen Flacke deitter Oud-	
[*1018, 10 Kr. = 20 Plg.]	887
The Circulare Magnetistrong von Figure desta	
(Mit o Textinguren.) [Peis: 35 kg — 70 Dec 1	201
on characturigen uber den elektrischen Liebthame	
(Mile o Textinguren.) [Preis: 25 kg = 50 pc-1	200
S., Experimentelle Darstellung von Magnetfelden	120
Taici und 3 lexthouren) [Projet 20 to co pe 1	
Lecher E., Eine Studie über unipolare Induction. (Mit 17 Text-	943
nguich,)   rreis: 50 kr — 1 Mb 1	
KXI. Sitzung vom 18 October 1804, fr	949
XXI. Sitzung vom 18. October 1894: Übersicht	81

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 20 kr. = 4 Mk. 40 Pfg.

## SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VIII. HEFT.

#### ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



## XX. SITZUNG VOM 11. OCTOBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den Ferien und heisst das neueingetretene Mitglied Herrn Prof. A. Weichselbaum herzlich willkommen.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe seit der letzten Sitzung durch den Tod zweier hervorragender Männer der Wissenschaft erlitten hat.

Am 17. Juli verschied in Perchtoldsdorf bei Wien der Senior der Akademie Hofrath Dr. Joseph Hyrtl, emerit. Professor der Wiener Universität, im 83. Lebensjahre. Hyrtl war das letzte noch lebende wirkliche Mitglied aus der Reihe der bei Gründung der Akademie (1847) von Sr. Majestät Kaiser Ferdinand I. ernannten vierzig Akademiker.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Am 8. September erfolgte zu Charlottenburg bei Berlin das Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes wirkl. geh. Rath und Universitätsprofessor Dr. Hermann von Helmholtz.

Die Mitglieder erheben sich gleichfalls zum Zeichen des Beileids von den Sitzen.

Ferner bringt der Vorsitzende folgende an Se. Excellenz den Herrn Präsidenten der Akademie gelangte Mittheilungen zur Kenntniss, und zwar:

Ein Schreiben Sr. Excellenz des w. M. Herrn Dr. Cajetan Freiherrn von Felder, worin derselbe der kaiserl. Akademie den

Dank ausspricht für die ihm zu seinem 80. Geburtstage am 19. September l. J. dargebrachten Glückwünsche.

Ein Schreiben von Dr. A. Friedlowsky in Kreisbach, in welchem derselbe im Namen der Frau Hofrathswitwe Auguste Hyrtl der kaiserl. Akademie für die Theilnahme an der Leichenfeier ihres verewigten Gatten und für die gleichzeitige Kranzspende herzlich dankt; — desgleichen ein Dankschreiben Ihrer Excellenz Frau von Helmholtz in Charlottenburg für das ihr aus Anlass des Ablebens ihres Gemals von der kaiserl. Akademie übersandte Beileidstelegramm.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Werk: Die Liparischen Inseln. III. Liparis vor.

Im Laufe der Ferien sind folgende Publicationen der Classe erschienen:

Sitzungsberichte, Bd. 103. (1894), Abtheilung I, Heft IV bis V (April—Mai); Abtheilung II. a., Heft III—V (März—Mai), Heft VI (Juni) und VII (Juli); Abtheilung III, Heft I—IV (Jänner bis April).

Monatshefte für Chemie, Bd. 15. (1894), Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August); — ferner das General-Register zu den Bänden I—X dieser Monatshefte.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar:

Die Herren Dr. J. Breuer in Wien, Prof. Dr. G. Goldschmiedt und Prof. Dr. H. Molisch in Prag für die Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern — und

Herr A. Auwers, ständiger Secretär der königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin für die Wanl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede.

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, dankt für die ihm zur Vollendung seiner Untersuchungen über den Erregungsvorgang in den marklosen Nervenfasern der Wirbellosen bewilligte Subvention.

Der Secretär berichtet, dass die im laufenden Jahre unter der wissenschaftlichen Leitung des Herrn k. und k. Hofrathes Director Steindachner auf S. M. Schiff \*Pola « unternommenen geologischen Forschungen in den grossen Tiefen der Adria erfolgreich durchgeführt wurden und dass das Expeditionsschiff unter Commando des k. und k. Fregatten-Capitän Mörth nach neunwöchentlicher Fahrt am 1. August wieder glücklich in den Hafen von Pola eingelaufen ist; — ferner dass auch die im Monate Mai l. J. von Herrn Dr. K. Natterer auf S. M. Schiff \*Taurus « ausgeführten chemischen Untersuchungen im Marmara-Meere ganz entsprechende Resultate ergeben haben.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Arbeit: Die mineralische Nahrung der Pilze« (I. Abhandlung).

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

- Über die allgemeinen Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in äolotropen und isotropen Substanzen« — und
- 2. Ȇber das Kriterion der Connexialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung«, beide vorgenannten Arbeiten von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
- 3. Bemerkungen über Wärmeleitung«, von P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
- 4. Ȇber die zeitweilig verloren gehende elektrische Durchlässigkeit (Leitungsfähigkeit) unserer Metalle für Ströme von ganz geringer Spannung«, von Dr. A. Vietrzycki, k. k. Bezirksarzt in Brzesko (Galizien).

Ferner legt der Secretär folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor:

Von Dr. Isidor Altschul, k. Bezirksarzt in Stretraia (Rumänien), mit der Aufschrift: »Zwei Abhandlungen. I. Über das chemische Verhältniss des schlagenden Wetters; II. Über constantes Licht durch Influenz-Elektricität».

- 2. Von Herrn Gustav Hirsch in Wien, mit der Aufschrift:

  »Vindex«, angeblich ein Mittel gegen die Reblaus.
- 3. Von Herrn Franz Müller, Schulleiter in Siegenfeld (Niederösterreich), mit der Aufschrift: »Leseapparat«.
- 4. Von Herrn Oswald Liss, Bauingenieur in Wien, mit der Aufschrift: •Sempre avanti«. Der Inhalt betrifft angeblich einen neuen Eisenbahn-Oberbau.
- 5. Von Dr. Norbert Herz in Wien, mit der Aufschrift: 
  Physik 744. Dasselbe enthält angeblich die Principien einer Lösung des Problems des lenkbaren Luftschiffes.
- 6. Von den Herren Franz B. Smolik und Emil Plechawski in Wien, mit der Aufschrift: \*Karte der Eisenbahnrouten zur Ermittlung der Entfernungen beliebiger Stationsverbindungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: •Über die Bildung von Naphtoldithiocarbonsäuren • von Prof. Dr. R. Přibram und C. Glücksmann.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführten Messungen« (I. Theil).

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges im marklosen Nerven«.

Schliesslich überreicht der Secretär, Hofrath Director J. Hann, eine Abhandlung des Herrn Eduard Mazelle, Adjunct am astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest, unter dem Titel: »Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur«.

- Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:
- Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. III. \*Lipari\*, Prag, 1894; Folio.
- Le Prince Albert Ier, Prince de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplie sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Publiés sous la direction avec le concours du Baron Jules de Guerne, chargé des Travaux zoologiques à bord. Fascicule VII. Crustacés décapodes provenant des Campagnes 1886, 1887, 1888 par A. Milne-Edwards et E. L. Bouvier. Ière Partie. »Brachyures et Anomoures«. Imprimerie de Monaco, 1894; Folio.
- Instituto Agronomico do Estado de São Paulo (Brazil) em Campinas, Relatorio Annual 1893. S. Paulo, 1894; 4°.
- Liverpool Biological Society, Report upon the Fauna of Liverpool Bay. Vol. I. (with 10 plantes and 2 maps). London 1886; 8°. Vol. II. (with 12 plantes and 1 chart). Liverpool, 1892; 8°.
- Prinz W., Agrandissements des Photographies Lunaires. Publié sous les Auspices de M. E. Solvay. Observatoire Royal de Belgique. Partie d'un cliché obtenu au foyer du grand Réfracteur de Lick Observatory. Planche I. Agrandissement à 8 diametres; Planche II. Agrandissement à 24 diametres; Planche III. Agrandissement à 33 diametres.

## Änderungen des elektrischen Widerstandes wässeriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke

von

#### Bruno Piesch.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Frage, inwiefern eine Änderung des Druckes einen Einfluss auf den elektrischen Leitungswiderstand einer Flüssigkeit ausübt, wurde bereits in mehrfacher Weise behandelt, aber die meisten dieser Untersuchungen, welche nur mit geringen Druckänderungen ausgeführt wurden, haben keine nennenswerthen Ergebnisse geliefert. Dieselben sind grösstentheils in der Abhandlung des Herrn Fink angeführt, welcher sich bisher am eingehendsten in dieser Richtung beschäftigt hat. Er hat durch eine grössere Reihe von Versuchen mit Salzsäure, Chlornatrium- und Zinksulfatlösungen unter Anwendung hoher Drucke gezeigt, dass im Allgemeinen mit Zunahme des Druckes eine Abnahme des Leitungswiderstandes dieser Flüssigkeiten erfolgt. Ich werde wohl noch öfter Gelegenheit haben, auf diese Arbeit Fink's zurückzukommen. Von späteren Untersuchungen sind nur die von Fousserau<sup>2</sup> hervorzuheben, welcher fand, dass sich der Widerstand sehr verdünnter Lösungen von Eisenchlorid und Chloraluminium bei einer Druckzunahme von 175 Atm. um 5-6% des ursprünglichen Werthes verringert, aber

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wied. Ann., XXVI, S. 481 (1888).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Beibl., 11, S. 723.

nach tagelangem Stehenlassen diesen wieder erreicht. Die Stärke der Änderung nahm mit der Concentration der Lösung zu. Alle diese Versuche, vor Allem diejenigen Fink's haben gezeigt, dass nur bei Anwendung geeigneter Methoden und Apparate, welche grosse Druckänderungen zulassen, genaue und brauchbare Resultate zu erzielen sind.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Untersuchungen, die Herr Fink an den drei Elektrolyten ausgeführt hat, mit wesentlich verschiedenen Versuchsanordnungen auf eine grössere Reihe wässeriger Lösungen auszudehnen, und ich will gleich hier erwähnen, dass die im Folgenden mitgetheilten Untersuchungsergebnisse mit dem oben angeführten allgemeinen Resultate Fink's vollkommen übereinstimmen.

Eine andere Frage war die, ob nicht eine Druckänderung auch auf die chemischen Erscheinungen, welche der elektrische Strom beim Durchgang durch einen Elektrolyten hervorruft, von Einfluss ist. Diese chemischen Erscheinungen bestehen bekanntlich erstens in der Zersetzung des Elektrolyten, anderseits in der Rückbildung desselben unter gleichzeitigem Verschwinden der ausgeschiedenen Jonen. Dieser zweite chemische Vorgang wird nach den neueren Theorien als die Ursache jener elektromotorischen Kraft angesehen, welche mit dem Namen galvanische Polarisation bezeichnet wird. Die obige Frage wird daher ihre Beantwortung erhalten, wenn wir untersuchen, ob sich die galvanische Polarisation mit dem Drucke ändert. Diese Frage hat Herr F. Exner in seinen » Elektrochemischen Untersuchungen« aufgeworfen und daselbst auch die Vermuthung ausgesprochen, dass ähnlich wie die Temperatur auch der Druck auf die Polarisation von Einfluss sein müsse.

## Methoden und Apparate.

Bei der Wahl der Methode der Widerstandsbestimmung hat es sich vor Allem darum gehandelt, eine möglichst grosse Genauigkeit der Messungen zu erzielen, da es ja aus den früheren Versuchen hervorgeht, dass die Widerstandsände-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, Bd. 100 (1891).

rungen oft nur geringe sind. Mit der Telephonmethode, welche bei Flüssigkeitswiderständen am häufigsten angewendet wird, konnte ich die gewünschte Genauigkeit nicht erreichen, denn die Versuche, die ich damit anstellte, ergaben eine solche von nur  $2^{\circ}/_{\circ}$ . Ich wendete daher eine Methode an, welche einerseits eine gleichzeitige Messung des Widerstandes und der Polarisation gestattet, anderseits auch einen Anspruch auf grosse Genauigkeit macht. Eine ähnliche Art, den Widerstand und Polarisation gleichzeitig zu bestimmen, ist auch bereits von Neumann (Wiedem. Galv.) angegeben worden.

Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem: Der Strom einer Batterie von der elektromotorischen Kraft E theilt sich in zwei Zweige; in den einen derselben wird der zu bestimmende Flüssigkeitswiderstand (x) eingeschaltet, ein Widerstandskasten und die eine Rolle eines Differentialgalvanometers, der andere Zweigstrom geht durch einen zweiten Stöpselrheostaten und in entgegengesetzter Richtung durch die andere Galvanometerrolle und vereinigt sich dann wieder mit dem ersten Zweig, um zur Batterie zurückzukehren. Sobald der Strom geschlossen wird, beginnt sich die Polarisation (p) zu entwickeln, und es wird nun im zweiten Rheostaten soviel Widerstand (w) eingeschaltet, bis die Stromintensität in beiden Zweigen dieselbe ist, die Nadel also dauernd auf Null einsteht. Dass dazu immer eine längere Zeit nöthig war, geht aus einigen Ursachen hervor, auf die ich noch später zu sprechen komme. Nun wird in den ersten Zweig ein Zusatzwiderstand (g) geschaltet und die Stromgleichheit durch Zuschalten eines Widerstandes g, in den anderen Zweig wiederhergestellt. Mache ich den Flüssigkeitswiderstand genügend gross, woraus sich auch für w ein entsprechend hoher Werth ergibt, so kann ich den Widerstand der Batterie und der Zuleitungsdrähte dagegen vernachlässigen. Bezeichnet nun i die Stromstärke eines Zweigstromes und a den Widerstand einer Galvanometerrolle (dass dieser Werth für beide Rollen derselbe ist, ist durch einen Versuch bestätigt worden), so folgt aus der ersten Einstellung nach den Gesetzen der Stromverzweigung: E-p=i(x+a),

$$E = i(w+a)$$
 und daraus  $\frac{E-p}{E} = \frac{a+x}{a+w}$ 

Nach Einschaltung der Zusatzwiderstände erhält man auf dieselbe Weise:  $\frac{E-p}{E} = \frac{a+x+g}{a+w+g_1}$ . Daraus ergibt sich für den zu bestimmenden Widerstand  $x = \frac{(a+w)g}{g'} - a$  und für den Werth der Polarisation  $p = E\left(1 - \frac{g}{g_1}\right)$ . Man kann also aus den zwei Einstellungen die gesuchten Grössen bestimmen. Jedoch eine Voraussetzung wurde bei dieser Methode gemacht, deren Richtigkeit man von vorneherein wohl nicht annehmen kann. Es ist dies die Voraussetzung, dass die Polarisation nach Zuschalten des Widerstandes g, also mit der Änderung der Stromstärke dieselbe bleibt. Im Allgemeinen wird dies auch gewiss nicht der Fall sein. Der Umstand jedoch, dass der Flüssigkeitswiderstand - schon aus oben angeführten Gründen - sehr gross gewählt wird und der Zusatzwiderstand im Verhältniss dazu genügend klein gemacht werden kann, lässt vermuthen, dass eine Änderung der Polarisation innerhalb so geringer Stromintensitätsunterschiede nicht eintreten wird. Dies wurde natürlich durch eine Reihe von Versuchen auch nachgewiesen, von denen ich hier einige anführen will. Als Flüssigkeit wurde eine verdünnte Kupfersulfatlösung verwendet, in welche Platinelektroden eintauchten. Der Widerstand w wurde nun regulirt, bis die Nadel sich auf Null einstellte, dann verschiedene Zusatzwiderstände g, g', g"... eingeschaltet, welche wieder durch Widerstände  $g_1g_1'g_1''...$  compensirt wurden. Ändert sich die Polarisation nicht, so muss sich verhalten  $g: g': g'' = g_1: g_1': g_1''$ .

$v+g_1$	g <sub>1</sub>	8	$w+g_1$	g <sub>1</sub>	g	$w+g_1$	gı	g	$w+g_1$	81
541.5	0	o	1582	0	0	2260	0	0	3910	0
581.0	39.5	50	1647	65	50	2360	100	50	3980	70
622.0	80 5	100	1712	130	100	2460	200	100	4050	140
666 · 5	125.0	150	1772	190	150	2570	310	150	4120	210
	541·5 581·0 622·0	541·5 0 581·0 39·5 622·0 80 5	541·5 0 0 581·0 39·5 50 622·0 80 5 100	541·5 0 0 1582 581·0 39·5 50 1647 622·0 80 5 100 1712	541·5     0     0     1582     0       581·0     39·5     50     1647     65       622·0     80·5     100     1712     130	541·5         0         0         1582         0         0           581·0         39·5         50         1647         65         50           622·0         80 5         100         1712         130         100	541·5         0         0         1582         0         0         2260           581·0         39·5         50         1647         65         50         2360           622·0         80 5         100         1712         130         100         2460	541·5         0         0         1582         0         0         2260         0           581·0         39·5         50         1647         65         50         2360         100           622·0         80 5         100         1712         130         100         2460         200	541·5         0         0         1582         0         0         2260         0         0           581·0         39·5         50         1647         65         50         2360         100         50           622·0         80 5         100         1712         130         100         2460         200         100	581 · 0     39 · 5     50     1647     65     50     2360     100     50     3980

Diese Resultate zeigen nun, dass bei genügend grossem w und geringen Zusatzwiderständen g die Proportionalität zwischen den g und  $g_1$  besteht, also eine geringe Intensitätsände-

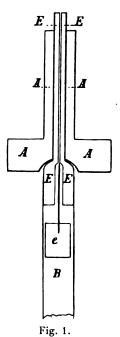
rung des Stromes keinen merkbaren Einfluss auf die Polarisation ausübt. Nehmen die Werthe des g zu, so sehen wir, dass sich die Werthe der  $g_1$  nicht mehr proportional mit diesen ändern. Bei grösseren Widerständen w können wir natürlich auch entsprechend höhere Zusatzwiderstände einschalten, und dies ist ja auch für die Genauigkeit der Messungen von grossem Vortheil.

Eine Schwierigkeit, die sich bei dieser Methode darbietet, und welche auch die Ursache davon ist, dass einige Messungen nur näherungsweise ausgeführt werden konnten, muss hier noch erwähnt werden. Bekanntlich erreicht nach dem Schliessen des primären Stromes der Polarisationsstrom nicht momentan seinen vollen Werth, sondern es ist dazu immer eine längere Zeit nöthig. Man muss daher lange warten, bis die Galvanometernadel zur Ruhe kommt und die erste Einstellung gemacht werden kann. Die Erfahrung zeigte, dass bei grösseren Flüssigkeitswiderständen das Maximum der Polarisation schneller erreicht wurde. Bei einigen Flüssigkeiten konnte aber ein stationärer Zustand überhaupt nicht beobachtet werden; die Nadel bewegte sich entweder continuirlich nach einer Richtung oder war beständig in schwingender Bewegung begriffen. In diesem Falle musste man eben auf ein genaues Resultat verzichten und zufrieden sein, überhaupt eine Änderung des Widerstandes mit dem Druck feststellen zu können. Die Ursache dieser Erscheinung lag wahrscheinlich in grösseren Concentrationsänderungen der Flüssigkeit; denn die Zersetzung der Elektrolyten erfolgt ja immer rascher als die gleichzeitige Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen, sobald nur die elektromotorische Kraft des primären Stromes grösser ist als die der Polarisation. Und dies letztere war ja bei allen Messungen der Fall. Ich will noch erwähnen, dass zur Stromerzeugung eine Anzahl Accumulatoren diente, welche eine genügend constant bleibende elektromotorische Kraft hatten. Die Grösse derselben war natürlich bei den einzelnen Versuchen verschieden und richtete sich immer nach der Grösse des Flüssigkeitswiderstandes. Die Werthe wechselten zwischen 3-8 Volt. Da ja zur Berechnung der Polarisation die elektromotorische Kraft der Kette bekannt sein muss, so musste dieselbe nach jedem Versuche gemessen

werden, und zwar geschah dies vermittelst eines Siemens'schen Torsionsgalvanometers, welches die Klemmen der Accumulatoren zu einem Nebenkreis verband. Dieses Instrument gestattete eine genaue Ablesung von Hunderteln Volt. Was die Genauigkeit der Messungen überhaupt anlangt, muss ich hervorheben, dass eine Änderung des Widerstandes w um 0.03% noch einen merkbaren Ausschlag der Galvanometernadel ergab.

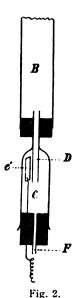
Druckapparat und Widerstandsgefäss. Zur Erzeugung des Druckes diente ein Cailletet'scher Druckapparat (wie er auch von Fink bei seinen Untersuchungen verwendet wurde), den Herr Hofrath v. Lang in gütigster Weise zur Verfügung stellte, und wofür ich an dieser Stelle meinen besten Dank zum Ausdruck bringe. Auf die Beschreibung des Apparates will ich nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dass man mit demselben mit Leichtigkeit einen Druck von 700 Atmosphären erreichen konnte. Bei meinen Versuchen ging ich jedoch nur bis zu einem Druck von 500 und nur einmal bis 600 Atmosphären. Die Messung des Druckes geschah vermittelst eines an die Pumpe angebrachten Bourdon'schen Manometers.

Die grössten Schwierigkeiten machte die Herstellung des Widerstandsgefässes,



und zwar die luftdichte Abschliessung nach Aussen und die Einführung des Zuleitungsdrahtes. Meine anfänglichen Versuche, die Glasröhre, wie sie zur Verflüssigung von Gasen verwendet wird, als Widerstandsgefäss zu benützen, indem man den Zuleitungsdraht oben einschmilzt, missglückten insofern, als die Glasröhren oberhalb des Wulstes, der an die Metallhülse angepresst wird, sprangen. Ich traf daher eine wesentlich andere Anordnung, die sich äusserst vortheilhaft erwies. In die Metallhülse (A) (Fig. 1) wurde ein Ebonitcylinder (E) eingekittet, der sich gegen das untere Ende erweiterte, um dort einen Abschluss nach Aussen herzustellen. Der Cylinder war

in der Richtung seiner Axe durchbohrt, damit der Kupferdraht hindurchgeführt werden konnte. An denselben wurde ein Platindraht angelöthet, der dann die eine Elektrode (e) trug. Als Elektroden benützte ich rechteckige Platinbleche, die an die Platindrähte angenietet waren. Die Bohröffnung wurde ganz mit Kitt ausgefüllt, so dass auch die Löthstelle, die in dem unteren weiteren Theil der Bohrung lag, mit Kitt umgeben war und mit der Flüssigkeit keineswegs in Berührung kommen konnte. Ich muss bemerken, dass der Dubois'sche Kitt (eine Mischung



von gleichen Theilen Colophonium und gelbem Wachs), welchen ich dabei verwendete, selbst bei den höchsten Drucken vollkommen dicht gehalten hat; erst nach einer längeren Reihe von Versuchen musste er wieder erneuert werden.

Zur Aufnahme der Flüssigkeit dienten zwei Glasröhren, von denen die eine (B) auf den unteren weiteren Theil des Ebonitcylinders aufgekittet war, wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Sie ist durch einen Kautschukpfropfen nach unten geschlossen. Die zweite Glasröhre C (Fig. 2) hat einen engeren Theil, mit dem sie durch den Pfropfen in die erste Röhre hineinragt, und einen weiteren, der ebenfalls mit einem Kautschukstöpsel versehen ist. Durch den letzteren geht eine kurze Glasröhre (F), welche die Verbindung nach Aussen herstellt. Ausserdem wurde durch diesen Pfropfen der Platindraht geführt, der die

zweite Elektrode (e') trägt und unten in eine Spirale endigt. Zu erwähnen ist noch die kleine Röhre D, welche in den engeren Theil von C eingeschoben wurde und verhindern sollte, dass die Gasblasen, welche sich bei der Zersetzung an den Elektroden bilden, in diesen Theil der Röhre gelangen und dadurch eine Unterbrechung des Stromes verursachen. Diese Zusammenstellung des Widerstandsgefässes, besonders die Anwendung einer engen Verbindungsröhre hatte lediglich den Zweck, den Widerstand aus den oben angeführten Gründen zu vergrössern. Bei gut leitenden Flüssigkeiten war es nöthig, noch engere Röhren anzuwenden, bei einigen sehr schlecht

leitenden dagegen musste man den Pfropfen mit der zweiten Elektrode direct in die Röhre B einsetzen.

Sobald alle Theile des Widerstandsgefässes bis zum äussersten Rande der kleinen Röhre F gefüllt sind, wird dasselbe nun in den eisernen Cylinder des Druckapparates eingesetzt. Auf dem Boden desselben befindet sich eine Schichte Quecksilber, in welches die Platindrahtspirale hineintaucht, so dass dadurch eine leitende Verbindung zwischen der unteren Elektrode (e') und dem Eisencylinder hergestellt ist. Ein starker Kupferdraht, der um denselben gewunden ist, leitet den Strom weiter. Der Widerstand aller dieser Leitungen ist, wie die Versuche ergeben haben, ein so geringer im Vergleich mit dem Flüssigkeitswiderstand, dass er überhaupt nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Da das Quecksilber zur Leitung des Stromes benützt wurde, durfte dasselbe keineswegs mit dem Elektrolyten in Berührung kommen. Denn auf diese Weise würde es ebenfalls die Stelle einer Elektrode einnehmen, und ausserdem würde die Berührung des Quecksilbers mit dem Platindrahte einerseits und die Anwesenheit des Elektrolyten anderseits die Ursache zur Bildung eines störenden elektrischen Stromes sein. Es wurde daher die zu untersuchende Flüssigkeit unten durch eine nicht leitende Flüssigkeit, Schwefelkohlenstoff, abgeschlossen, dessen specifisches Gewicht grösser ist als das des Wassers und der untersuchten Flüssigkeiten. Der übrige Theil des Eisencylinders wurde mit Wasser angefüllt. Der Schwefelkohlenstoff musste natürlich nach einigen Versuchsreihen immer erneuert werden, da er durch die Berührung mit dem Quecksilber sehr rasch verunreinigt wurde.

Die untere Elektrode e' wurde in einer entsprechenden Höhe angebracht, so dass sie von dem Schwefelkohlenstoff, der etwa durch den hohen Druck in die Röhre C eingedrungen war, nicht bedeckt werden konnte. Anderseits durfte sie auch nicht zu hoch angebracht werden, da der obere Theil dieser Röhre zur Ansammlung der ausgeschiedenen Gase bestimmt war. Aus demselben Grunde musste auch zwischen der oberen Elektrode e und dem Ebonitcylinder ein freier Raum gelassen werden. Die Menge der ausgeschiedenen Gase war allerdings

eine sehr geringe, und durch den Druck wurde ihr Volumen noch bedeutend reducirt. Es wäre noch zu bemerken, dass die Stromrichtung bei allen Versuchen dieselbe blieb, und zwar wurde dieselbe so gewählt, dass die untere Elektrode (e') mit dem Zinkpol der Batterie in Verbindung stand, dass sich also das Metall des Elektrolyten immer auf dieser Elektrode absetzte. Diese Einrichtung wurde getroffen, weil die untere Elektrode mit grosser Leichtigkeit gereinigt werden konnte. Die Reinigung geschah durch Lösung des niedergeschlagenen Metalls in Salpetersäure und Abwaschen mit Soda und Wasser. Ausserdem wurden die Elektroden noch ausgeglüht, um sie auch von den absorbirten Gasen zu befreien. Trotzdem konnte ein gänzliches Verschwinden des Polarisationsstromes nicht erreicht werden, das sehr empfindliche Galvanometer zeigte stets einen wenn auch sehr schwachen Strom an.

## Die Beobachtungen.

Wie ich schon eingangs erwähnt habe, war es mir darum zu thun, die Beobachtungen an einer grösseren Reihe von Flüssigkeiten anzustellen, und ich will daher an dieser Stelle vor Allem Einiges über die verwendeten Flüssigkeiten hervorheben. Es gelangten sowohl verdünnte Säuren, als auch Salzlösungen zur Untersuchung, und zwar von ersteren die Schwefelsäure, Salpetersäure, Chlorwasserstoffsäure und zwei organische, die Essig- und Oxalsäure. Anschliessend an jede derselben wurde dann eine Reihe von Salzen untersucht, und zwar die Kupfer-, Eisen-, Zink-, Nickel- und Magnesiumsalze, nur bei der Schwefelsäure an Stelle des letztgenannten das Natriumsulfat. Ausserdem konnte von den Salzen der beiden organischen Säuren das Eisenacetat, sowie sämmtliche eben genannten Salze der Oxalsäure infolge ihrer Unlöslichkeit in kaltem Wasser zur Untersuchung nicht verwendet werden.

Um auch einen gleichzeitigen Einfluss der Concentration auf die Widerstandsänderung der Lösung feststellen zu können, wurden die meisten der Flüssigkeiten bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet. Dabei standen die Procentgehalte der Salzlösungen und der entsprechenden Säuren in einem ganz bestimmten Verhältniss, so dass in gleichen Mengen der Lösungen auch gleiche Mengen der Säureradicale enthalten waren, oder mit anderen Worten, dass in der Gewichtseinheit der beiden Lösungen sich eine gleich grosse Anzahl elektrolytischer Molekeln befand. Weiter folgt daraus, dass sich die Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen elektrolytischen Molekeln der beiden Lösungen verhalten müssen wie die specifischen Gewichte derselben. Bezeichnet nämlich p das in der Gewichtseinheit enthaltene Gewicht der gelösten Substanz, A das Äquivalentgewicht der Lösung, d. h. das Moleculargewicht dividirt durch die Anzahl der Säureradicale, so ist die in der Gewichtseinheit enthaltene Molekelanzahl  $g = \frac{p}{A}$ , für eine zweite Lösung ist  $g' = \frac{p'}{A'}$ , soll nun g = g' sein, so muss sich verhalten: p:p'=A:A', wenn daher der Procentgehalt  $(P=100\ p)$  der Säure gegeben ist, so folgt daraus  $P'=\frac{PA'}{A}$  für den Procentgehalt der Salzlösung.

Ist ferner m die Anzahl der elektrolytischen Molekeln in der Volumeinheit und s das specifische Gewicht der Lösung, so ist m = sg und für die zweite Lösung m' = s'g', und da g = g', so verhalten sich: m : m' = s : s', was bereits oben ausgesprochen wurde.

Zwei Salze, Kupfer- und Magnesiumacetat, konnten infolge ihrer sehr geringen Löslichkeit in den entsprechenden Concentrationen nicht untersucht werden, sie wurden daher ebenso wie das Nickelacetat auch nur bei einer einzigen Concentration beobachtet. Die Herstellung der Lösungen von bestimmter Concentration geschah entweder auf die Weise, dass die nöthige Menge der Substanz abgewogen und in der dazu gehörigen Menge destillirten Wassers gelöst wurde, oder es wurde aus Tabellen das dem gewünschten Procentgehalt entsprechende specifische Gewicht entnommen und nach diesem die Lösung hergestellt. Im ersteren Falle wurde das specifische Gewicht nachträglich vermittelst eines Aräometers bestimmt.

Eine grosse Rolle sowohl bei Widerstands- als auch bei Polarisationsmessungen spielt auch die Temperatur, und es ist bekannt, dass die Flüssigkeiten bei Erhöhung der Temperatur besser leiten, dass dagegen die Polarisation eine Abnahme der Werthe zeigt. Die Frage, ob der Druck bei verschiedenen Temperaturen auch den Widerstand oder die Polarisation in verschiedener Weise beeinflusst, habe ich bei der vorliegenden Arbeit gar nicht in Betracht gezogen, da es mir ja vor Allem nur darum zu thun war, festzustellen, ob überhaupt der Druck eine Änderung dieser Erscheinungen hervorruft.

Die Messungen wurden daher alle bei Zimmertemperatur vorgenommen, und die Hauptsache war, dass dieselbe während einer Versuchsreihe möglichst constant blieb. Den Eisencvlinder, in welchen das Widerstandsgefäss eingeschlossen war, mit einem Wasserbad zu umgeben, schien mir überflüssig. da ja bei der grossen Wanddicke dieses Cylinders äussere Temperaturschwankungen, die während einer Versuchsreihe nur sehr gering sein konnten, nicht leicht in das Innere des Gefässes dringen konnten. Bei weitem grösser und störender sind die Temperaturunterschiede, welche durch die Zu- und Abnahme des Druckes hervorgerufen werden. Dadurch entstehende Fehler konnte man nur dadurch vermeiden, dass man nach der Erhöhung oder Erniedrigung des Druckes bis zur Ablesung am Galvanometer ungefähr 10-15 Minuten verstreichen liess. Übrigens zeigte das Galvanometer selbst den Rückgang der Temperatur an. Die Druck- und Temperaturerhöhung vermindert den Widerstand, es erfolgt ein starker Ausschlag in diesem Sinne, der aber bald mit der Temperatur zurückzugehen anfängt, bis die Nadel gänzlich zur Ruhe gelangt. Da auch die Beobachtungen bei abnehmendem Drucke gemacht wurden, so konnte ein Fehler durch die beiden entsprechenden Messungen ebenfalls ausgeglichen werden.

Ich will nun noch kurz den Gang einer Versuchsreihe beschreiben. Nachdem auf die oben angeführte Weise die zu untersuchende Lösung hergestellt war, was immer längere Zeit vor Beginn des Versuches geschah, wurde das Widerstandsgefäss gefüllt und in dem Eisencylinder des Druckapparates luftdicht verschraubt. (Die nöthigen Dichtungsleder mussten öfters erneuert werden.) Dann wurde der Strom geschlossen und so lange gewartet, bis die Nadel möglichst zur Ruhe gekommen war. Jetzt konnte erst die Nulleinstellung der Nadel

erfolgen, und es wurde nun die erste Ablesung gemacht, dann nach Einschalten des Zusatzwiderstandes die zweite und eine dritte Ablesung wieder ohne den Zusatzwiderstand. Aus der ersten und dritten Ablesung wurde dann immer das arithmetische Mittel genommen. Nun erhöhte ich den Druck auf 250 Atmosphären und liess wieder 10—15 Minuten verstreichen, bis ich die drei Ablesungen machen konnte. Dasselbe geschah dann bei 500 Atmosphären und bei den absteigenden Drucken. Es muss noch bemerkt werden, dass die Pumpe während einer Zeit von 15 Minuten selbst bei 500 Atmosphären in den meisten Fällen vollkommen dicht hielt.

Aus diesen Ablesungen berechnete ich nach den zu Beginn entwickelten Formeln die Werthe für die Widerstände und die Polarisation, welche ich nun in eine Tabelle zusammengestellt im Folgenden mittheilen will. Die erste Spalte der Tabelle enthält die fortlaufenden Nummern der Versuche, die zweite Spalte die Namen und chemischen Formeln der untersuchten Substanzen, dann ist weiters das specifische Gewicht (s) angegeben, der Procentgehalt (P), worunter die Anzahl der Gewichtstheile wasserfreien Salzes in 100 Gewichtstheilen Lösung verstanden ist, in der fünften Reihe stehen die Drucke (II) und in der sechsten die berechneten Widerstände (W), dann sind die Mittelwerthe derselben für die gleichen Drucke angegeben und weiters die Änderungen des Widerstandes bei einer Druckerhöhung um II Atmosphären, ausgedrückt in Procenten (q) des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären. Die Widerstände sind in Siemens-Einheiten, die Polarisationswerthe in Volt ausgedrückt. Die drei letzten Colonnen enthalten die beobachteten Polarisationswerthe (p), die berechneten Mittelwerthe und die Quotienten aus den Polarisationsänderungen

und den entsprechenden Drucken  $\begin{pmatrix} dp \\ \Pi \end{pmatrix}$ 

					Wide	rstand		Polaris	ation	•		
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	—q	beob- achtet	Mittel- werthe	$rac{dp}{\Pi}$		
	I. Schwefelsäure und Sulfate.											
		1 · 040	5.96	0	415.5	421.3		2.11	2.12			
	ant			250	373 · 7	361.8	14.120/0	2 · 16	2.15	0.00012		
١.	SO T			500	319.3	315.4	25.13	2.13	2 · 15	00		
1	Schwefelsäure H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>				311.5			2 · 17				
	ch			250	350.0			2.14				
	S			0	427 1			2.13				
	0)	1.020	3.03	0	743 5	747.7		1.86	1.80			
	Schwefelsäure H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			250	670.5	663.6	11.24%	1.83	1.83	0.00012		
	wefelsä H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			500	622 · 0	623 · 7	16.57	1 · 83	1.83	00		
2	wef H <sub>2</sub> S			500	625.5			1.83				
1	ch			250	656.8			1.84				
	S			0	752 . 0			1.74	1			
		1.076	7:47	0	1114	1099		1.53	1.56			
	Kupfersulfat Cu SO <sub>4</sub>	i l		250	996	992	9.73%	1.62	1 · 62	0.00024		
	pfersulfa Cu SO4			500	910	914	16.87	1.66	1.65	12		
3	of Def			500	918			1.65				
	Kul			250	989			1.62				
1		ł		0	1084			1.60				
		1.032	3.24	0	3620	3575		1.54	1.54			
	fat			250	3252	3222	9.87%	1.66	1.66	0.00048		
	pfersulf Cu SO <sub>4</sub>	1		500	2996	2998	16 · 14	1.66	1.66	00		
4	ofer Cu (			500	3000			1.66				
	Kupfersulfat Cu SO <sub>4</sub>			250	3192			1.66	1			
				0	3531			1.54				
		1.100	9.88	0	2755	2742		1.08	1.07			
	fat			250	2528	2528	7.80%	1 · 19	1 · 16	0.00036		
5	Eisensulfat Fe SO4			500	2376	2376	13.34	1.24	1.24	32		
	Sise			250	2528			1 · 13	li			
	ш,			0	2729			1.07				
						1000			2.00			
	بد ا	1.049	5.02	950	4863	4832	12.640/	1.00	0.99	0.00099		
	ulfa O			250 500	4189 3714		$13 \cdot 64^{0}/_{0}$ $23 \cdot 10$	1.16	1·07 1·16	0·00032 36		
6	isensulf Fe SO <sub>4</sub>			500 500	3714	3/10	20.10	1.16	1.10	30		
	Eisensulfat Fe SO <sub>4</sub>			$\frac{500}{250}$	4158			1·16 0·99				
	<u></u>		!	250	4802			0.98		•		
_												
			i	- 1					ı l			

					Wider	stand		Polaris	ation	, ,
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	—q	beob- achtet	Mittel- werthe	$\frac{dp}{\Pi}$
		1 · 107	9.79	0	2853	2849		2 · 43	2 · 40	
li	<b>=</b>			250	2276		20.39%	2.50	2 · 47	0.00028
	os Soft			500	2025		28 67	2.55	2.53	24
7	Zinksulfat Zn SO <sub>4</sub>			500	2040			2.51		
	Zi			250	2260			2.44		
				0	2846			2.37		
		1.052	4.97	0	4594	4591		2.30	2.32	
	# 4			250	3487	3505	23 · 66%	2 · 46	2 · 46	0.00056
	SO,			500	3193	3170	30.96	2.51	2.51	20
8	Zinksulfat Zn SO <sub>4</sub>			500	3147			2.51		
	Z			250	3523			2.46		
				0	4589			2.34		
		1.128	9.40	0	2656	2668		1.95	1.94	
	[fat			250	1958	1972	26.08%	1.98	1.96	0.00008
	Nickelsulfat Ni SO <sub>4</sub>			500	1805	1805	32.34	1 99	1.99	12
9	Si S	i		500	1806			2.00		•
	Ž			<b>25</b> 0	1986			1.95		
				0	2680			1.93		
		1.053	4.78	0	4405	4423		2.07	1.99	
	Ifat -			250	3864	3904	11.73%	2.07	2.06	0.00028
10	nsla SO,			500	3697	3712	16.05	2 · 12	2 · 12	24
10	Nickelsulfat Ni SO4			500	3729			2.12		
	Z			250	3944			2.05		
				0	4442			1.91		
	بد	1.080	8.63	0	1613	1594		2.31	2.34	
	Natriumsulfat Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			250	1429	1443	9.470/0	2.38	2 · 38	0.00016
11	triumsul Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			500	1405	1414	11.30	2.40	2.39	04
**	n N Na			500	1424			2.39		
	Na			250	1457			2.38		
_				0	1575			2.37		
	+	1.040	4.39	0	2690	2645		2.46	2.45	
!	ulfa )4			250	2400	2395	9.450/0	2.21	$2 \cdot 50$	0.00020
12	Natriumsulfat Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			500	2328	2328	11.98	2.23	2.23	12
''	triu Na			500	2328			2.23		
	Na			250	2391			2.50		
				0	2600			2.45		
-		1	!	<u> </u>	<u> </u>	·	1	·		
1										:

					Wide	rstand		Polaris	sation			
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	_q	beob- achtet	Mittel- werthe	dp ĪĪ		
-												
	II. Salpetersäure und Nitrate.											
		1.050	8.99	0	2097	2107		2.01	1.97			
1	inre			250	1244	1299	38·35º/ <sub>0</sub>	2.17	2.11	0.00056		
1.	Srs O			500	1036	1020	51.59	2.01	2.06	_ 20		
13	Salpetersäure HNO <sub>3</sub>			500	1005			2 · 11				
1	Salj			250	1354			2.05				
	0,			0	2117			1.93				
		1 · 127	13.30	0	986	956		1.39	1 · 40			
	rat )2			250	871	872	8.780/0	1.45	1 · 44	0.00016		
١.,	Kupfernitrat Cu (NO <sub>3)2</sub>			500	868	859	10.14	1 · 43	1 · 45	04		
14	pfe u(A			500	850			1 · 47				
	Ku C			250	874			1 · 44	1			
				0	926			1 · 42				
		1.064	6.92	0	1586	1518		1.35	1 · 39			
	rat )2			250	1267	1241	18.25%	1 · 46	1 · 48	0.00036		
	Kupfernitrat Cu (NO <sub>3)2</sub>			<b>50</b> 0	1242		19.30	1 · 47	1.50	08		
15	pfe L(N			500	1209		1	1.54				
	Kuj			250	1216			1.51				
		i		0	1450			1.43				
		1.090	11.51	0	1317	1301		0.94	0.99			
	at ()e			250	1036		18.440/0	1 · 29	1.25	0.00104		
	Eisennitrat Feg (NO <sub>3)6</sub>			500	914	906	30.35	1.43	1 · 46	084		
16	sen:			500	898			1 · 49				
	Eis Fe			250	1086			1.21				
				0	1286			1.04				
		1.046	5.89	0	1935	1900		1.03	1.03			
	Eisennitrat Fe <sub>2</sub> (NO <sub>3)6</sub>			250	1727	1731	8.890/0	1.15	1 · 15	0.00048		
	nit O			500	1607	1612	15.05	1.26	1.26	44		
17	sen			500	1617			1 · 26				
	F. Fis			250	1735			1 · 15				
				0	1865			1.03				
-		1 · 131	13.42	0	1368	1367		2.55	2.55			
	75 B			250	1251	1256	8.12%	2 · 67	2.67	0.00048		
	Zinknitrat Zn (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>		Ì	500	1185		13 · 24	2.77	2.77	40		
18	철진			500	1187			2.77				
	Z 2			250	1261			2.67				
	ļ			0	1366			2.55				
_												

	C. 1				Wide			Polaris	ation	,
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	-q	beob- achtet	Mittel- werthe	$rac{dp}{\Pi}$
		1.068	6 99	o	2483	2500		2.46	2.53	
	2 rt			250	2162		12.76%	2.73	2.73	0.00080
	o it			500	2118		15.64	2.73	2.79	. 24
19	Zinknitrat Zn (NO <sub>3)2</sub>			500	2100			2 · 86		
	22 22			250	2200	·		2.73		
}				0	2517			2.60		•
		1.120	13.00	0	1116	1105		1 · 94	1.88	•
	rat			250	987	984	10.95%	2.01	2.00	0.00048
	o ii	İ		500	955	956	13.48	2.01	2.01	04
20	Nickelnitrat Ni (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>			500	957			2.01		
	žz			250	981			2.00		
				0	1094			1.83		
		1.062	6.76	0	1580	1568		1 · 89	1 · 87	
	rat )2			250	1445	1424	9.180/0	1.89	1 · 87	0.00000
21	Nickelnitrat Ni (NO <sub>3)2</sub>	ĺ		500	1306	1303	16.89	1.89	1.89	08
21	i (S			500	1301			1.89		
ł	žz	ļ		250	1404			1.85		
				0	1556			1.85		
	rat	1 · 080	10.51	0	1405	1415		2.56	2.56	
	nit 3)3			250	1246	1181	16.530/0	2.56	2.56	0.00000
22	ig S			500	1090	1091	22.89	2.56	2.56	00
	gnesiumni Mg (NO <sub>3)2</sub>			500	1092			2.56	1 1	
	Magnesiumnitrat Mg (NO <sub>3)2</sub>			250	1116			2.26		
_				0	1426			2.56		
	Magnesiumnitrat Mg (NO <sub>8)3</sub>	1.041	5.47	0	2649	2620		1 · 42	1.42	
	nnit 8)3			250	2333		13.320/0	1.42	1.42	0.00000
23	N Sir			500	2140	2142	18.24	1.42	1 · 42	00
	gnesiumni Mg (NO <sub>8)</sub>			500	2144			1.42		
1	lag N			250	2209			1 · 42		
	<u>~</u>			0	2592			1.42		
l	rat	1.024	5.84	0	1776	1787		2 · 40	2.44	
	Ammonimnitrat NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub>			250	1642	1645	7.940/0	2.50	2.50	0.0002
24	monimnit NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub>			500	1553	1555	12.97	2.54	2.54	16
	OH N			500	1557			2.54		
	Am			250	1648			2.50		
	•			0	1798			2.48		

					Wider	stand		Polaris	ation			
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	-q	beob- achtet	Mittel- werthe	$\frac{dp}{\Pi}$		
	III. Chlorwasserstoffsäure und Chloride.											
		1 • 050	10 · 17					1.40				
	ဉ			0 250	1140 335			1 · 46 1 · 45				
	Säu Cl			500	291		_	1 40				
25	Salzsäure HCl			250	385	_		1.38				
	S			0	1286			1 · 48				
_			10 =0	_								
	<u> </u>	1 206	18.78	0	1351	1313		0.69	0.72			
	lor *			250	1233	1239	5.630/0		0.75	0.00012		
26	Kupferchlorid Cu Cl <sub>2</sub>			500	1197	1204	8.29	0.77	0.76	04		
	ag C			500	1212			0.75				
	Κı			250	1245 1275			0·75 0·75				
				0								
	į	1 .066	7.20	0	2518	2500		0.80	0.80			
	ls s			250 500	2310 2270	2314	7.44%		0.85	0·00020 0·00008		
27	Kupferchlorid Cu Cl <sub>2</sub>			500	2234	2252	9.92	0.80(?)	0.83	0.00008		
	) C			$\frac{300}{250}$	2318			0·87 0·84				
	X			0	2482			0 80				
_		1.122	15.16	$-\frac{0}{0}$	1516	1505		$\frac{0.80}{0.52}$	0.52			
1	<u>.</u>	1.199	13.10	250	1413	1427	5.100/	ľ	0.58	0.00024		
!	lor .16			500	1342	1366	5·18 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> 9·23	0.74	0 . 67	36		
28	ந் இ			500	1391	1000	9.20	0.60	0.	30		
	Eisenchlorid Fe <sub>2</sub> Cl <sub>6</sub>			250	1441			0 56				
	ल			0	1494			0.52				
		1.049	5.81	<u> </u>	2211	2177		${0.52}$	0.59			
1 1	Eisenchlorid Fe <sub>2</sub> Cl <sub>6</sub>			250	1706		20.990/0	I.	0.88	0.00116		
	ы С1 <sub>6</sub>			500	1569		28.54	0.88	0.91	012		
29	ncl es			500	<b>15</b> 43			0.94				
	Sise			250	1735			0.88				
	_			0	2143			0.67				
		1 177	19.07	-0	1433	1442		2.08	2.06			
	Pid .			250	1320	1329	7.83%	1	2.04	-0.00008		
	llo⊒ Cl₃			500	1263		12.26	2.05	2.05	+0.00004		
<b>3</b> 0	ıkci Zn			500	1268			2.05				
	Zinkchlorid Zn Cl <sub>p</sub>			250	1338			2 04				
				0	1451			2.04				
							1					

7	<u> </u>	<del></del>		1						
	Sub-	:			Wider	stand		Polaris		dn
Nr.	stanz	S	P	II	te b	Mittel- werthe	<i>−q</i>	ob- itet	Mittel- werthe	<i>др</i> П
					beob- achtet	Mittel		beob- achtet	Mittel- werthe	
		1.000	7.01		1000	100-		0.00	0.00	
	75	1.066	7.31	0 250	1998 1594	1995	21.55%	2.08	2.08	-0.00020
	Zinkchlorid Zn Cl <sub>2</sub>			500	1420		28.82	1.98	1.98	-0.00020
31	Sch Ch			500	1420	1450	20 02	1.98	. 50	-0 00012
	Zinl			250	1536			2.00		
	"			0	1992			2.05		
		1.200	18 · 16	$-{0}$	1120	1116		1 · 55	1.56	
-	rid			250	1057	1060	5.02%	1.60	1 · 60	0.00016
	육종			500	1031	1031	7.62	1.61	1.61	04
32	Nickelchlorid Ni Cl <sub>2</sub>			500	_					
	lick			250	1063			1.60		
	-			0	1113			1.58		
		1.000	7.00		0005				1.70	
	orio	1.069	7.00		2007	2025	5 - 000 ·	1.69	1 . 72	0.00010
33	Nickelchlorid Ni Cl <sub>2</sub>			250 500	1897 1887	1916 1887	5·38 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> 6·81	1 77	1 73	0·00012 -0·00008
33	N. Ke			250	1935	1007	0.91	1.73	1 73	-0.00008
	Nic			0	2043			1.75		
1	١.	1 100	13 · 27		1060	1020		1.81	1 · 89	
1	F G E			250	934		8.53%	1.86	1.91	0 00008
34	Magnesium chlorid Mg Cl <sub>2</sub>			500	917	919	9.90	1.86	1 .87	-0.00012
	agr ch M			500	921			1.89		
	Σ			250	932 980			1.96		
				0				1.97		
	يه [	1.038	5.09	0	2064	2026	1.5.040	2.00	2.07	0.00000
	Magnesium chlorid Mg Cl <sub>2</sub>			250 560	1755 1538		$15.94^{0}_{-0}$	2·13 2·13	2·12 2·13	0·00020 04
35	ignesiu chlorid Mg Cl <sub>3</sub>			500		1998	±4:08	2.13	2.13	0-1
	A cl			250	1652			2 13		
1	2			0	1988			2.15		
_	i				1000			1 2 .0		
IV. Essigsäure, Acetate und Oxalsäure.										
		1.014	10.00	0	915	918		2.09	2 · 10	
	e ~			250	758		15.14%		2.15	0 00020
0.0	Essigsäure C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>			500	717		22.33	2 · 15	2.16	04
36	sig 24H			<b>5</b> 00	709			2.17		
	E			250	801			2.15		
				0	921			2.11		
1				-						

	C 1				Wide	stand		Polaris	ation	,
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel- werthe	—q	beob- achtet	Mittel- werthe	<i>dp</i> ∏
		1.005	4.00			1204		2 · 27	2 · 29	
	2 ne			250	1040	1085	9.880/0	2.39	2 · 39	0.00040
37	sigsäur 2H402			500		998	17.10	2 · 39	2 · 39	00
0,	Essigsäure C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>			500	1001			2.39		
	山山			<b>25</b> 0	1131			2.39		
				0	1273			2 · 32		
	21	1.028	5.02	0	2770	2695		0.80	1.08	
	etat O_i)			250	<b>23</b> 09	2312	$14 \cdot 210/_{0}$	1.35	1.35	0.00108
00	H <sub>3</sub> C			500	2107	2107	21.81	1.51	1.51	064
38	رگا (گ			500	2108			1.51		
	Kupferacetat (Cu(C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>			<b>2</b> 50	2316			1.35	1	
	- S			0	2620			1 · 26		
		1.115	15.25		4017	4100		2.37	2.31	
	Zinkacetat Zn(C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>			250	3742	3756	8.39%	2.41	2.41	0.00040
	L <sub>s</sub> O <sub>s</sub>			500			15 · 19	2.45	2.45	16
39	C.F			500	3487			2.45		ļ
	Zir n			250	3770			2.41	1	
	2		•	0	4183			2.25	1	
		1.050	6.10	<del>-</del> 0	1213	1209		2 · 22	2.23	
	Zinkacetat Zn(C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>			250			10.330/0	2.29	2.26	0.00012
}	130 E			500			18.52	2.36	2.36	40
40	ka			500	986	•••		2.36		
	Zin n (6			250	1098			2 · 24		
	2			0	1205			2.24	1	
		1.043	5.88	<del>-</del> 0	1844	1820		1 67	1.67	
	Nickelacetat Ni (C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>	1 040	0 00	250	1690	1683	7.520/0	1.80	1.80	0.00052
1	og Sog			500	1563	1564		1.91	1.91	44
41	ela 3H			500		1004	14 05	1.91	" "	11
	<b>ig</b> (5)		Ì	250	1676			1.80		
	ZZ			0	1796			1.67		
		0.000	1.00		$\frac{1100}{294.5}$	200.1		2.45	${2}$ 45	
	ئ خ	0.008	1.00			1	0.150	ł	1 1	0.00000
	1 O.				290.0	1	2.150/0		2.45	
42	Magnesium- acetat Mg(C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>		ı		287·1 288·0	201.2	? <b>4</b> ·83	2.45	2.45	00
	lag a(C				301.3	İ		1		
					301.3		ĺ	2.45		
				ļ	208.1			2 43	-	
			1	i						
1	ļ		1						!	
1	i	İ	ŀ	1	İ	1	i	l	1 1	

					Wider	stand		Polaris	ation	_
Nr.	Sub- stanz	s	P	П	beob- achtet	Mittel werthe	— <i>q</i>	beob- achtet	Mittel- werthe	$rac{dp}{\Pi}$
		1.035	7.14	0	1495	1538		1.31	1.31	
	ē _			250	1303	1329	13.59%	1.31	1 · 31	0.00000
ا ا	og O			500	1165	1166	24 · 18	1.31	1.31	00
43	Oxalsäure C <sub>9</sub> H <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	1		500	1167			1.31		
	ô			250	1355			1 · 31		
				0	1581			1.31		
		1.014	2.86	0	2584	2586		1.36	1 · 36	
	5 _			250	2056	2094	19.03%	1.36	1 . 36	0.00000
	Oxalsäure C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> O <sub>4</sub>			500	1900	1898	26.60	1.26	1 · 26	0.00040
44	sals Y <sub>2</sub> H			500	1897			1 · 26	•	
	õ			250	2132			1.36		
				0	2588			1 · 36		
					1				1	

In diesen Tabellen sind die Widerstandsänderungen in Procenten des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären angegeben; schon aus diesen Zahlen ersieht man, dass, wenn man die Drucke als Abscissen und als zugehörige Ordinaten die Widerstände aufträgt, die Verbindungslinien der erhaltenen Punkte nicht linear verlaufen werden, sondern dass die Abhängigkeit des Widerstandes vom Druck durch eine Gleichung  $w=w_0+ax+bx^2=w_0(1+\alpha x+\beta x^2)$  ausgedrückt werden muss. Ich habe aus den drei Mittelwerthen die einzelnen Coëfficienten nach diesen Gleichungen berechnet und will dieselben für die verschiedenen Substanzen in der folgenden Tabelle angeben.

Nr.	Substanz	a	ь	α	β
1	Schwefelsäure	_0.263	+0.000103	-0 0006242	+0.0000002445
2	Schwefelsäure	0.424	0353	05670	04721
3	Kupfersulfat	0 · 482	0224	04386	02038
4	Kupfersulfat	1.840	1370	05146	03831
5	Eisensulfat	0.980	0496	03574	01809
6	Eisensulfat	3.046	1624	06302	03360
7	Zinksulfat	3.019	2771	10594	09724
8	Zinksulfat	5.852	6017	12744	13103
9	Nickelsulfat	3 844	4240	14407	15892

Nr.	Substanz	а	ь	α	β
10	Nickelsulfat	<b>—2·7</b> 35	+0.002629	_0·0006183	+0.0000005943
11	Natriumsulfat	0.849	0980	05326	06148
12	Natriumsulfat	1 · 362	1458	05153	05512
13	Salpetersäure	4 290	4232	20360	20085
14	Kupfernitrat	0.474	0560	1	
15	Kupfernitrat	1.627	2084	10718	13730
16	Eisennitrat	1 · 133	0684	08705	05255
17	Eisennitrat	0.766	0400	04084	02105
18	Zinknitrat	0.526	0328	03847	02399
19	Zinknitrat	1 · 770	1976	07080	07904
20	Nickelnitrat	0.670	0744	06063	06733
21	Nickelnitrat	0.620	0184	03954	01173
22	Magnesiumnitrat	1 · 227	1156	08668	08166
23	Magnesiumnitrat	1.839	1764	07017	06731
24	Ammoniumnitrat	0.673	0416	03766	02328
25	Salzsäure				
26	Kupferchlorid	0.375	0316	02856	02407
27	Kupferchlorid	0 992	0992	03968	03968
28	Eisenchlorid	0.347	0140	02305	00909
29	Eisenchlorid	2.410	2336	11070	10730
30	Zinkchlorid	0.551	0396	03821	02746
31	Zinkchlorid	2.290	2280	11478	11428
32	Nickelchlorid	0.281	0220	02517	01970
33	Nickelchlorid	0.596	0640	02943	03160
34	Magnesium- chlorid	0.494	0584	04843	05725
35	Magnesium- chlorid	1.604	1256	07917	06199
36	Essigsäure	0.698	0576	07603	06274
37	Essigsäure	0.540	0256	04483	02125
38	Kupferacetat	1.885	1420	06994	05269
39	Zinkacetat	1.506	0520	03673	01268
40	Zinkacetat	0.548	0200	04532	01654
41	Nickelacetat	0.584	0144	03209	00791
42	Magnesiumacetat	0.023	-0.000013	00761	- 00430
43	Oxalsäure		+0.000368	06034	+ 02392
44	Oxalsäure	2.561	2372	09903	09172
1 1	I				l .

Fasst man die erhaltenen Beobachtungsresultate zusammen, so lässt sich vor Allem feststellen, dass bei allen untersuchten Flüssigkeiten ohne Ausnahme mit zunehmendem Drucke eine

Verminderung des Widerstandes eintrat. Wie die Procentzahlen und ebenso die berechneten Coëfficienten ergeben, geht die Abnahme des Widerstandes nicht dem Drucke proportional vor sich, sondern wir finden, dass die Änderungen desselben zwischen 0 und 250 Atmosphären immer grösser sind als zwischen 250 und 500 Atmosphären. Eine Ausnahme davon scheint nur das Magnesiumacetat zu machen, welches bei höheren Drucken eine stärkere Änderung zeigte als bei niederen; jedoch kann ich gerade den Messungen dieser Substanz keine Genauigkeit zusprechen; sie gehört zu jenen Substanzen, bei welchen, wie schon früher erwähnt wurde, ein Stillstehen der Nadel nicht erwartet werden konnte. Ich will hier auch die übrigen Flüssigkeiten angeben, deren Messungen aus demselben Grunde keinen Anspruch auf Genauigkeit machen können: es sind dies die Salpeter- und Chlorwasserstoffsäure und das Natriumsulfat. Bei letzterem wirkte besonders die Bildung von NaOH störend, wesshalb nachher an Stelle der Natrium- die Magnesiumverbindungen untersucht wurden. Bei der Salzsäure habe ich nur die beobachteten Werthe angegeben. Man ersieht daraus, dass die anfängliche Änderung sehr bedeutend ist, die Änderung zwischen 250 und 500 Atmosphären dagegen sehr gering; eine Angabe der Procentzahlen und Coëfficienten schien mir überflüssig. Eine grössere Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit haben wohl die Messungen der Salpetersäure; auch sie zeigen grössere Änderungen des Widerstandes als alle anderen Substanzen. Im Allgemeinen kann ich sagen, dass die Elektrolyte, bei welchen an der Kathode eine Gasentwicklung stattfand, wie dies eben bei den genannten Substanzen und auch bei den anderen Säuren der Fall war. schwieriger zu untersuchen waren. Die Ursache hievon liegt wohl in complicirten secundären chemischen Vorgängen, die den Werth der Polarisation fortwährend ändern und dadurch ein Schwanken der Galvanometernadel hervorrufen.

Was den Einfluss der Concentration der Lösung betrifft, so haben die gemachten Beobachtungen kein einheitliches Resultat ergeben. Es zeigte sich nämlich, dass nur bei einem Theil, und zwar bei der Mehrzahl der untersuchten Flüssigkeiten die weniger concentrirte Lösung bei einer Druckerhöhung um 500 Atmosphären eine stärkere Abnahme des Leitungswiderstandes aufwies. Dieses Ergebniss hatte auch Fink bei den drei Substanzen gefunden, die er untersucht hat, nämlich bei der Salzsäure, dem Chlornatrium und dem Zinksulfat.

Ich habe zwar von diesen nur das letztere bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet, aber ich glaube, meine weiteren Resultate lassen sich mit diesen theilweise ganz gut in Zusammenhang bringen.

Es hat sich nämlich ergeben, dass alle vier untersuchten Zinksalze diese Eigenschaft besitzen, ausserdem sämmtliche Chloride, nur mit Ausnahme des Chlornickels; aber auch dieses zeigte zwischen 0 und 250 Atmosphären in geringerer Concentration eine stärkere Änderung des Widerstandes, erst über 250 Atmosphären trat das Umgekehrte ein. Bei den anderen Substanzen kann eine gewisse Regelmässigkeit in ihrem Verhalten nicht gefunden werden; von den Kupfersalzen z. B. verhielten sich nur das Nitrat und Chlorid nach der obigen Regel, das Sulfat dagegen nur bis zu 250 Atmosphären. Bei höheren Drucken nahm der Widerstand der concentrirteren Lösung stärker ab als der der weniger concentrirten.

Ich muss hier noch hervorheben, dass ich im Allgemeinen bedeutend grössere Werthe für die Widerstandsänderungen erhielt als Fink. Die grössten von Fink gefundenen Werthe von q betrugen nicht ganz  $7^0/_0$  (für  $\mathrm{ZnSO_4}$ ), während ich für diese Substanz eine Abnahme von  $30.96^0/_0$  fand. Andere Flüssigkeiten ergaben noch grössere Werthe. Den kleinsten Werth von q erhielt ich beim Chlornickel, dessen Widerstandsänderung für 500 Atmosphären nur  $6.81^0/_0$  betrug.

Wenn wir jetzt die Resultate, die sich aus den Polarisationsbeobachtungen ergeben haben, ins Auge fassen, so finden wir hier eine noch grössere Unregelmässigkeit in dem Verhalten der einzelnen Substanzen wie bei den Widerstandsmessungen. Am wichtigsten ist daher das allgemeine Ergebniss dieser Beobachtungen, dass nämlich eine Druckänderung auch eine Änderung der Polarisation zur Folge hat. Die vorhandenen Unregelmässigkeiten sind wohl erklärlich; denn abgesehen davon, dass Polarisationsmessungen

überhaupt schwer auszuführen sind (besonders bei einigen dieser Substanzen), so haben wir es doch hier in den meisten Fällen mit sehr geringen Änderungen der Polarisationswerthe zu thun, deren Bestimmung auch nur einen geringen Grad von Genauigkeit beanspruchen kann. Ja es ist wahrscheinlich, dass bei einigen Flüssigkeiten, die gar keine Änderung der Werthe zeigten, doch solche vorhanden waren, die sich jedoch infolge ihrer Kleinheit der Beobachtung am Galvanometer entzogen haben.

Wenn man die einzelnen beobachteten Polarisationswerthe betrachtet, so findet man, dass mit Ausnahme weniger Flüssigkeiten immer ein Steigen der Polarisation mit dem Drucke stattfindet. Ein regelmässiges Sinken wurde nur beim Zinkchlorid und bei der verdünnteren Oxalsäure bemerkt, ausserdem bei den ungenauen Beobachtungen der Salzsäure. Bei der weniger concentrirten Schwefelsäure ist ebenfalls ein Fallen der Polarisation zu verzeichnen, welches sich aber bei der darauffolgenden Druckerniedrigung fortsetzt. Das Entgegengesetzte davon trat beim Magnesiumchlorid ein: Die Werthe stiegen sowohl bei der Zunahme, als auch bei der Abnahme des Druckes continuirlich. Das Magnesiumnitrat zeigte gar keine Änderung, ebenso das Magnesiumacetat und die concentrirtere Oxalsäure. Bei einigen Flüssigkeiten wieder änderten sich die Polarisationswerthe nur bis 250 Atmosphären, weiterhin nicht mehr; im Allgemeinen kann gesagt werden, dass die Änderungen mit zunehmenden Drucken kleiner wurden; bei einigen Substanzen werden sie Null, bei einigen sogar negativ.

Die grössten Unregelmässigkeiten in den Änderungen der Polarisation wurden bei der Salpetersäure beobachtet. Es ist dies eine Substanz, deren elektrolytische Zersetzung von einer Reihe secundärer Reactionen begleitet ist, die vielleicht im Laufe der Zeit oder bei der Druckänderung wechseln und daher unregelmässige Änderungen der Polarisation hervorrufen. Dies wären die auffallendsten Erscheinungen, die sich bei den Beobachtungen ergeben haben.

Wenn wir die Einflüsse, welche die Temperatur und der Druck auf die Leitungsfähigkeit von Flüssigkeiten und die Polarisation ausüben, mit einander vergleichen, so lässt sich Folgendes sagen: Sowohl Temperatur als Druck bewirken eine Vergrösserung der Leitungsfähigkeit, dagegen wirken sie beide in entgegengesetzter Weise auf die galvanische Polarisation. Wie die Messungen von Herrn Fr. Exner ergeben haben, hat eine Temperaturerhöhung ein Sinken der Polarisation zur Folge, während aus den vorliegenden Untersuchungen im Allgemeinen eine Zunahme der Polarisation mit dem Drucke ersichtlich ist.

Im ersteren Falle wurde die Erscheinung auf die im Elektrolyten vor sich gehenden chemischen Reactionen zurückgeführt, und auch im letzteren Falle ist dies wohl möglich. Aus den Beobachtungen lässt sich unmittelbar schliessen, dass der Wärmewerth, welcher der Rückbildung des zersetzten Elektrolyten entspricht, mit zunehmendem Drucke eine Änderung erfahren muss, denn durch die Grösse desselben ist ja die elektromotorische Kraft der Polarisation gegeben. Schon unter gewöhnlichen Umständen werden für manche Substanzen grössere Polarisationswerthe gefunden als die thermischen Werthe der einfachen chemischen Reactionen ergeben; dieselben lassen sich dann immer auf secundäre chemische Vorgänge zurückführen, bei welchen ein Wärmeverbrauch stattfindet. Ein solcher secundärer Process ist z. B. die Bildung von Wasserstoffsuperoxyd oder anderen Superoxyden.

Zum Schlusse will ich noch einen Versuch erwähnen, den ich mit einer vierprocentigen alkoholischen Lösung von Ammoniumnitrat ausgeführt habe. Die Beobachtungen waren aber infolge des stetigen Wachsens des Ausschlages der Nadel so schwierig, dass ich gar keine Zahlenwerthe angeben kann. Es liess sich nur feststellen, dass auch diese Lösung eine Änderung des Widerstandes in demselben Sinne, also eine Abnahme, zeigte. Dieselbe betrug bei einer Druckerhöhung um 500 Atmosphären ungefähr  $5^{\,0}/_{\!0}$ , wie die beiläufigen Messungen ergeben haben. Eine wässerige Lösung desselben Salzes, die ich zum Vergleich untersuchte, verhielt sich ganz regelmässig, wie aus der Tabelle (Nr. 24) zu ersehen ist.

## Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz

von

## C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

§. 1. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von W. Wien i fand ich die Angabe, dass nach Maxwell's Lichttheorie eine ebene Ätherwelle auf die getroffene Flächeneinheit, welche sie zurückwirft, einen Druck ausübe, gleich dem doppelten Betrage der Energie in der Volumeinheit der einfallenden Welle. Dies gibt mir Veranlassung, auf die in früheren Publicationen erwähnte Vorstellung zurückzukommen, welche ich mir vom Wärmezustande der Körper überhaupt und insbesondere der Gase gebildet habe.

Ich nehme an, ein Körper bestehe aus unzähligen Atomen, welche durch Leere, d. h. nur mit Äther erfüllte Zwischenräume von einander getrennt sind. Ein Atom ist kein blosser Punkt, sondern nimmt einen Raum ein und hat eine gewisse Gestalt und innere Structur; dasselbe ist aus kleineren Theilen zusammengefügt, unterscheidet sich aber von einem Körper dadurch, dass es dem Äther gegenüber sich als ein Continuum verhält und nur an der Aussenfläche mit diesem in Contact steht. Ein Körper, dessen Atome unter sich gleich sind, ist ein Grundstoff. Die Atome können im Allgemeinen Licht- und Wärmestrahlen durch ihre Substanz hindurch, ähnlich wie es der Äther thut, mit einer durch ihre innere Structur bedingten Geschwindigkeit fortpflanzen; für den weitaus grössten Theil der bei gewöhnlicher Temperatur zwischen den Körpern aus-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wiedemann's Annalen, Bd. 52, S. 147. Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a.

getauschten Wärmestrahlen aber sind die Atome undurchlässig oder opak, d. h. sie reflectiren dieselben an ihren Aussenflächen fast vollständig.

Indem die in einen Körper eindringenden Wärmestrahlen durch zahllose Reflexionen an den Aussenflächen der getroffenen Atome nach allen Richtungen in demselben diffundirt werden, muss er in seinem Volumen beständig eine gewisse, zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfene und hiedurch bis zu einem entsprechenden Betrage angesammelte Strahlenmenge enthalten, welche nach meiner Anschauung den wesentlichen Theil seiner Wärmemenge ausmacht.

Denkt man sich einen Körper in einem leeren Raume befindlich und gleichmässig von allen Seiten her Strahlen empfangend, für welche seine Atome opak sind, dann muss derselbe, sobald er bereits durch und durch mit Strahlen gesättigt ist, fortwährend ebensoviel davon nach aussen abgeben, als er gleichzeitig von aussen empfängt; er hat in diesem Falle eine constante Temperatur. Hienach wird die absolute Temperatur des Körpers durch die Strahlenmenge gemessen, welche in einer bestimmten Zeit normal durch die Einheit seiner Grenzfläche aus- und eintritt und welche daher auch in seinem Volumen in der gleichen Zeit normal durch jede darin angenommene Flächeneinheit gehen muss.

§. 2. Bei einer gegebenen Temperatur wird nach dem Gesagten die Volumeinheit eines Körpers eine desto grössere Strahlenmenge enthalten, je kleiner die Diffusionsgeschwindigkeit der dieselbe ausmachenden Strahlen ist. Diese Geschwindigkeit ist aber, nach einer der kinetischen Gastheorie entlehnten Bezeichnung, der mittleren Weglänge der hin- und hergeworfenen Strahlen proportional. Bedeutet r den mittleren Abstand der unter sich gleichen Atome und e die Aussenfläche eines solchen, so ist, die Atome als kugelförmig gedacht, die mittlere Weglänge und also die Diffusionsgeschwindigkeit der Strahlen proportional mit  $\frac{r^3}{e}$ , folglich die in der Volumeinheit angesammelte Strahlenmenge proportional mit  $\frac{e}{r^3}$ , und man kann für die absolute Temperatur T diese Menge

$$=\frac{CeT}{r^3}$$

setzen, wo C ein constanter Factor ist. Das Volumen v muss dann eine Strahlenmenge

$$=\frac{CevT}{r^3}$$

oder, wenn n die Zahl der Atome in v und daher  $nr^3 = v$  ist,

$$= CneT$$

enthalten. Entspricht das Volumen v der Gewichtseinheit, so stellt Cne die specifische Strahlenwärme des bezüglichen Stoffes vor; bezeichnen wir diese mit c, so haben wir die Gleichung

$$c = Cne$$

Ist c' die specifische Strahlenwärme eines zweiten Stoffes und haben n' und e' die entsprechende Bedeutung, so besteht die Proportion

$$c:c'=ne:n'e',$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie die Summen der Aussenflächen der in der Gewichtseinheit vorhandenen Atome.

Hat ein Atom des einen Stoffes die Masse m, ein Atom des anderen die Masse m', so ist nm = n'm' und daher

$$c:c'=\frac{e}{m}:\frac{e'}{m'}.$$

Nimmt man von beiden Stoffen solche Gewichtsmengen a und a', welche gleich viel Atomaussenfläche, also bei derselben Temperatur auch gleich viel Strahlenwärme enthalten und insofern thermisch äquivalent sind, so hat man

$$a:a'=\frac{m}{e}:\frac{m'}{e'}$$

und hiemit ergibt sich nach dem Vorigen:

$$c:c'=a':a,$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie umgekehrt ihre thermischen Äquivalentgewichte. Es ist daher ac = a'c',

d. h. das Product aus dem thermischen Äquivalentgewichte und der specifischen Strahlenwärme hat für jeden den gleichen Stoff Werth.

§. 3. Wenn ein Wärmestrahl, wie Maxwell annimmt und andere Physiker für wahrscheinlich zu halten geneigt scheinen, an einem getroffenen und ihn reflectirenden Flächenstücke einen seiner Intensität proportionalen Druck erzeugt, so müssen die Atome eines warmen Körpers vermöge der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge einen ihrer Intensität entsprechenden Druck auf einander ausüben, gerade so, als wären sie mit einer Repulsivkraft begabt. In einem gewöhnlichen Gase sind dann die Atome nicht mehr, wie man in der kinetischen Theorie postulirt, vollkommen frei beweglich; es erscheint denkbar, dass sie, anstatt wie hin- und hergeworfene elastische Kugeln unmittelbar auf einander oder auf die einschliessenden Wände zu stossen, unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Bestrahlung in mittleren Abständen von einander sich zu erhalten suchen, ähnlich wie man dies für die Atome flüssiger und fester Körper auf Grund der gangbaren Hypothesen allgemein annimmt.

Einen von Wärmestrahlen ausgeübten Druck kann man sich nun in der Art erzeugt denken, dass man sich vorstellt, sie seien die Wege sehr kleiner, von warmen Körpern ausgesendeter Theilchen, welche mit grosser constanter Geschwindigkeit geradlinig fortfliegen, bis sie auf ein Hinderniss treffen, von dem sie zurückprallen. Die in einem Körper bei der Temperatur T angesammelte Strahlenmenge cT ist dann nichts Anderes, als die Summe der lebendigen Kräfte solcher hypothetisch zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfenen Theilchen. Nach den Grundsätzen der kinetischen Gastheorie muss in diesem Falle, wenn v das Körpervolumen, x den darin von der Substanz der Atome erfüllten Raum, also v-x die Summe der leeren Zwischenräume und p den Strahlendruck bedeutet, die Gleichung

$$p(v-x) = \frac{2}{3} cT$$

bestehen; denkt man sich aber die Strahlenmenge cT in Wärmeeinheiten ausgedrückt und ist A der Verwandlungsfactor, so hat man

$$p(v-x) = \frac{2}{3} A c T.$$

Für die gewöhnlichen Gase kann der von der Substanz der Atome eingenommene Raum x gegen das Gesammtvolumen v als sehr klein vernachlässigt werden; für solche erhält man daher

$$pv = \frac{2}{3} A c T$$

und sonach lässt sich, wenn v die Gewichtseinheit enthält, die im gewöhnlichen Wärmemass ausgedrückte specifische Strahlenwärme auf die einfachste Weise aus der Formel

$$c = \frac{3pv}{2AT}$$

berechnen. Setzt man A=426 und T=273, so folgt für die atmosphärische Luft mit den bekannten Werthen von p und v:

$$c = 0.1030$$
:

wir werden von diesem Resultate in der Folge Gebrauch machen.

Unter dem Einflusse der gegenseitigen Bestrahlung können die Atome eines Körpers natürlich nicht in absoluter Ruhe sein, sondern müssen sich gleichfalls bewegen und daher eine entsprechende Summe lebendiger Kräfte besitzen; diese wird, wenn n die Zahl der Atome der Gewichtseinheit, m die Masse und  $\gamma^2$  das maximale Geschwindigkeitsquadrat eines Atoms bedeutet, durch

$$\frac{n\,m\,\gamma^2}{2} = \frac{\gamma^2}{2}g$$

ausgedrückt, wo g die Beschleunigung der Schwere und folglich nmg = 1 ist.

Die Gesammtwärme w eines Körpers wird nach dem Gesagten neben seiner Strahlenwärme cT noch das thermische

Äquivalent der lebendigen Kräfte seiner Atome umfassen, und es ergibt sich daher die Gleichung<sup>1</sup>

$$w = cT + \frac{nm\gamma^2}{2A}.$$

Für ein ideales Gas kann man, wenn s dessen specifische Wärme bei constantem Volumen ist,

$$w = sT$$

setzen. Hiemit erhält man

$$s = c + \frac{nm\gamma^2}{2AT}$$

oder, wenn man für c den oben gefundenen Werth einsetzt:

$$s = \frac{3 pv + nm\gamma^2}{2 AT}.$$

Die specifische Wärme bei constantem Drucke ist für ein solches Gas

$$= s + \frac{pv}{AT};$$

bezeichnet k das Verhältniss beider specifischen Wärmen, so wird demnach:

$$k = \frac{5 pv + nm\gamma^2}{3 pv + nm\gamma^2}.$$

Für Luft, Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff ist mit grosser und schwerlich zufälliger Annäherung

<sup>1</sup> Da die Atome ohne Zweifel nicht absolut starr sind, sondern unter der Einwirkung der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge sich im Zustande einer inneren Erschütterung befinden, so müssen sie aus diesem Grunde eine absorbirte Summe lebendiger Kräfte in sich enthalten; diese scheint aber nach Allem immer sehr klein zu sein und ist in obiger Gleichung ausser Betracht gelassen. Übrigens ist anzunehmen, dass die Atome vermöge jener inneren Erschütterung ihrer Substanz selbständig Strahlen aussenden, also ein eigenes Emissionsvermögen besitzen, und es liegt dann nahe, zwischen dem eigenthümlichen Licht- und Wärmespectrum jedes Stoffes und der besonderen inneren Structur seiner Atome einen ursächlichen Zusammenhang zu vermuthen.

$$k = 1.4 = \frac{7}{5}$$
,

und mit diesem Werthe ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{n\,m\,\gamma^2}{2} = pv;$$

der Druck p ist also für die genannten Gase gleichbedeutend mit der Dichte ihrer kinetischen Energie, und man hat für dieselben die einfachen Ausdrücke

$$w = cT + \frac{pv}{A} = \frac{5pv}{2A},$$

$$s = c + \frac{pv}{AT} = \frac{5pv}{2AT},$$

und zur Bestimmung ihrer Atomgeschwindigkeit folgt nach dem Vorigen:

$$\gamma^2 = 2 gp v$$
.

Dass der Druck p eines idealen Gases identisch sei mit der Dichte seiner kinetischen Energie, erscheint mir bei der zu Grunde liegenden Anschauung als nothwendig. Wenn sie im Wesen richtig ist, kann das Verhältniss k für ein unmittelbar aus Atomen in dem oben bezeichneten Sinne gebildetes ideales Gas keinen anderen Werth als 1·4 haben, und es muss dann

$$\frac{nm\gamma^2}{2}=0,$$

ein Resultat, welches sich von selbst ausschliesst.

 $<sup>^1</sup>$  Für den Quecksilberdampf haben zwar Kundt und Warburg durch Schallversuche  $k=\frac{5}{3}$  gefunden, und man hat darin einen glänzenden Beweis der Richtigkeit der kinetischen Theorie erbicken zu können geglaubt. Allein diese Theorie verlangt bei diesem Werthe den Zustand eines idealen Gases, und als ein solches kann man einen schon ganz oder nahe gesättigten Dampf nicht ohne Beweis ansehen. Eine nahe Befolgung des Mariotte'schen Gesetzes ist in dieser Hinsicht für sich allein nicht entscheidend. Würde man in obiger Gleichung für k den Werth  $\frac{5}{3}$  setzen, so ergäbe sich die kinetische Energie

die Constitution der vorhin genannten Gase jener Bedingung wirklich entsprechen. Wir werden eine Bestätigung dessen weiterhin in ihrer specifischen Wärme finden.

§. 4. Im Bisherigen war vorausgesetzt, dass die einen Körper constituirenden, durch leere Zwischenräume getrennten Partikeln eben schon seine Atome seien, und dies dürfte für die freien Grundstoffe im Aligemeinen zutreffen. Es ist aber auch und insbesondere bei Gasen der Fall denkbar, dass die nächsten constituirenden Bestandtheile eines Körpervolumens keine Atome, sondern selbst noch kleine Körperchen sind und als solche nicht nur an ihrer äusseren Begrenzung, sondern auch in ihrem Inneren dem Äther Berührungspunkte und also den eindringenden Strahlen Angriffspunkte darbieten. Derartige kleine Körperchen mögen Molekeln, die aus solchen aufgebauten Körper thermisch zusammengesetzte und dagegen jene, welche unmittelbar aus Atomen gebildet sind, thermisch einfache heissen.

Nach dem Gesagten hat jede Molekel eine bestrahlte Aussenfläche und eine Summe bestrahlter Innenflächen. Bezeichnen wir für einen Körper, dessen Temperatur T sei, mit cT die zwischen den Aussenflächen und mit  $c_0T$  die zwischen den Innenflächen seiner Molekeln hin- und hergeworfene Strahlenmenge, so enthält er im Ganzen eine Strahlenmenge

$$=(c+c_0)T$$

und  $c+c_0$  ist seine specifische Strahlenwärme.

Ist der gedachte Körper ein Gas und kann man dasselbe vermöge der gegenseitigen Abstände seiner Molekeln als ein ideales betrachten, so ist nach dem Vorigen die kinetische Energie der als Ganze bewegten Molekeln = pv und daher die Gesammtwärme des Gases

$$w = (c + c_0)T + \frac{pv}{A},$$

wobei angenommen ist, dass die Summe der lebendigen Kräfte der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln als unbedeutend zu vernachlässigen sei. Diese Annahme erscheint als zulässig, weil in gegenwärtiger Hypothese von heftigen Zusammenstössen der Molekeln ohnehin nicht die Rede sein kann.

Demnach ist jetzt die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen

$$s = c + c_0 + \frac{pv}{AT}$$

und das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen

$$k = \frac{A(c+c_0)+2pv}{A(c+c_0)+pv};$$

setzt man hier der Bedeutung von c gemäss wieder

$$c = \frac{3 pv}{2 AT},$$

so ergibt sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$k = \frac{7+3 \frac{c_0}{c}}{5+3 \frac{c_0}{c}},$$

und sonach kann man, wenn k bekannt ist, den Werth des Quotienten

$$\frac{c_0}{c} = \frac{7-5k}{3(k-1)},$$

nämlich das Verhältniss der Summe der Aussenflächen zur Summe der Innenflächen aller Molekeln des Gases, folglich, wenn sie unter sich gleich sind, für eine Molekel bestimmen.

Zunächst möge hier die folgende Bemerkung Platz finden. Wenn ein ideales Gas unmittelbar aus Atomen besteht, so darf man erwarten, dass seine specifische Wärme und daher auch k von der Temperatur unabhängig sei. Dies haben die Versuche Regnault's und anderer Physiker für die oben genannten Gase, bei welchen  $k=\frac{7}{5}$  und  $c_0=0$  ist, in der That ergeben

Ist hingegen das Gas thermisch zusammengesetzt, d. h. besteht es aus Molekeln, die man als kleine feste Körperchen ansehen kann, so sind die Atome innerhalb einer Molekel

gegenseitig bewegt und insofern im Besitze einer Summe lebendiger Kräfte, welche vorhin vernachlässigt wurde; dieselbe ist aber nicht nothwendig verschwindend klein und wird jedenfalls mit der Temperatur zunehmen, die specifische Wärme und k werden daher nicht völlig constant, sondern mehr oder weniger mit der Temperatur veränderlich sein. Dies ist der Erfahrung gemäss bei Gasen, für welche k bedeutend kleiner

als  $\frac{7}{5}$  und folglich  $c_0$  nicht Null ist, wirklich der Fall.

§. 5. Bezeichnet man für zwei thermisch zusammengesetzte Körper, analog wie für einfache, als thermisch äquivalent solche Gewichtsmengen a und a', in welchen die Summe der Aussenflächen der Molekeln gleich gross ist, so besteht für dieselben, wie für thermisch einfache Körper, die bereits aufgestellte Proportion:

a:a'=c':c.

Sind beide Körper Gase, welche vom idealen Zustande nicht erheblich abweichen, so hat man für gleiche Temperatur und Spannung:

c:c'=v:v'

und somit ergibt sich für gewöhnliche Gase überhaupt, sie mögen thermisch einfach oder zusammengesetzt sein,

$$a: a' = \frac{1}{n}: \frac{1}{n'}$$
,

d. h. die thermischen Äquivalentgewichte der Gase verhalten sich allgemein wie ihre Dichten. In der Chemie gilt der Satz, dass die chemischen Äquivalentgewichte der Gase ihren Dichten proportional sind; man muss also schliessen: Thermisch äquivalente Gewichtsmengen verschiedener Stoffe sind auch chemisch äquivalent.

Die demnach thatsächlich bestehende Proportionalität zwischen thermischem Äquivalentgewicht und Dichte der Gase, welche sich hier unter der Annahme ergab, dass die lebendige Kraft der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln und um so mehr gegen die im Volumen diffundirte Strahlenmenge nur klein sei, kann als Beweis gelten, dass diese an sich wahrscheinliche Annahme der Wirklichkeit entspricht. Dies führt aber zu dem Schlusse, dass auch für einen gewöhnlichen festen Körper die Summe der lebendigen Kräfte seiner Atome gegen die in ihm diffundirte Strahlenmenge, also der Überschuss der experimentellen specifischen Wärme, welche S heisse, über die specifische Strahlenwärme nur klein sei und dass man demnach für thermisch einfache feste Körper annähernd

$$S = c$$

setzen kann. Da das Product ac für alle Körper gleich gross sein muss, so ist hiermit die annähernde Gleichheit von aS für die festen Grundstoffe (durchschnittlich nahe = 6), nämlich das Gesetz von Dulong und Petit, hinreichend erklärt.

Für thermisch zusammengesetzte feste Körper ist annähernd

$$S = c + c_0 = c(1 + \frac{c_0}{c}),$$

wobei, wenn a das Äquivalentgewicht eines solchen bedeutet, ac für alle den gleichen Werth wie bei den festen Grundstoffen haben muss. Setzt man demnach ac = 6, so wird

$$aS = 6(1 + \frac{c_0}{c});$$

der Werth von aS wird daher für thermisch zusammengesetzte Körper um so grösser ausfallen müssen, je grösser  $c_0$  gegen c und also die Summe der Innenflächen der Molekeln des bezüglichen Körpers gegen die Summe ihrer Aussenflächen ist.

Da der Erfahrung gemäss aS für ähnlich constituirte Körper annähernd gleich gross ist, so folgt, dass die Ähnlichkeit der Constitution auf der Übereinstimmung in dem Werthe von  $\frac{c_0}{c}$  beruht.

§. 6. Nach dem Vorigen kann die chemische Äquivalenz zweier Stoffmengen, welche miteinander eine chemische Verbindung bilden, nur durch die Gleichheit der strahlenden Flächensumme, welche beide gegen einander ins Spiel setzen, bedingt sein. Haben also zwei Grundstoffe die Äquivalentgewichte a und a' und sind sie im Verhältniss von a:a' in einer Verbindung enthalten, so muss nach der in §. 2 aufgestellten Definition der thermischen Äquivalenz, mit der dort angegebenen Bedeutung der Buchstaben, die Proportion

$$a:a'=\frac{m}{e}:\frac{m'}{e'}$$

bestehen. Enthält die Verbindung N Atome des einen und N' Atome des anderen, und bezeichnet  $a_1$  ihr Äquivalentgewicht, so hat man

$$a_1:a:a'=\frac{Nm+N'm'}{Ne+N'e'}:\frac{m}{e}:\frac{m'}{e'};$$

da nun hier der Bedingung der Äquivalenz gemäss Ne = N'e' sein muss, so wird

$$a_1:a:a'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{e}+\frac{m'}{e'}\right):\frac{m}{e}:\frac{m'}{e'}$$

und hieraus folgt:

$$a_1=\frac{a+a'}{2},.$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der Äquivalentgewichte der Bestandtheile.

So ist z. B. das Äqualentgewicht von Chlornatrium nicht die ganze, sondern die halbe Summe der Äquivalentgewichte von Chlor und Natrium, also  $=29\cdot25$ ; da dieser Werth, mit der specifischen Wärme der Verbindung multiplicirt, dem Gesetze von Dulong und Petit sich sehr gut anschliesst, so ist  $c_0=0$ , d. h. Chlornatrium ist, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach. Eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln findet also hier nicht statt. Dies gilt in gleicher Weise für alle ähnlich construirten Verbindungen.

Sollen v Äquivalente eines Stoffes mit 1 Äquivalent eines anderen sich chemisch verbinden, so muss hierzu die Summe

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man könnte insofern sagen, dass Chlornatrium nicht nur, wie viele Chemiker bereits annehmen, in wässeriger Lösung, sondern auch in der festen Aggregatform dissociirt ist.

der strahlenden Aussenflächen für beide Stoffe gleich gross werden. Dies kann am einfachsten so geschehen, dass durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und entsprechende Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen des ersteren Stoffes sich im Verhältniss von v:1 reducirt; dann sind beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent. Demnach hat die Verbindung das Äquivalentgewicht

$$a_1=\frac{\forall a+a'}{2},$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der verbundenen Äquivalentgewichte und als Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen ergibt sich für dieselbe:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{v-1}{2},$$

wo v immer eine ganze Zahl ist.

So hat z. B. Wasser das Äquivalentgewicht

$$\frac{2+16}{2} = 9;$$

das Product dieser Zahl mit der specifischen Wärme ist

$$9 = 6(1 + \frac{1}{2})$$

und folglich ist  $c_0 = \frac{1}{2}c$ , d. h. die Summe der strahlenden Innenflächen der im Wasser vorhandenen Molekeln verhält sich zur Summe der strahlenden Aussenflächen wie 1:2 und zur Gesammtsumme der strahlenden Flächen wie 1:3.

Wenn v Äquivalente eines Stoffes mit v' Äquivalenten eines anderen sich chemisch verbinden sollen, so muss wieder die Summe der Aussenflächen für beide gleich gross werden. Dies geschieht am einfachsten so, dass durch Zusammenlagerung der Atome zu Molekeln und Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen bei dem ersten Stoffe im Verhältniss von v:1, bei dem anderen im Verhältniss von v':1 sich reducirt,

wodurch beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent werden. Die Verbindung hat sodann das Äquivalentgewicht

$$a_1=\frac{va+v'a'}{2},$$

während in derselben das Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{v + v' - 2}{2}$$

ist, wo v und v' immer ganze Zahlen bedeuten.

Wie man sieht, können hiernach die Werthe von  $\frac{c_0}{c}$  mit der Zusammengesetztheit der Stoffe, von  $c_0=0$  angefangen, nicht anders als die Zahlen der Reihe

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

fortschreiten, und es muss daher das Product aS aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme bei binären Verbindungen nach Verhältniss der Zahlen

an Grösse zunehmen, wie es annähernd wirklich der Fall ist. Durch die in dieser Hinsicht thatsächlich herrschende Einfachheit der Verhältnisse erscheint die Annahme einer Zusammenlagerung von ungleichartigen Atomen zu Molekeln gänzlich ausgeschlossen.

§. 7. Wir kehren jetzt zu der in §. 4 erhaltenen Formel zurück, welche für Gase die Beziehung zwischen  $\frac{c_0}{c}$  und k ausdrückt. Weil k meistens nicht hinreichend genau bekannt ist, um daraus mit Sicherheit auf das genannte Verhältniss schliessen zu können, wollen wir zu den einfachsten dafür möglichen Werthen die entsprechenden Werthe von k suchen.

Für  $c_0 = 0$  wird k = 1.4. Dieser Werth kommt bei den permanent gasförmigen Grundstoffen, aber auch bei Stickstoffoxyd, Kohlenoxyd und Chlorwasserstoff vor. Letztere drei Gase

sind daher, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach, d. h. eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln hat darin nicht statt. In dieser Hinsicht ist also z. B. zwischen Stickstoffoxyd und einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile kein Unterschied, und es kann sonach der wirklich bestehende Unterschied nicht durch eine Verschiedenheit der Positionen der Atome bedingt sein.

Für  $c_0 = \frac{1}{2} c$ , der ersten Stufe thermischer Zusammensetzung entsprechend, wird

$$k = \frac{17}{13} = 1.3077;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei Wasserdampf, Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Sumpfgas, Kohlensäure, Stickstoffoxydul, ferner bei den Elementen Chlor, Brom und Jod vor. Letztere drei Stoffe sind daher in ihrer Gasform, obwohl chemisch einfach, thermisch zusammengesetzt, d. h. sie enthalten Molekeln mit strahlenden Innenflächen.

Ich hebe zunächst hervor, dass der Werth von  $\frac{c_0}{c}$  für den Wasserdampf genau denselben Werth hat wie für das Wasser, eine Übereinstimmung, welche, auf zwei ganz verschiedenen Wegen erhalten, nicht zufällig sein kann. Bei dem Übergange von Wasser in Dampf bleibt sonach das Verhältniss der Summe der strahlenden Innenflächen zur Summe der strahlenden Aussenflächen ganz unverändert.

Chlorgas betreffend, muss dasselbe zu gleichen Raumtheilen aus zwei verschiedenen gleich dichten Chlorarten bestehen; für die eine ist  $c_0=0$ , wie für den Sauerstoff des Wasserdampfes, für die andere ist  $c_0=c$ , wie für den Wasserstoff dieses Dampfes, und daher wird für die Verbindung beider  $c_0=\frac{1}{2}c$ . Bemerkenswerth ist, dass das Chlor durch die Ver-

bindung mit Wasserstoff seine thermische Zusammensetzung verliert und, ohne seine Dichte zu ändern, thermisch einfach wird. Hier tritt also ein wirklicher Verlust an strahlender Fläche ein, indem einfach  $c_0$  in der Summe

 $c+c_0$  verschwindet. Derartige Vorgänge sind überhaupt sehr gewöhnlich und sollen weiter unten eine nähere Deutung finden.

Für  $c_0 = c$ , als zweite Stufe thermischer Zusammensetzung, wird

$$k=\frac{5}{4}=1\cdot 25;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei einer Anzahl von Gasen und Dämpfen mit etwas mehr complicirter Zusammensetzung vor. Für  $c_0 = \frac{3}{2}c$  ist bereits k = 1.211.

Je grösser  $c_0$  gegen c wird, desto mehr vermindert sich der Werth von k, bis endlich bei sehr complicirter Zusammensetzung oder sehr grossen Molekeln, ähnlich wie bei festen oder flüssigen Körpern, annähernd k=1 wird.

§. 8. Fragt es sich nun, wie die allseitige Einfachheit der betrachteten chemisch-physikalischen Verhältnisse zu Stande kommen könne, so ist von vornherein klar, dass sie jedenfalls in einem eigenthümlichen und einfachen Gesetze der Zusammenlagerung der Atome ihren Grund haben muss. Meine Ansicht hierüber ist diese.

In §. 2 wurde Kürze halber vorausgesetzt, die Atome der Elemente seien kugelförmig. Es ist aber wahrscheinlicher, dass sie Polyeder sind, und man kann sich einfach vorstellen, sie seien Würfel. Tritt nun eine Anzahl Atome eines Grundstoffes zu einer Gruppe zusammen, so wird unter ihnen, wie man annehmen kann, das Bestreben herrschen, wieder einen Würfel zu bilden. Ein so entstandenes, eine Summe strahlender Innenflächen enthaltendes Körperchen — eine Molekel — ist wesentlich ein kleiner Krystall. Es ist dabei möglich, dass die Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden und sie trennenden Ätherschichten gegen die Dicke der Atome nur klein ist. Die kleinste Zahl würfelförmiger Atome, welche sich zu einer gleichfalls würfelförmigen Molekel gruppiren können, ist 8. Die Masse einer solchen Molekel ist 8 mal, die Summe ihrer Aussenflächen 4 mal grösser als für ein Atom. Da nun nach §. 2 das Äquivalentgewicht eines Stoffes dem Quotienten

 $\frac{m}{e}$  aus Masse und Aussenfläche proportional ist, so sieht man, dass, wenn alle Atome einer bestimmten Stoffmenge sich zu je acht in Molekeln zusammenlagern, das Äquivalentgewicht des bezüglichen Stoffes sich verdoppelt hat, d. h. zu einer gleichen Summe von Aussenflächen wird jetzt die doppelte Gewichtsmenge erfordert. Treten die so entstanden Molekeln wieder zu je acht zur Bildung grösserer Molekeln zusammen, so ist das Äquivalentgewicht vervierfacht, und so fort. Die möglichen Äquivalentgewichte eines Stoffes sind daher ganze Multipla des kleinsten derselben, und es hat die meiste Wahrscheinlichkeit für sich, dass ihre Grösse nach Verhältniss der Potenzen von zwei fortschreiten muss.

Bei der gedachten Zusammenlagerung der Atome bleibt, weil dabei nur eine Verwandlung strahlender Aussenflächen in strahlende Innenflächen eintritt, die specifische Strahlenwärme unverändert. Bei festen oder flüssigen Körpern wird daher durch eine solche Gruppirung der Atome die experimentelle specifische Wärme, wie auch das Volumen, nur wenig beeinflusst. Ist aber der Körper ein Gas, so wird dessen Volumen, weil es nur durch die Summe der Aussenflächen der Molekeln bedingt ist, durch Verdoppelung des Äquivalentgewichtes auf die Hälfte reducirt; Äquivalentgewicht und Dichte wechseln also proportional. Während die specifische Strahlenwärme des Gases constant bleibt, ändern sich mit seiner Dichte zugleich dessen specifische Wärmen bei constantem Volumen und bei constantem Drucke; beide (und mit ihnen k) werden kleiner, sind dann aber für ein gleiches Volumen grösser als bei einem thermisch einfachen Gase.

Bei der Bildung von Wasserdampf reduciren sich zwei Volume Wasserstoff durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und Verdoppelung seines Äquivalentgewichtes auf ein Volum, welches mit dem gleichen Volum Sauerstoff äquivalent ist und mit diesem zwei Volume Wasserdampf gibt. Eine Zusammenlagerung der ungleichartigen Atome ist bei der Einfachheit der Verhältnisse nicht annehmbar.

Die specifische Strahlenwärme des Knallgases, aus derjenigen der Bestandtheile nach der Formel in §. 3 berechnet,

ist 0.248. Als specifische Strahlenwärme des Wasserdampfes, dem Werthe von k gemäss  $c_0 = \frac{1}{2} c$  gesetzt, ergibt sich nach der genannten Formel, mit vorigem Resultate fast zusammenfallend.

$$c + c_0 = 0.249;$$

aus Regnault's Bestimmung der specifischen Wärme des Dampfes bei constantem Drucke folgt dieselbe = 0.254.

§. 9. Die im vorigen beschriebene Art der Zusammenlagerung gleichartiger Atome lässt eine sehr einfache Modification zu. Es ist ohne Schwierigkeit denkbar, dass die zur Bildung eines grösseren Würfels zusammentretenden würfelförmigen Atome, anstatt zwischen sich noch dünne Ätherschichten übrigzulassen, sich unmittelbar, d. h. bei völligem Ausschluss des Äthers, mit ihren Würfelflächen aneinander legen. Ein so entstehendes Gebilde enthält nicht, wie ein festes Körperchen, eine Summe strahlender Innenflächen, dasselbe ist insoferne keine Molekel, sondern, indem es dem Äther gegenüber ein Continuum ausmacht, ein - nur grösseres - Atom; es mag ein Synatom heissen. Legen sich alle Atome einer Stoffmenge auf diese Weise zu je acht zusammen, so ist, wie im früheren Falle, das Äquivalentgewicht verdoppelt, aber es ist jetzt zugleich die strahlende Flächensumme der Atome und somit die specifische Strahlenwärme des Stoffes auf die Hälfte vermindert, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt also unverändert. Dass Zusammenlagerungen dieser Art wirklich vorkommen, scheint nicht zweifelhaft.

Das schönste Beispiel bietet das Wasser in seinen drei Aggregatformen dar. Die specifische Wärme des Eises ist sehr nahe die Hälfte von der des Wassers; dies erklärt sich, wenn man annimmt, dass beim Erstarren der Flüssigkeit die gleichartigen Atome eines jeden ihrer zwei Elemente sich zur Bildung der nächst grösseren Synatome zusammenlegen, während das Verhältniss  $c_0$  c und somit die Art der thermischen Zusammengesetztheit des Wasserstoffs und die thermische Einfachheit des Sauerstoffs bestehen bleibt. Das Äquivalentgewicht des

Eises ist dann = 18, dasjenige des Wasserstoffs ist darin im Ganzen vervierfacht, das des Sauerstoffs verdoppelt.

Die specifische Strahlenwärme des Wasserdampfes ist, wie gefunden wurde, nahe 0.250 oder  $\frac{1}{4}$  von der des Wassers und die Hälfte von der des Eises. Man muss daher annehmen, dass beim Verdampfen das Äquivalentgewicht des Eises von neuem durch Bildung der nächst grösseren Synatome sich verdoppelt, das des Wassers aber sich sogleich vervierfacht, wobei wieder das Verhältniss  $c_0:c$  unverändert fortbesteht. Das Äquivalentgewicht des Dampfes ist dann =36, dasjenige des thermisch zusammengesetzten Wasserstoffs in demselben ist im Ganzen verachtfacht und das des thermisch einfachen Sauerstoffs vervierfacht. Die specifischen Strahlenwärmen von Wasser, Eis und Dampf verhalten sich wie  $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$  und ihre Äquivalentgewichte wie 9:18:36, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt daher in allen drei Aggregatformen unverändert =9.

Aus der specifischen Wärme des Wassers berechnet sich diejenige des flüssigen Wasserstoffs = 6, die des flüssigen Sauerstoffs =  $\frac{3}{8}$ , welche Zahlen auch dem Gesetze von Dulong und Petit entsprechen. Nimmt man dies auch bei flüssigem Stickstoff an, so ist dessen specifische Wärme =  $\frac{3}{7}$  und hieraus folgt diejenige der flüssigen Luft = 0·4161. Nun ist aber

$$\frac{0.4161}{4} = 0.1040$$

sehr nahe dem Werthe 0·1030 gleich, der sich in §. 3 für die specifische Strahlenwärme der atmosphärischen Luft ergab; man muss daher schliessen, dass Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff bei dem Übergange aus der flüssigen in die Gasform ihr Äquivalentgewicht durch unmittelbare Aneinanderlagerung ihrer Atome vervierfachen, wobei ihre specifische Strahlenwärme sich auf den vierten Theil reducirt. Dann entspricht aber für die permanent gasförmigen Grundstoffe das

Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme (mit welcher bei den festen Grundstoffen die experimentelle nahe zusammenfällt) dem Gesetze von Dulong und Petit volkommen und die Ausnahme, welche man diesbezüglich bisher statuiren musste, verschwindet gänzlich.<sup>1</sup>

Da die Äquivalentgewichte der Gase allgemein ihren Dichten proportional sind, so müssen Quecksilber und Cadmium beim Verdampfen ihr Äquivalentgewicht verdoppeln, während Phosphor und Arsen es verachtfachen, und es gibt wahrscheinlich keinen einzigen Grundstoff, welcher ohne Vergrösserung seines Äquivalentgewichtes aus der festen oder flüssigen in die Gasform übergehen könnte. Die Existenz einatomiger Gase im Sinne der kinetischen Theorie erscheint hierdurch ausgeschlossen.

Schon oben wurde erwähnt, dass Chlorgas durch chemische Verbindung mit Wasserstoff einen Verlust an strahlender Fläche,  $\frac{1}{3}$  der ganzen Summe betragend, erfährt; nach dem Vorigen ist dies leicht verständlich. Der wichtigste Fall solcher Art betrifft das Ammoniakgas. Dem Werthe von k gemäss ist für dasselbe, wie für Wasserdampf,  $c_0 = \frac{1}{2} c$ . Hieraus folgt aber, dass  $\frac{1}{4}$ der ganzen strahlenden Flächensumme seiner Bestandtheile im freien Zustande durch ihre Verbindung verschwindet, und in der That verhält sich die specifische Strahlenwärme eines Gemenges der Bestandtheile zu derjenigen des Ammoniaks wie 4:3. Man kann sich von der Constitution dieses Gases, wie ich hier der Kürze wegen nur andeute, vollkommen Rechenschaft geben, wenn man annimmt, dass in demselben das Wasserstoffgas zu einem Drittel sein Äquivalentgewicht verdoppelt und zu zwei Dritteln es vervierfacht hat. Eine Verdreifachung des Äquivalentgewichtes scheint also nicht leicht zu Stande kommen zu können. Starre Verbindungen führen zu ähnlichen Schlüssen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Als Ausnahmen vom genannten Gesetze erscheinen dann nur noch einige, durch die Kleinheit der specifischen Wärme auffallende feste Grundstoffe (Kohlenstoff, Bor, Silicium); ihr Verhalten dürfte aber nach dem Obigen durch eine in denselben mit Abnahme der Temperatur fortschreitende Synatombildung vollständig erklärbar sein.

Der Nachweis, dass ein Grundstoff sein Äquivalentgewicht vervielfachen kann, ohne dass er deswegen aufhört, das Gesetz von Dulong und Petit zu erfüllen, ist auch für die Hypothese von Prout von grosser Bedeutung. In der gleichen Beziehung ist zu bemerken, dass das Äquivalentgewicht eines Stoffes, als Quotient aus Masse und Aussenfläche seiner Atome, nicht nothwendig unter allen Umständen völlig constant bleiben muss, und dass daher die Äquivalentgewichte, welche ein Stoff durch Zusammenlagerung seiner Atome annehmen kann, nicht nothwendig genau ganze Vielfache des kleinsten sind.

§. 10. Bei einem Überblicke der vorliegenden Abhandlung mag vielleicht am meisten die unerwartete Folgerung auffallen, dass in chemischen Verbindungen zwar sehr gewöhnlich die gleichartigen, aber in keinem Falle die ungleichartigen Atome zu engeren für sich bestehenden Systemen associirt sind, und dass es chemische Verbindungen gibt, welche sich bezüglich der Positionen der sie constituirenden Atome von einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile durchaus nicht unterscheiden. Wenn diese Folgerung feststeht, so bleibt zur Erklärung des thatsächlich bestehenden Unterschiedes nur die Annahme übrig, dass der Übergang eines Gemenges zweier oder mehrerer Stoffe in den Zustand einer chemischen Verbindung wesentlich nicht durch eine Veränderung der Atompositionen, sondern durch eine Veränderung der Atome selbst bedingt sei, d. h. dass jedes Element, wenn es mit einem anderen sich chemisch verbindet, die innere Structur seiner Atome wechselt. Wirklich erklärt sich auf solche Weise am einfachsten der durch die Erfahrung bewiesene Satz, dass die Elemente, wenn sie in Verbindungen eingehen, ihr eigenthümliches Licht- und Wärmespectrum und ihr specifisches Refractionsvermögen in keinem Falle unverändert beibehalten. Man kann dabei sich die Vorstellung machen, dass die miteinander verbundenen Stoffe sich gegenseitig in einem die Substanz ihrer Atome betreffenden Zwangszustande erhalten, aus welchem nur die Lösung der Verbindung sie wieder befreit. Es ist dann auch voraus zu erwarten, dass, wenn ein Atom unter dem Zwange eines äusseren Einflusses seine Structur wechselt, dies nicht geschehen kann, ohne dass zugleich ein Quantum Wärme entweder erzeugt oder verbraucht wird, und in der That gibt es keine chemische Verbindung, bei deren directer oder indirecter Herstellung nicht eine bestimmte charakteristische Wärmemenge entweder entwickelt oder verschluckt wird.

Die kaum zu bezweifelnde Identität der thermischen und der chemischen Äquivalenz dürfte beweisen, dass die chemisch wirksamen Kräfte der Atome ihre Ausgangs- und Angriffspunkte nicht in deren Massen, sondern an deren Aussenflächen haben, und dies würde zu der Vermuthung berechtigen, dass es andere chemisch wirksame Kräfte zwischen den Atomen, als die Strahlen, welche sie einander zusenden, nicht gibt. Für diese Auffassung spricht es auch, dass die chemischen Wechselwirkungen der Stoffe mit Abnahme der Temperatur im Allgemeinen schwächer werden und dass nach den diesbezüglich entscheidenden Versuchen von R. Pictet bei einer niedrigen Temperatur von ungefähr —125° selbst die gewöhnlich stärksten Reactionen ganz aufhören.

#### Schlussbemerkung.

Wie ich im Eingange dieser Darlegung erwähnte, hat mich zu derselben die Aufstellung und Verwerthung des Satzes veranlasst, dass eine Ätherwelle an einer sie auffangenden Fläche einen Druck erzeuge. Ich halte es nun zwar für zweifellos, dass eine solche Welle als fortbewegende Kraft wirken kann, dem aber, dass diese Kraft ein Druck sei, stimme ich keineswegs bei. Ich gestehe, mir nicht vorstellen zu können, wie in Wirklichkeit ein solcher Druck zu Stande kommen soll. Dagegen scheint mir nach naheliegenden Analogien die Anschauung begründet, dass transversale Ätherschwingungen in ihrer Fortpflanzungsrichtung naturgemäss einen Zug, d. h. eine ihrer Intensität proportionale Verminderung des Ätherdruckes erzeugen müssen. Dass man an die Möglichkeit eines Zuges nicht denkt, einen Druck aber für annehmbar hält, hat seinen Grund vielleicht in der Thatsache, dass Erwärmung der Körper fast immer deren Volumen auszudehnen strebt; ich glaube aber, dass diese Wirkung diffundirter Wärmestrahlen der Annahme einer

ziehenden Kraft derselben durchaus nicht widerspricht. Dies lässt sich leicht anschaulich machen.

Denkt man sich eine für Wärmestrahlen opake Platte beiderseits gleich stark bestrahlt, so halten die entsprechenden Ätherkräfte sich das Gleichgewicht. Bringt man aber neben diese Platte und zu ihr parallel eine zweite, so werfen beide einen Schatten aufeinander; beide sind dann auf den einander zugewendeten Seiten weniger stark bestrahlt als auf den Gegenseiten, sie werden folglich durch den an ersteren überwiegenden Ätherdruck auseinander, d. h. nach der Seite der stärkeren Bestrahlung getrieben.

In einem Gase gibt es für jedes Atom zwischen den übrigen eine Lage, in welcher es auf allen Seiten gleich stark bestrahlt ist; aus dieser verschoben, empfängt es auf Seite der momentan näheren Atome, welche ihm nun vermöge ihrer Opacität einen grösseren Theil der von weiterher kommenden Strahlen intercipiren, eine geringere Strahlenmenge als auf Seite der momentan ferneren Atome, dasselbe wird also durch die resultirende Kraft nach einer mittleren Lage zurückgetrieben, welche demgemäss eine Lage stabilen Gleichgewichtes ist. Alle Atome des Gases fliehen auf solche Weise einander; sie üben gegenseitig einen durch die allgemeine Strahlendiffusion und also durch den Äther vermittelten Druck aus, welcher mit Erhöhung der Temperatur und mit Verminderung des Gasvolumens an Stärke zunimmt.

Bezüglich der Resultate dieser Abhandlung scheint es mir zunächst und wesentlich auf den Fundamentalsatz, dass Wärmestrahlen als fortbewegende Kräfte wirken, nicht aber darauf anzukommen, ob diese Kräfte aus einer Vermehrung oder einer Verminderung des Ätherdruckes an ihren Angriffspunkten hervorgehen.

## Die Apisperiode der alten Ägypter

von

#### Dr. Eduard Mahler.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die Literatur, welche sich die Untersuchung der uns vom classischen Alterthume her überlieferten grösseren Zeitkreise der Ägypter zur Aufgabe macht, ist seit den enormen Fortschritten, welche die Entzifferung der Hieroglyphentexte gemacht, und insbesondere seit der Entdeckung des Serapeums durch den französischen Forscher Mariette zu einer sehr umfangreichen geworden. Eine eingehendere Untersuchung haben namentlich Brugsch und Lepsius diesem Gegenstande gewidmet, und es war gewiss erfreulich, dass auch diese hervorragenden Ägyptologen auf Grund der Denkmälerberichte zu den Resultaten gelangten, welche lange Zeit vordem schon Ideler aus rein astronomisch-chronologischen Gründen annehmen zu müssen glaubte. Die 25 jährige Apisperiode soll nach Annahme dieser Forscher keine andere sein, als die Periode von 25 Jahren zu 365 Tagen, nach deren Ablauf die Mondphasen an den nämlichen Tagen des Jahres in gleicher Ordnung periodisch wiederkehren. Welch' hohen Grad von Wahrscheinlichkeit diese Hypothese hat, beweist der Umstand, dass  $25 \times 365 = 9125$  Tage, und 309 synodische Monate =  $= 309 \times 29.53059 = 9124.952$  Tage sind.

Warum hiess aber dann diese 25jährige Periode die Apisperiode«? Warum haben die Ägypter eine Periode, die einen rein astronomischen Charakter hatte, mit dem heiligen Apisstiere in Verbindung gebracht?

Diese Fragen blieben bisher noch unbeantwortet und auch die Hypothese selber ist noch von keiner Seite näher begründet

worden, wiewohl sie durch mehrere dieses Gebiet berührende Untersuchungen in die Ägyptologie aufgenommen wurde.

Ideler war von der Richtigkeit seiner Annahme, dass die von den Classikern des Alterthums berichtete 25 jährige Lebensdauer des Apis sich nur auf die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen beziehe, so durchdrungen, dass er, ohne zu ahnen, dass er gerade damit der Wahrheit am nächsten kam, den heiligen Apisstier als ein lebendiges Symbol des Mondes und seiner Periode bezeichnete. Freilich haben die ägvptologischen Forschungen, die man zur Zeit Ideler's noch nicht kannte, ergeben, dass die Berichte der Griechen bezüglich der Lebensdauer des Apis der Wahrheit nicht entsprechen, denn wir haben z. B. Apise mit 7, 16, 17, 18, 23 und 26 Lebensjahren (siehe: Lepsius, Sitzungsber. der königl. Akad. Berlin, 1856, S. 316-317). Es kann sonach die Lebensdauer des Apis gewiss nicht der Grund gewesen sein für die Benennung der 25jährigen Mondperiode als »Apisperiode«. Woher also dieser Name?

Im Folgenden wird nun diese Frage beantwortet und zugleich der erste wissenschaftliche Nachweis für den rein astronomischen Charakter dieser Periode gegeben. Indem ich von dem festen Siriusjahre, welches ich auf Grund zahlreicher Belege als die alleinige Grundlage des im alten Ägypterreiche üblich gewesenen Kalenders annehme und welches selbst zur Zeit der Ptolemäer noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen als Normaljahr zu Grunde lag (siehe Decret von Kanopus), ausging, reconstruirte ich mehrere von Lepsius und Brugsch uns mitgetheilte Apisdaten derart, dass ich das für den Tag der Inthronisation der heiligen Apisthiere überlieferte ägyptische Datum auf das julianische reducirte; dabei ergibt sich die merkwürdige Erscheinung, dass diese heiligen Thiere stets am Vollmondstage inthronisirt wurden. Nachdem dann noch auf Grund des uns bekannten inschriftlichen Materials der Nachweis geführt wird, dass man den Gott Osiris, als dessen lebendiges Symbol der Apis erachtet wurde, mit dem Vollmond identificirt hat, und wir sonach zufolge der vorliegenden inschriftlichen Urkunden folgern müssen, Apis = Osiris = Vollmond, so war damit nicht nur die

schon von Ideler vermuthete Thatsache gefunden, dass die Apisperiode einen rein astronomischen Charakter hatte und die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen bezeichnete, sondern auch die Erklärung gefunden, warum man dieselbe »Apisperiode« genannt hatte.

Bei dem historischen Entwicklungsgange, welchen die Jahrform der alten Ägypter zufolge ihres scharfen Beobachtungstriebes in naturgemässer Weise befolgen musste (zuerst das reine Mondjahr, dann das Jahr mit 12 dreissigtägigen Monaten, später das Sonnenjahr mit 12 dreissigtägigen Monaten +5 Zusatztagen und endlich das Siriusjahr mit 3651/4 Tagen), ist es wohl selbstverständlich, dass ihnen die Thatsache nicht entgehen konnte, dass nach je 25 Jahren in der Dauer von 365 Tagen die einzelnen Mondphasen wieder auf denselben Tag des Jahres periodisch wiederkehren. Denn es ist:  $25 \times 365 = 9125$  Tagen und  $309 \times 29.53059 = 9124.95231$ Tagen, so dass erst nach 20 solchen 25 jährigen Perioden, d. i. nach 500 Jahren die Differenz 1 Tag ausmacht. 1 Es ist unter solchen Umständen leicht erklärlich, dass die Ägypter auch in der späteren Epoche ihrer Reichsgeschichte, wo schon die Dauer des festen Siriusjahres nicht nur gekannt, sondern auch praktisch verwerthet wurde, ihren astronomischen Rechnungen diese Periode und ein Jahr von 365 Tagen zu Grunde legten.

Besonders gute Dienste leistete diese 25jährige Periode zur Berechnung und Controlirung der einzelnen Mondtage und namentlich des Vollmondtages, an dem nach ägyptischer Auffassung der Mond sich erneute oder verjüngte.

So lesen wir (Brugsch, Thesaurus, I. Abth.):

- 1. (S. 30): \*Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit«.
- 2. (S. 34): \*das sind die Götter, welche verherrlichen das Mondauge, wenn es erneut seinen Kreislauf am 15. Tage des Mondmonates«.

<sup>1</sup> Es ist daher die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass gerade dieser 500 j\u00e4hrige Zeitraum die sogenannte »Ph\u00f6nixperiode« bildete.

- 3. (S. 35): \*das Mondauge (der Vollmond) ist unversehrt und es ist ausgestattet mit seinen Herrlichkeiten zum Segen; es ist gefeit und es verjüngt sich allmonatlich.
- 4. (S. 38): Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt«.
- 5. (S. 45): Ausgefüllt ist das Vollmondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. w.

Der Vollmondtag war aber auch einem anderen religiösen Feste gewidmet. Die Einführung des heiligen Apisstieres in das Apieum zu Memphis, also die Inthronisation dieses heiligen Thieres als lebendes Symbol der Seele des Gottes Osiris auf Erden, fand stets am Vollmondtage statt. Diese Thatsache, welche trotz der bezüglichen Berichte der Denkmäler bisher noch nicht erkannt wurde, findet ihre Bestätigung durch Belege, welche sich vermöge der uns erhaltenen Apisdaten durch die Rechnung leicht reconstruiren und prüfen lassen.

A. Das erste Datum, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, ist das der Einführung des Apisstieres im 31. Regierungsjahre Königs Ptolemäus Euergetes II. Seine näheren Daten sind:

Jahr	Monat	Tag	König
		Gebu	rt:
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.
	Einfüh	rung i	n Memphis:
XXXI	Thoth	23	Ptol. Euergetes II.

Es war also:

24. Tybi d. J. XXVIII bis 24. Tybi d. J. XXIX = Jahr I des Apis 24. Tybi d. J. XXIX bis 24. Tybi d. J. XXX = Jahr II des Apis 24. Tybi d. J. XXX = Jahr III des Apis

Nachdem aber selbst in der Ptolemäerzeit noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen das Sothisjahr als Normaljahr zu Grunde lag, so erhält man als entsprechende Daten im julianischen Kalender:

- 10. December d. J. 143 v. Chr. bis 10. December 142 v. Chr. = Jahr I des Apis = Jahr 28/29 Ptol. Euergetes II.
- 10. December d. J. 142 v. Chr. bis 10. December 141 v. Chr. = = Jahr II des Apis = Jahr 29/30 Ptol. Euergetes II.
- 10. December d. J. 141 v. Chr. bis 10. December 140 v. Chr. = = Jahr III des Apis = Jahr 30/31 Ptol. Euergetes II.

Es ist daher das Datum der Einführung des Apisthieres in Memphis:

23. Theth d. J. XXXI Ptol. Euergetes II. = 11. August 140 v. Chr.

Nun wissen wir, dass zur Zeit der Ptolemäerherrschaft der graeco-macedonische Einfluss in Ägypten so mächtig war, dass sogar die Könige, um sich beim Volke verständlich zu machen, in ihren Decreten nach dem graeco-macedonischen Kalender datiren mussten. Daher auch die Doppeldaten aus dieser Epoche. (Siehe z. B. Decret von Kanopus).

Diesem Kalender zufolge fiel im Jahre 140 v. Chr. der 29. Juli julianisch auf den { 1. Metageitnon } Ol. 160, I, und daher entsprach der 11. August (= 42. Juli) dieses Jahres dem 14. Metageitnion = 14. Lous. Da aber der Metageitnion dieses Jahres ein hohler Monat, d. i. 29tägig war, so fiel die Dichomenie auf den 14. Tag, d. h. »der 11. August des Jahres 140 v. Chr. = 23. Thoth des Jahres XXXI Ptol. Euerg. II., der Tag der Einführung des Apis in das Apieum zu Memphis, war ein Vollmondtag«.

 ${\it B.}$  Eine andere Stele berichtet von der Inthronisation eines Apis im:

Jahr	Monat	Tag	des Königs
V	Pavni	18	Amasis

Amasis regierte bekanntlich 570—526 v. Chr. Es ist daher Jahr V = 566/5 v. Chr. und sonach

Jahr V, Payni 18 (im Normaljahr) = 565 v. Chr., Mai 3.

- Am 2. Mai 565 v. Chr., um 14<sup>h</sup> 9·6<sup>m</sup> mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. etwa 4<sup>1</sup>/<sub>4</sub><sup>h</sup> Nachmittag mittlere Memphiser Zeit trat die Vollmondsphase ein; es war also am Abend dieses 2. Mai die Vollmondscheibe sichtbar, und der mit diesem Abende beginnende Mondtag, welcher dem julianischen 3. Mai, dem Tage der Einführung des heiligen Apis in den Tempel zu Memphis entsprach, war sonach in der That ein Vollmondtag.
- C. Eine dritte Stele erzählt uns die Inthronisation eines Apis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
I	Epiphi	9	Psametik II.

Jahr I des Königs Psametik II ist das Jahr 595/4 v. Chr. Es ist daher

Jahr I, Epiphi 9 Königs Psam. II. = 594 v. Chr., Mai 24.

Nun zeigt die Rechnung, dass am 23. Mai des Jahres 594 v. Chr. um 19<sup>h</sup> 26·4<sup>m</sup> mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. in der Nacht vom 23. Mai auf den 24. Mai, etwa 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Stunden vor der mittleren Memphiser Mitternacht die Vollmondsphase eingetreten war; es war somit der 24. Mai des Jahres 594 v. Chr. in der That der Vollmondtag.

D. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum zu Memphis im

Jahr Monat Tag des Königs XXIV Pharmuthi 9 Taharka.

Wir wissen bereits, dass

das Jahr 595/4 v. Chr. = Jahr I Psametik II., also ist das Jahr 596/5 v. Chr. = Jahr XVI Nekau II., und daher das Jahr 611/0 v. Chr. = {Jahr I Nekau II., Jahr LIV Psametik I.

Dann war aber: 1

das Jahr 664/3 v. Chr. = Jahr I Psametik I.

das Jahr 665/4 v. Chr. — Regierungsjahr Königs Rut-Amunmi. das Jahr 666/5 v. Chr. — Jahr XXVIII oder letztes Jahr von

Taharka

und daher

das Jahr 668/7 v. Chr. = Jahr XXVI Taharka.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre (668 v. Chr.) beginnenden Siriusjahres fiel (siehe weiter unten, Anhang S. 844) auf den 19. Juli julianisch. Auch war das betreffende Siriusjahr ein Schaltjahr von 12 dreissigtägigen Monaten +6 Ergänzungstagen. Dem 9. Pharmuthi des XXVI. Regierungsjahres Königs Taharka entsprach daher der 22. Februar des Jahres 667 v. Chr

Um 8<sup>h</sup> 24<sup>m</sup> mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. h. etwa 10<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> Vormittag Memphiser Zeit des 21. Februar 667 v. Chr. traf die Vollmondsphase ein, am Abende dieses Tages zeigte sich daher die Vollmondscheibe und es war sonach der folgende Tag, d. i. der 22. Februar, der Tag der Inthronisation des Apis, der Vollmondtag.

E. Besondere Beachtung verdient die folgende Thatsache. Der Apis, welcher im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. zu Memphis inthronisirt wurde, ist nach dem Zeugnisse mehrerer Steleninschriften in Memphis geboren worden. Mit dem Tempel des heiligen Apisstieres war bekanntlich auch ein

>Zeugungshaus «, III — De genannt, verbunden. Aus diesem war der im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. gekrönte Apis als Sohn der Kuh Kerka (siehe Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884) hervorgegangen, und zwar im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.

Selbstverständlich musste die Geburt eines Apis im Tempel zu Memphis den Ägyptern als ein besonderes glückliches

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Angaben stimmen auch vollkommen mit Haigh (Egyptian genealogis, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1869, S. 47).

Ereigniss erscheinen, und es ist nur natürlich, wenn sie in einem solchen Falle die Geburt dieses Apis als seine erste Einführung in den Tempel erachteten. Dann aber musste das vermerkte Datum der Geburt einem Vollmondtage entsprechen, und dies ist auch wirklich der Fall. Das XXVIII. Regierungsjahr Ptol. Euergetes II. ist das Jahr 143/2 v. Chr., der 24. Tybi (Normaljahr) ist der 10. December, es ist also

Jahr XXVIII, Tybi 24 = 143 v. Chr., December 10,

und in der That ein Tag der Vollmondsphase.

F. Es wird ferner von der Inthronisation eines Stieres berichtet, welche statthatte in Memphis im <sup>1</sup>

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXI	Thoth	20	Ptol. V. Epiphanes.

Wird auch diesem Datum das feste Siriusjahr zu Grunde gelegt, dann ist

- 1. Thoth d. J. I Königs Epiphanes = 20. Juli 203 v. Chr.,
- 1. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 20. Juli 183 v. Chr.,

und daher

20. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 8. August 183 v. Chr.

Da aber der 23. August dieses Jahres dem graeco-macedonischen 1. Gorpiäus (1. Boëdromion Ol. 149 II) entsprach, so war der 8. August, der Tag der Inthronisation des heiligen Apis, 15 Tage vor der Numenie des Monates Gorpiäus, und daher ein Vollmondtag.

(Damit findet eine höchst scharfsinnige Correctur Prof. Brugsch's ihre Bestätigung. Auf S. 136 des 22. Jahrganges der Zeitschrift für ägyptische Sprache, woselbst Brugsch den \*Apiskreis aus der Zeit der Ptolemäer« eingehend erörtert, macht unser Grossmeister auf dem Gebiete ägyptologischer Forschung folgende Bemerkung: »In dem Datum vom Jahre XXI (Lin. 8) ist die Zahl des Monatstages

<sup>1</sup> Siehe Brugsch's »Der Apiskreis unter den Ptolemäern«, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884, S. 136.

Wir ergänzen die beiden Striche wiederum zu einem I und elsen nn Tag 20«).

G. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum von Memphis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXIX	Paophi	1	Šešonk III.

Šešonk III. war der Nachfolger von Thakelat II. Am 25. Mesori des Jahres XV dieses Königs fand eine in Ägypten sichtbare totale Mondfinsterniss statt; es ist dies (siehe des Verfassers Untersuchungen in den Denkschriften der Wiener Akad., 1887) die Finsterniss vom 9. Juli des Jahres 829 v. Chr. Thakelat II. regierte 15 Jahre; Šešonk III. kam sonach im Jahre 828 v. Chr. zur Regierung. Es ist also

#### 1. Paophi d. J. XXIX Šešonk III. = 1. Paophi d. J. 800 v. Chr.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre beginnenden Siriusjahres fiel (siehe Seite 844) auf den 19. Juli. Dann war aber der 1. Paophi dieses Jahres, d. i. der Tag der Inthronisation des Apis = 18. August des Jahres 800 v. Chr. Und nachdem am Abende des 17. August dieses Jahres die Vollmondscheibe sichtbar war, so musste der mit diesem Abende beginnende Mondtag als Vollmondtag bezeichnet werden. Es war daher in der That der 1. Paophi des Jahres XXIX Königs Šešonk III., entsprechend dem 18. August des Jahres 800 v. Chr., ein Vollmondtag.

Aber auch den Denkmälerberichten ist diese für die Culturgeschichte Altägyptens gewiss bedeutungsvolle Thatsache direct zu entnehmen.

Es ist ja bekannt, dass der Apis allenthalben in Ägypten als das lebende Symbol des Osiris aufgefasst wurde und dass der Cult der Osirisseele mit dem des Apis eng verknüpft war.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zum gleichen Resultate kommt auf anderem Wege Dr. Haigh (siehe dessen Aufsatz: >Egyptian genealogies in Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1869, S. 46, Zeile 2 von unten).

Plutarch (de Iside C. 29) sagt:

Die meisten der Priester sagen übereinstimmend aus, dass der Osiris und der Apis eng verbunden seien, indem sie ausführen und lehren, dass wir den Apis als das Ebenbild der Seele des Osiris halten müssen«.

Eine zehnzeilige Hieroglypheninschrift (die bilingue Stele des Châhap im ägyptischen Museum zu Berlin, Zeitschrift für ägyptische Sprache, 1884, S. 102) beginnt also:

Die königliche Opfergabe, wohlgefällig dem Ptah-Sokaris-Osiris, dem grossen Gotte, dem Herrn der Krypte, dem Apis-Osiris, dem Xent der Amenthes, dem Herrn der Ewigkeit...«

Nun bezeugen aber die astronomischen Inschriften, die wir in der vortrefflichsten Übersicht in Brugsch's »Thesaurus inscriptionum aegypticarum« zusammengestellt finden, dass der »Osiris« mit dem »Vollmond« in innigster Verbindung war.

Wir lesen daselbst (p. 30):

»In einer anderen Barke (an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera), welche unmittelbar dem Sonnenschiffe folgt, zeigt sich das Auge des Vollmondes in

der Gestalt dem der ibisköpfige Thuti-Thot seine Huldigung auszudrücken scheint. Vor dem Schiffe des Mondes befindet sich folgende Inschrift: "Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit". Ein drittes Schiff zeigt das Bild des thronenden Osiris mit Krone und Scepter. Vor ihm fünf Sterne. Ein vierzeiliger Text belehrt darüber: "Osiris-Onnophris, der Triumphator, er hat sich vereint mit dem Vollmondauge"«.

Ein anderer Text (p. 38 daselbst) lautet in Übersetzung also:

Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt. Die Seelen der Götter treten in ihm zum Vorschein und Osiris geht leuchtend auf in ihm als Mondgott«.

Eine andere Stelle (p. 40 in Thesaurus von Brugsch) erzählt uns, dass die Stadt Tentyra sich der Freude hingibt

wenn »die herrliche Seele des Gottes Osiris sich allmonatlich verjüngt, um den Vollmond in Besitz zu nehmen«.

Gleichfalls an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera zeigt ein Bild eine Apotheose des Osiris als Mondgott. Osiris thront in einem Schiffe und über ihm ist folgende Inschrift:

»Osiris-Onnophris, der Triumphator, ist eingetreten in das Mondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. f.

Es ist also nicht erst die Rechnung, welche uns das wichtige Resultat verkündet, dass die Krönungsfeierlichkeit des heiligen Apisstieres in Memphis zur Zeit des Vollmondes erfolgte, schon die monumental beglaubigten Inschriften weisen in beredter Sprache darauf hin.

Es ist wohl bekannt, dass die Ägypter mit besonderer Vorliebe nicht nur ihre religiösen Satzungen, sondern auch ihre wissenschaftlichen Thesen, mögen diese die Mathematik, Medicin oder Astronomie betroffen haben, in gewisse mysteriöse Formeln zu fassen beliebten, die nicht für jedermann verständlich waren. Wer nicht mit den Eigenheiten der ägyptischen Denk- und Sprachweise vollkommen vertraut war, konnte da sehr leicht auf Irrwege gerathen. Und daher kommt es auch, dass selbst ein Herodot uns über Dinge zu berichten weiss, die in den uns erhaltenen Denkmälerinschriften nirgends Bestätigung finden. Die Priester haben den nach Ägypten gekommenen Fremden zweifellos Einiges vom Apiscult berichtet, ihre Aussagen aber in wohlerwogene Formeln gekleidet, die dann, in wörtlicher Bedeutung genommen, für den mit ägyptischer Cultur und ägyptischen Sitten völlig Unvertrauten noch immer unverständlich waren. Gar Vieles ist also über den Apiscult in den Schriften der Griechen und Römer überliefert worden, was mit den Berichten der Denkmäler in directem Widerspruche ist. Nirgends finden wir die 25-jährige Apisperiode als solche chronologisch verwerthet. denn Niemand hat nach Jahren einer solchen Periode datirt. Und wenn Ideler in ihr eine astronomische Periode erblickte, so hat er wohl das Richtige getroffen; aber auch er

irrte noch, indem er meinte, der Name »Apisperiode« käme daher, weil man die Lebensdauer des Apisstieres nach ihr festsetzte. Die ganze Periode ist einfach eine rein astronomische, welche 25 damals in der rechnenden Astronomie gebräuchliche 365tägige Jahre umfasste, nach deren Ablauf in periodischer Wiederkehr mehrere Jahrhunderte hindurch die einzelnen Mondphasen auf denselben Tag dieses 365tägigen astronomischen Jahres trafen.

Diese Thatsache haben die alten Ägypter, welche den Himmel mit peinlichster Sorgfalt beobachteten, frühzeitig wahrgenommen und haben die so entstandene Periode von  $25 \times 365$  Tagen dazu benutzt, um nach ihr die Apisvollmonde, an denen — wie oben gezeigt wurde — die Inthronisation der Apisstiere statthaben sollte, zu regeln und zu bestimmen. Daher also der Name »Apisperiode« = »Mondperiode.«

#### Anhang.

Zur näheren Erläuterung einiger hier vorgebrachten Daten sehe ich mich veranlasst, auf die schon anderweitig (Transactions of the IX. Congress of the Orientalist's, vol. II, p. 323) angedeutete Thatsache hinzuweisen, dass zufolge unserer heutigen astronomischen Anschauungen innerhalb der im Jahre 1318 v. Chr. beginnenden Sothisperiode eine viermalige Reorganisation des Sothiskalenders nöthig war und wir daher innerhalb dieser Zeit fünf verschiedene Kalender in Betracht ziehen müssen.

I. Von —1317 bis —893 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
-4n	Juli 19	Gemeinjahr
-(4n+3)	19	Gemeinjahr
-(4n+2)	19	Schaltjahr
-(4n+1)	20	Gemeinjahr

II.

### Von -892 bis -537 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	des eben beginnenden Siriusjahres
-4n	Juli 19	Gemeinjahr
-(4n+3)	19	Schaltjahr
-(4n+2)	20	Gemeinjahr
-(4n+1)	20	Gemeinjahr

III.

### Von -536 bis -236 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	des eben beginnenden Siriusjahres
-4n	Juli 19	Schaltjahr
-(4n+3)	20	Gemeinjah <b>r</b>
-(4n+2)	20	Gemeinjahr
-(4n+1)	20	Gemeinjahr

IV.

#### Von -235 bis +36.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	des eben beginnenden Siriusjahres
-4n und $+4n$	Juli 20	Gemeinjahr
-(4n+3) u. $+(4n+1)$	20	Gemeinjahr
-(4n+2) u. $+(4n+2)$	20	Gemeinjahr
-(4n+1) u. $+(4n+3)$	20	Schaltjahr

V.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
4 n	Juli 20	Gemeinjahr
4n + 1	20	Gemeinjahr
4n+2	20	Schaltjahr
4n + 3	21	Gemeinjahr

## Elektrochemische Untersuchungen

(IV. Mittheilung)

von

Prof. Franz Exner, c. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

#### § 14. Über Concentrationsströme.

Aus den Tabellen der vorangegangenen Mittheilungen, welche sich auf die Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Lösungen einerseits und zwischen verschieden concentrirten Lösungen anderseits beziehen, lassen sich alle jene Werthe entnehmen, die zur Charakteristik der sogenannten Concentrationselemente nöthig sind; unter letzteren sind im Allgemeinen solche Combinationen verstanden, bei welchen zwei Elektroden aus dem gleichen Metall in verschieden concentrirte Lösungen ein und desselben Salzes tauchen, abgesehen davon, ob letzteres das Elektrodenmetall, oder ein anderes als Kation enthält. Bezeichnen  $F_1$  und  $F_2$  die beiden Lösungen, so ist die ganze elektromotorische Kraft eines solchen Elementes durch die Summe  $M|F_1+F_1|F_2+F_2|M$  gegeben und diese Summe lässt sich aus den oben erwähnten Tabellen entnehmen.

Dabei zeigt sich, dass diese Summe sehr wesentlich durch die Grössen  $M|F_1$ , respective  $F_2|M$  bedingt ist, d. h. dass die Kraft einer solchen Combination keineswegs, wie dies häufig angenommen wird, in erster Linie oder gar ausschliesslich vom Werthe  $F_1|F_2$  abhängt; ändert man die Concentration

<sup>1</sup> Diese Sitzber., Bd. C, S. 607, und CI, S. 627 und 1436.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Vergl. z. B. J. Moser, Monatshefte für Chemie, Bd. VI.

von  $F_1$ , so ändert man damit nicht nur die Grösse  $F_1|F_2$ , sondern auch  $M|F_1$ . Aus der beobachteten Gesammtkraft eines solchen Elementes kann man somit durchaus keinen Schluss auf den Werth  $F_1|F_2$  ziehen, und es ist klar, dass eine Berechnung dieses Werthes sich durch Beobachtung der Gesammtkraft nicht controliren lässt. Es kann vorkommen, dass der Werth  $F_1|F_2$  kleiner, oder dass er grösser ist als letzterer; auch kann das Vorzeichen ein entgegengesetztes sein, so dass durch eine derartige Bestimmung selbst der Sinn des Concentrationsstromes falsch ermittelt wird.

Ich gebe im Folgenden drei typische Beispiele dieses Verhaltens, für welche die Zahlen aus §. 8 der II. Mittheilung entnommen sind.

1. Zn in  $ZnSO_4$ . Die beiden Lösungen waren die an obiger Stelle mit I und III bezeichneten und enthielten  $18\cdot 4^0/_0$ , resp.

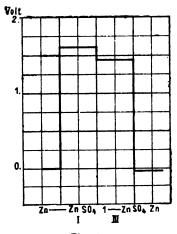


Fig. 1.

 $1^{0}/_{0}$  des negativen Jons (SO<sub>4</sub>). Fig. 1 stellt das Diagramm des offenen Elementes dar; es wirkte hier die Kraft  $F_{1}|F_{2}$  in gleichem Sinne, wie die Gesammtkraft E, doch ist letztere sehr viel kleiner als erstere.

In Zahlen ausgedrückt ergibt sich Folgendes:

$$E = \operatorname{Zn}|I + I|III + III|Zn$$

und da nach dem Früheren in Volt

$$Zn|I = 1.61$$
  
 $IIII = -0.15$   
 $III|Zn = -1.48$ 

ist, so folgt  $E=-0\cdot02$  Volt; die thatsächliche Kraft  $F_1|F_2$  ist also hier siebenmal so gross als die beobachtete Gesammtkraft des Elementes.

Ein aus zwei Gefässen a und b, die mit den Lösungen I und III gefüllt und durch einen capillaren Bügel verbunden waren, zusammengestelltes Element wurde zum Vergleiche mit obigen untersucht, und zwar sowohl im offenen, wie im geschlossenen Zustande; in letzterem Falle wurden die beiden Zn-Elektroden direct mit einander metallisch verbunden. Es ergab sich offen (am Elektrometer) E = -0.025, in genügender Übereinstimmung mit obigem Werthe.

Um das Element auch in geschlossenem Zustande zu untersuchen, wurde der die Elektroden verbindende Bügel an's Elektrometer, und die Flüssigkeiten in a und b durch das System  $\operatorname{Cu}|\operatorname{CuSO_4}|\operatorname{H_2O}$  (wie bei vielen früheren Messungen) zur Erde geleitet.

Es ergaben sich so die Werthe

Die Differenz — also in diesem Falle die ganz in den capillaren Bügel fallende Gesammtkraft E — betrug —0.026.

Berechnet man diese Einzelwerthe nach den früher gefundenen Zahlen, so ergibt sich für a:

$$\frac{\text{Cu}[\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{I} = 0.54]}{\text{I}[\text{Zn} = -1.61]} = -1.07$$

und für das Gefäss b:

$$\frac{\text{Cu}[\text{CuSO}_{4}]H_{2}\text{O}[\text{III} = 0.39]}{\text{III}[\text{Zn} = -1.48]} = -1.09,$$

also wieder in Übereinstimmung mit den für a und b direct beobachteten Werthen; die Gesammtdifferenz beträgt auch hier wieder -0.02 Volt.

2. **Mg** in  $MgSO_4$  (Fig. 2). Die hier verwendeten Lösungen I und III enthielten denselben Procentgehalt an  $SO_4$ , wie die früheren; wie Fig. 2 zeigt, ist aber jetzt die Kraft  $F_1|F_2$  der Gesammtkraft E entgegengesetzt gerichtet, so dass man aus Beobachtung der letzteren allein einen ganz falschen Schluss auf die Richtung der ersteren ziehen würde.

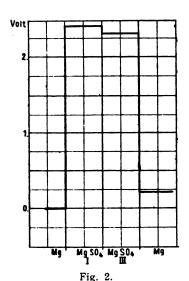
Bei directer Messung des offenen Elementes wurde gefunden:

$$E = 0.221$$
.

Die Berechnung nach den Zahlen des §. 8 ergibt dafür:

$$Mg|I = 2.44$$
 $I|III = -0.08$ 
 $III|Mg = -2.12$ 

oder E = 0.24, was mit obigem Werth in Anbetracht des Umstandes genügend übereinstimmt, dass einzelne dieser Werthe



nur durch Beobachtung mit einer frei tropfenden Quecksilberelektrode gewonnen werden können, bei welcher Methode Fehler von einigen Hunderteln Volt kaum zu vermeiden sind.

Für den Fall des geschlossenen Elementes wurde nach derselben Methode wie beim ZnSO<sub>4</sub>, gefunden:

wenn das Gefäss a abgeleitet war -1.868, wenn das Gefäss b abgeleitet war -1.657.

Die Differenz von 0.211 Volt steht mit dem direct beobachteten Werth 0.221 und dem berechneten E = 0.24 zwar nicht in guter, aber immerhin in genügender Übereinstimmung.

Die Einzelpotentiale bei Ableitung der Gefässe a und b berechnen sich nach den Zahlen des §. 8 wie folgt.

Für a:

$$\frac{\text{Cu}|\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{I}}{\text{I}|\text{Mg} = -2.44} = -1.97.$$

Für b:

$$\frac{\text{Cu}|\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{III} = 0.39}{\text{III}|\text{Mg} = -2.12} = -1.73$$

oder E=0.24 wie oben; es stimmen diese Einzelwerthe hier weniger gut mit den beobachteten, als bei  $ZnSO_4$ .

Dass der Hauptgrund dieser Fehler wie schon erwähnt in der schwierigen, mit der freien Tropfelektrode ausgeführten Messung der Werthe I|III zu suchen sei, das beweist die viel bessere Übereinstimmung in Fällen, wo die Werthe  $F_1 | F_2$  gegen die anderen verschwindend sind, wie aus den folgenden Zahlen erhellt, die sich auf die Lösungen II (8% SO4) und III des MgSO4 mit Mg-Elektroden beziehen.

In diesem Falle gab das offene Element direct 0.191 Volt, während die Berechnung aus den Zahlen des §. 8 dafür liefert:

$$Mg|II = 2 \cdot 32$$
 $II|III = 0 \cdot 00$ 
 $III|Mg = -2 \cdot 12$ 

oder E = 0.20.

Für das geschlossene Element wurde gefunden:

bei Ableitung in 
$$a - 1.914$$
, bei Ableitung in  $b - 1.716$ .

Die Differenz ist 0.198. Für die Einzelwerthe von a und b berechnet sich:

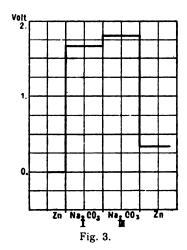
$$\frac{\text{Cu}|\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{II} = 0.39}{\text{II}|\text{Mg} = -2.32} = -1.93$$

und

$$\frac{\text{Cu}|\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{III} = 0.39}{\text{III}_{1}\text{Mg} = -2.12} = -1.73$$

und daraus der obige Werth E = 0.20.

3. Zn in  $Na_2CO_3$  (Fig. 3). Als dritten Typus endlich wähle ich Zn in verschieden concentrirten Lösungen von  $Na_2CO_3$ ; hier stimmt die Richtung des eigentlichen Concentrationsstromes  $F_1 | F_2$  mit der des Gesammtstromes E überein, aber an



Grösse bleibt derselbe wesentlich hinter letzterem zurück. Die Lösungen I und III enthielten  $5^{0}/_{0}$ , beziehungsweise  $0 \cdot 02^{0}/_{0}$ CO<sub>3</sub> Das offene Element gab  $E = 0 \cdot 30$  Volt. Berechnet man E aus den Einzelwerthen, so erhält man:

$$Zn|I = 1.68$$
  
 $I_1III = 0.12$   
 $III|Zn = -1.46$ 

oder E = 0.34.

Als Einzelwerthe im geschlossenen Elemente wurde gefunden:

bei Ableitung in 
$$a cdots cdots -1.350$$
  
bei Ableitung in  $b cdots cdots -1.070$ ,

was einen Werth E = 0.28 ergeben würde.

Die Berechnung obiger Einzelwerthe ergibt:

$$Cu|CuSO_4|H_2O|I = 0.27$$
  
 $I|Zn = -1.68$  = -1.41

und

$$\frac{\text{Cu}|\text{CuSO}_{4}|\text{H}_{2}\text{O}|\text{III} = 0.39}{\text{III}|\text{Zn} = -1.46} = -1.07,$$

welche Werthe mit den direct beobachteten Potentialen bei Ableitung in a und b genügend übereinstimmen.

Aus dem Vorstehenden ersieht man, dass aus der Gesammtkraft eines Concentrationselementes durchaus kein Schluss, nicht einmal ein qualitativer, auf die Potentialdifferenz der beiden Flüssigkeiten gezogen werden kann.

# §. 15. Über die Temperaturcoëfficienten galvanischer Elemente.

In meinen Untersuchungen über die Natur der galvanischen Polarisation 1 habe ich den Nachweis geliefert, dass die elektromotorische Kraft der Polarisation sich mit der Wärmetönung des elektrolytischen Processes deckt, mit anderen Worten, dass dieselbe ihren Grund in der Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen hat; diese Ansicht, die der damals herrschenden von einer Änderung der Contactkraft an den Elektroden zuwiderlief, ist jetzt allgemein angenommen und es ergeben sich aus derselben einige Consequenzen, auf die im Folgenden noch kurz eingegangen werden soll.

Wenn die Polarisation durch die Wärmetönung des elektrolytischen Processes bestimmt und gemessen ist — wie dies bei allen glatt verlaufenden Reactionen zutrifft — so muss zur Zersetzung eines Elektrolyten auch eine bestimmte Kraft erforderlich sein; diese, das sogenannte Polarisationsmaximum, zeigt

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 78 (1878).

sich im Allgemeinen veränderlich je nach den Versuchsbedingungen, schliesst man aber die secundären Vorgänge möglichst aus, so kommt man auf den gesuchten constanten Werth, wie ich dies speciell für die Polarisation von Platin in Schwefelsäure nachgewiesen habe.<sup>1</sup>

In jüngster Zeit ist auch Le Blanc<sup>2</sup> durch ganz identische Versuche zu dem gleichen Resultate gekommen; er nennt den betreffenden Punkt den »Zersetzungspunkt«.

Es ist ferner unmittelbar klar, dass in einem Gemisch verschiedener Elektrolyte, z. B. Salzlösungen, durch eine bestimmte elektromotorische Kraft immer nur jene Salze zersetzt werden können, deren Wärmetönung unterhalb der verwendeten elektromotorischen Kraft liegen; dass es auf diese sehr einfache Weise möglich ist, durch Anwendung passender Kräfte elektrolytische Trennungen vorzunehmen, ist vor Kurzem durch eine Untersuchung von Freudenberg<sup>3</sup> gezeigt worden.

Ferner ist klar, dass die Temperatur auf den Werth der Polarisation einen wesentlichen Einfluss haben muss; denn steigern wir dieselbe bis zur Dissociationstemperatur des Elektrolytes, so muss, da dann die Verbindungswärme desselben gleich Null wird, auch die Polarisation den Werth Null annehmen.

Auch diese Folgerung hat eine vollständige Bestätigung gefunden durch die Untersuchungen von Poincaré,<sup>4</sup> welcher in geschmolzenen Salzen die Polarisation bei der Dissociationstemperatur in der That auf Null sinken sah.

Aber auch wenn wir mit der Temperatur nicht bis zum Dissociationspunkte gehen, werden wir stets eine Abnahme der Polarisation erwarten müssen — und die später folgenden Beobachtungen bestätigen dies — denn es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass die Stabilität einer chemischen Verbindung, wenn secundäre Einflüsse ausgeschlossen sind, mit steigender Temperatur abnehmen muss.

<sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 77 (1878).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Zeitschr für phys. Chem., Bd. 8 (1891). Vergl. auch Nourisson, C. R. Bd. 118, S. 189 (1894).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Chem. Ber. Bd. 25 (1892).

<sup>4</sup> C. R. Bd. 110 (1890)..

Wenn wir ferner berücksichtigen, dass in den galvanischen Elementen die einzelnen Potentialdifferenzen an den Polen mit den dort sich abspielenden chemischen Processen in innigem Zusammenhange stehen, ja durch dieselben geradezu bedingt sind, so werden wir erwarten müssen, dass jeder Einfluss, der den Wärmewerth dieser Processe ändert, auch für die elektromotorische Kraft des Elementes massgebend sein wird; durch diesen Umstand scheinen mir die Temperaturcoëfficienten der Elemente wenn nicht ausschliesslich, so doch in allererster Linie bestimmt.

Betrachten wir z. B. das Daniell'sche Element; die beiden in Betracht kommenden Reactionen sind hier die Bildung des ZnSO<sub>4</sub> und die Zersetzung des CuSO<sub>4</sub>; erstere trägt im positiven, letztere im negativen Sinne zur Bildung der elektromotorischen Kraft des Elementes bei. Wären die Temperaturcoëfficienten dieser beiden Reactionen gleich, d. h. wäre die Differenz der Bildungswärme (und Lösungswärme in Wasser) dieser beiden Salze bei allen Temperaturen constant, so wäre auch der Temperaturcoëfficient des Elementes gleich Null; nun trifft diese Voraussetzung aber nicht allgemein zu, es hängt der Temperaturcoëfficient dieser Reactionen sehr wesentlich von den Concentrationen der Lösungen ab und mit diesen variirt daher auch der Temperaturcoëfficient des Elementes.

Eine Erwärmung des Daniell'schen Elementes als Ganzes hat unter allen Umständen eine Verminderung des Potentialgewinnes am Zn-Pol, und eine Verminderung des Potentialverlustes am Cu-Pol zur Folge; von dem Grössenverhältnisse beider hängt der Temperaturcoëfficient des Elementes ab.

Speciell für das Daniell'sche Element ist der Einfluss der Concentrationen auf den Temperaturcoëfficienten durch die Untersuchungen von Ebeling, Meyer<sup>2</sup> und Gockel<sup>3</sup> ausser Zweifel gesetzt und für eine Reihe von Concentrationen auch für die beiden Pole einzeln bestimmt.

<sup>1</sup> Wied. Ann. Bd. 30 (1887).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Wied. Ann. Bd. 33 (1888).

<sup>3</sup> Wied. Ann Bd. 40 (1890).

Das Voller'sche Normaldaniell, charakterisirt durch eine ZnSO<sub>a</sub>-Lösung vom spec. Gew. 1.20 und eine CuSO<sub>a</sub>-Lösung vom spec. Gew. 1:102, zeichnet sich bekanntlich durch seine ausserordentliche Unempfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen aus; nach dem Vorstehenden müsste man diese darauf zurückführen, dass bei den gewählten Concentrationen sich die beiden Temperaturcoëfficienten der Pole gerade compensiren. Da in den obcitirten Arbeiten sich die eben genannten Concentrationen nicht finden, so habe ich dieselben speciell untersucht; es wurde zu diesem Zwecke ein Daniell aus drei getrennten Gefässen a, b, c hergestellt, dieselben untereinander durch Heber verbunden, a und b mit  $ZnSO_a$  und c mit  $CuSO_a$  von den genannten Concentrationen gefüllt. In a tauchte eine Zn-, in c eine Cu-Elektrode; sowohl a als c konnten separat erwärmt, respective abgekühlt werden, während gleichzeitig die elektromotorische Kraft des Elementes an einem Elektrometer gemessen wurde. Es ergaben sich so die Resultate der folgenden Tabelle, in welcher  $\Delta_c$  und  $\Delta_z$  die Differenzen der bei  $T^0$  des einen Poles beobachteten Kraft des Elementes mit jener bei beiderseits 20° darstellen.

T	Zn'ZnSO <sub>4</sub> auf T° Cu CuSO <sub>4</sub> auf 20°	$\Delta_z$	Zn ZnSO <sub>4</sub> auf 20° Cu Cu SO <sub>4</sub> auf <i>T</i> °	$\Delta_c$
20	1.000		1.000	
95	0 937	-0.063	1.055	+0.055
90	0.943	0·057	1 · 049	+0 049
85	0.949	-0.051	1 · 045	+0·045
80	0.954	-0·046	1.042	+0.042
75	0.958	-0·042	1.039	+0.038
70	0.962	-0.038	1.037	+0.037
65	0.966	-0.034	1.033	+0.033
60	0.868	-0.031	1.030	+0.030
55	0.972	-0.028	1.028	+0.028
50	0.976	-0.024	1.023	+0.053
45	0.880	-0.020	1.020	+0.050
40	0.984	- 0.016	1.016	+0.016

T	Zn ZnSO <sub>4</sub> auf T° Cu CuSO <sub>4</sub> auf 20°	Δ <sub>z</sub> ·	Zn ZnSO <sub>4</sub> auf 20° Cu CuSO <sub>4</sub> auf T°	Δ <sub>c</sub>
35	0.989	-0.011	1.012	+0.012
30	0.993	-0.007	1.008	+0.008
25	0.997	-0.003	1.004	+0.004
20	1.000	<u>+</u> 0 000	1.000	±0.000
15	1.004	+0.004	0.997	-0.003
10	1.008	+0.008	0.994	-0.006
5	1.012	+0.012	0.991	-0.008
0	1.015	+0.012	0.987	-0 013
-5	1.017	+0.017	0.984	-0.016
İ				

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die beiden Temperaturcoëfficienten sich in dem Intervall von  $20^{\circ}-70^{\circ}$  in der That vollständig compensiren, obwohl jeder für sich eine Änderung der Kraft des Elements von fast  $4^{\circ}/_{0}$  hervorbringen würde; selbst bei 95° ist der Unterschied beider noch gering und beträgt nur 0.008~D im Sinne einer Abnahme der Gesammtkraft.

Dem Vorstehenden entsprechend müssen alle Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Flüssigkeiten einen Temperaturcoëfficienten aufweisen, der durch den Temperaturcoëfficienten der zugehörigen Wärmetönung gegeben ist; beständen
alle auftretenden Reactionen nur einfach in Verbindungen
vorher isolirter Stoffe, so wären zweifellos sämmtliche Coëfficienten negativ. So einfache Reactionen kommen aber wohl
nur in vereinzelten Fällen vor, im Allgemeinen sind die
auftretenden Verbindungen von gleichzeitigen Zersetzungen,
Lösungen, Absorptionen etc. begleitet, so dass der thatsächlich
der Beobachtung zugängliche Temperaturcoëfficient als die
Summe mehrerer einzelner zu betrachten ist, die sich auf
verschiedene, sehr oft nicht einmal der Art nach angebbare
Reactionen beziehen.

Ich gebe im Folgenden die Änderungen der Potentialdifferenz zwischen Metallen und einigen Flüssigkeiten mit der Temperatur an. Dieselben wurden in der Weise erhalten, dass die Flüssigkeit in zwei durch einen Bügel verbundene Gefässe gefüllt, in jeder derselben eine Elektrode aus dem zu untersuchenden Metall getaucht, die eine derselben zur Erde und die andere zum Elektrometer geleitet wurde. Bei gleicher Temperatur in beiden Gefässen ist der Ausschlag Null, erwärmt man aber die Flüssigkeit in einem der beiden Gefässe — es war dies immer das mit dem Elektrometer verbundene, — so zeigt sich im Allgemeinen ein Ausschlag. Da die Metalle in den Flüssigkeiten negativ werden, so bedeutet ein positives Vorzeichen in den folgenden Tabellen, dass die Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit am erwärmten Pol kleiner ist als am kalten. Die Temperatur des letzteren war durchwegs 25°, die des ersteren 92° C.

Die der Untersuchung unterzogenen Flüssigkeiten waren die Säuren  $H_2SO_4$  (1%),  $HNO_3$  (0.6%),  $C_2H_4O_2$  (0.6%) und  $C_2H_2O_4$  (7%); ferner KOH (5%) und NaOH (0.3%).

Metalle in Säuren.

Metall	$H_2SO_4$	HNO <sub>8</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> O <sub>4</sub>
Mg	-0·11	-0.10	-0.16	-0.11
Fe	-0·17 -0·02	+0.06 <sub>1</sub>	-0·16 -0·05	-0·20 +0·03
Ni	-0.08	-0.10	-0.11	-0.05
Cu	+0.04	-+0.04	+0.03	-0.01
Zn	+0.01	-0.05	+0.02	+0.03
Ag	+0.01	+0.04	+0.04	+0.02
Cd	+0·005 -0·01	+0·05 +0·02	+0.06	+0·005 0
Sn	-0·02	+0·02 -0·02	+0.02	0

<sup>1</sup> Zuerst - dann +.

Me	talle	in	Baser	`
TATE	Laure	111	Dasci	ı.

Metall	кон	Na OH
Mg	-0·15 +0·24 -0·20 -0·20 -0·10 -0·16 -0·21 -0·11 -0·12 -0·12	-0·38 +0·35 -0·18 -0·24 -0·20 -0·10 -0·13 -0·10 -0·30 -0·13

Im Gang der Zahlen dieser beiden Tabellen lässt sich eine gewisse Regelmässigkeit nicht verkennen; gewisse Metalle, wie Mg, Al, Fe, Ni zeigen in den Säuren fast durchwegs einen negativen Temperaturcoëfficienten, d. h. die Erwärmung wirkt in dem Sinne, dass die Summe der Wärmetönungen der Reactionen am erwärmten Pol grösser wird, als am kalten. Das umgekehrte Verhalten zeigen Cu, Zn, Ag und Cd, während Sn und Pb überhaupt nur sehr kleine und unbestimmte Änderungen erkennen lassen. In KOH und NaOH wurden sämmtliche Metalle mit Ausnahme des Al bei höherer Temperatur stärker negativ als bei tiefer.

Während man bei der vorstehenden Anordnung über die Änderung der Reactionswärmen mit der Temperatur nicht viel aussagen kann, da die betreffenden Reactionen sich nicht übersehen lassen, gelingt dies besser bei Untersuchung der Polarisationen bei höherer Temperatur. Da die Polarisation quantitativ durch die Wärmetönung der auftretenden Reactionen bestimmt, diese Wärmetönung aber stets positiv ist, so lässt sich auch ohne strenge Kenntniss dieser Reactionen voraussagen, dass die Polarisation mit der Temperatur abnehmen muss; je näher diese dem Dissociationspunkte der zu zersetzenden Verbindung kommt, desto mehr wird sich die Polarisation

dem Werthe Null nähern und erreicht diesen, wie schon oben gezeigt wurde, bei der Dissociationstemperatur selbst.

Über den Einfluss der Temperatur auf die Polarisation liegen bisher nur einige vereinzelte Messungen vor; so hat für Platinelektroden in angesäuertem Wasser schon Beetz vor langer Zeit eine Abnahme der Polarisation mit steigender Temperatur constatirt; auch Bartoli¹ fand in concentrirter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> eine Abnahme der Polarisation von 2·80 bis 1·13 Volt zwischen 5° und 250° C. Um diese Verhältnisse genauer zu studiren, habe ich die im Folgenden mitgetheilten Messungen der Polarisation in Säuren, Basen und Salzlösungen bei verschiedenen Temperaturen ausgeführt; als Elektroden dienten Platinbleche bei allen Versuchen, nur bei den Chlorverbindungen wurden Kohlenplatten verwendet.

Der Strom eines Accumulators von der elektromotorischen Kraft E wurde durch einen grossen Widerstand W und die Zelle geschlossen; die Dimensionen der letzteren waren derartige, dass ihr Widerstand gegen den übrigen der Schliessung zu vernachlässigen war. Von den beiden Elektroden wurde dann der Strom durch ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer mit  $1000\,\Omega$  Widerstand abgezweigt und an letzterem die Polarisation während des Durchganges des primären Stromes direct abgelesen. Die Grössen E und W, von denen ja bei grossen Elektroden die Polarisation zum Theile abhängt, sind im Folgenden bei jedem Versuche angegeben; die Ablesungen erfolgten von 10 zu 10 Graden sowohl bei Erwärmung, als bei Abkühlung der Zelle, um einen etwaigen Einfluss des Nachbleibens der Thermometer thunlichst zu eliminiren.

Die betreffenden Polarisationen  $P_E$  und  $P_A$  sind in Volts angegeben.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Nuovo Cim. (3) Bd. 7 (1880).

1. Pt in  $H_2SO_4$  (1:10) E = 3.68 Volt,  $W = 1000 \Omega$ .

2. C in HCl  $(12^{0}/_{0})$ E = 5.48, W = 600.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	1.82	1.82	1 · 820	20	1.70	1 · 65	1.675
30	1.80	1.80	1 800	30 -	1.64	1.58	1.610
40	1 · 78	1.77	1.775	40	1.58	1.53	1.555
50	1.73	1.71	1 · 720	50	1.54	1.51	1 · 525
60	1.70	1.66	1 - 680	60	1 · 49	1 · 48	1 · 485
70	1.61	1.62	1.615	70	1 · 44	1 · 43	1 • 435
80	1.56	1.55	1.555	80	1.40	1 · 39	1.395
90	1 · 41	1 · 42	1.415	90	1.35	1.35	1.350
							ļ

- 3. Pt in HNO<sub>3</sub>  $(20^{\circ}/_{\circ})$ E = 5.5, W = 600.
- 4. Pt in  $C_2 H_4 O_2 (25^0/_0)$ E = 5.5, W = 1000.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	T	$P_{E}$	$P_A$	Mittel
20	1.16	1.18	1.170	20	1 98	2.04	2.010
30	1.10	1.12	1-110	30	1.92	2.00	1.960
40	1.08	1.08	1.080	40	1 · 87	1.95	1.910
50	1.02	1.03	1.025	50	1.81	1.90	1.855
60	0.99	0.98	0.985	60	1 · 77	1.86	1.815
70	0.95	0 94	0.945	70	1.70	1.80	1.750
80	0.92	0.92	0.920	80	1 · 60	1.69	1.645
90	0.90	0.90	0.900	90	1.54	1.54	1.540

5. Pt in NaOH  $(5^{0}/_{0})$  $E = 5 \cdot 6$ , W = 1000.

6. Pt in KOH  $(0.3^{\circ}/_{0})$ E = 5.6, W = 1000.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel		Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	1.92	1.93	1.925		20	1.90	1.95	1.925
30	1 · 86	1 · 88	1.870		30	1.78	1 · 78	1.780
40	1.82	1.83	1.825		40	1 · 72	1 · 72	1.720
50	1.77	1.77	1.770		50	1.67	1.69	1.680
60	1.73	1.72	1.725		60	1.62	1.64	1.630
70	1.67	1 · 66	1.665		70	1.60	1.60	1.600
80	1.64	1 · 63	1 · 635		80	1.58	1.57	1.575
90	1.60	1.60	1.600		90	1.56	1.56	1 · 560
]								

Bei den folgenden Salzlösungen bedeuten die Procente den Gehalt an wasserfreiem Salze.

7. Pt in  $CuSO_{4}$  (concentrirt) E = 3.70, W = 1000.

_					
	l	$P_{E}$	$P_A$	Mittel	
	20	1 · 42	1.43	1 · 425	
	<b>3</b> 0	1.40	1.40	1 · 400	
	40	1.35	1 · 34	1 · 345	
	50	1.30	1.30	1 · 300	
	60	1.25	1 · 24	1 · 245	
	70	1.18	1 · 18	1.180	
	80	1.13	1 · 15	1 · 140	
	90	1 · 10	1.10	1.100	

Die folgende Beobachtung bezieht sich auf ein anderes Eund W; es ändern sich dadurch die Werthe von P etwas, der allgemeine Gang mit der Temperatur jedoch nicht.

8. Pt in CuSO<sub>4</sub> (concentrirt) E = 1.90, W = 500.

<del></del>		·	
T	$P_E$	$P_{A}$	Mittel
20	1 · 22	1 · 22	1.220
30	1.20	1.20	1 • 200
40	1 · 19	1 · 19	1 • 190
50	1.14	1 · 14	1 · 140
60	1 · 10	1.10	1 100
70	1.06	1.08	1.070
80	1.02	1.03	1.025
90	1.00	1.00	1.000

9. Pt in ZnSO<sub>4</sub> (17%); spec. Gew. 1:20)

E = 5.5, W = 1000.

10. Pt in Ni	SO <sub>4</sub>	$(8\cdot4^{0}/_{e})$
E = 5.48	W =	1000.

		,							
Ī	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel		Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
	20	2.42	2 · 43	2 · 425		20	2.12	2.08	2.100
	30	2.40	2 · 41	2.405	1	<b>3</b> 0	2.08	1.98	2.030
	<b>4</b> 0	2.38	2.39	2.385		40	2.00	1.92	1.960
	50	2.33	2 32	2.325		50	1.86	1.87	1.865
	60	2.30	2 30	2.300		60	1.78	1.80	1.790
	70	2.27	2.28	2 · 275		70	1.72	1.74	1.730
	80	2.25	2.02	2.135		80	1.66	1.68	1.670
	90	2.21	1 · 95	2.080		90	1.61	1.62	1.615
ı		l			l		i	l	

11. C in  $\text{Cu Cl}_2$   $(18 \cdot 8^0/_0)$  $E = 5 \cdot 48$ , W = 600.

12. C in NiCl<sub>2</sub>  $(18 \cdot 2^{0}/_{0})$  $E = 5 \cdot 48$ , W = 600.

T	$P_E$	T	$P_E$	$P_{A}$
20	0.80	20	1.35	1 · 83
30	0.78	30	1 · 32	1 · 68
40	0.75	40	1.30	1.58
50	0.72	50	1 · 28	1.51
60	0.68	60	1 · 28	1.51
70	0.65	70	1 · 28	1 · 50
80	0.62	80	1 · 27	1 • 48
90	0.59	90	1 · 28	1.37

13. C in  $ZnCl_2$   $(9.5^{\circ}/_{0})$ E = 5.5, W = 600.

T	$P_E$	$P_{A}$			
20	2.131	2 · 32			
30	2.08	2.22			
40	2.00	2 · 18			
50	1.92	1.99			
60	1.84	1.95			
70	1.80	1.91			
80	1 · 73	1 · 83			
90	1 · 69	1.71			

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Steigt allmälig von 0.9 bis zu obigem Werthe.

Der unregelmässige Gang in Nr. 11 bis 13, sowie die abnorm tiefen Werthe in Beobachtung 11 haben ihren Grund ohne Zweifel in dem Umstande, dass bei Anwendung von Kohlenplatten als Elektroden die Ausbildung der Polarisation geraume Zeit erfordert; in Nr. 12 und 13 bleiben daher die Werthe bei Erwärmung wesentlich hinter jenen bei Abkühlung zurück, da bei letzteren der Stromschluss schon ein längerdauernder war.

Es geht daher auch nicht an, Mittelwerthe aus  $P_E$  und  $P_A$  zu bilden; jedenfalls sind die Werthe unter  $P_A$  die zuverlässigeren.

Bei den folgenden Messungen mit C-Elektroden wurde bei jeder Temperatur das Constantwerden der Einstellung abgewartet.

14. C in Fe<sub>2</sub>Cl<sub>6</sub> 
$$(15 \cdot 2^{0}/_{0})$$
  
 $E = 5 \cdot 5$ ,  $W = 600$ .

15. C in 
$$MgCl_2$$
 (13·3°/<sub>0</sub>)  
 $E = 5.5$ ,  $W = 600$ .

Т	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	0.85	0.87	0.860	20	2 · 32	2 30	2.310
30	0.82	0.81	0.815	30	2 · 24	2.20	2.220
40	0 77	0.75	0.760	40	2.16	2 · 12	2.140
50	0.71	0 68	0.695	50	2.08	2.04	2.060
60	0.64	0.63	0.635	60	1 · 97	1 · 95	1.960
70	0.61	0.61	0.610	70	1 · 89	1.88	1 · 885
80	0.55	0.26	0.555	80	1 · 83	1 · 83	1.830
90	0.51	0.51	0.510	90	1.78	1.78	1.780

16. Pt in  $\text{Fe}_2(\text{NO}_3)_6$  (11·50/0) 17. Pt in  $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$  (13·30/0) E = 5.5, W = 600.E = 3.68, W = 1000.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	1.40	1 · 36	1 · 380	20	1.50	1.51	1.505
30	1.30	1 · 28	1 · 290	30	1.50	1.51	1.505
40	1.20	1.18	1.190	40	1 · 45	1 42	1 · 435
50	1.13	1.12	1 · 125	50	1 · 42	1 · 38	1.400
60	1.09	1.04	1.065	60	1 · 40	1 · 32	1.340
70	1.02	0.98	1 · 000	70	1 · 35	1 · 27	1.310
80	0.96	0.93	0.945	80	1.30	1 · 24	1.270
90	0.65	0.90	0.910	90	1 · 24	1.22	1 · 230

18. Pt in Ni(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> (13·0°/<sub>0</sub>) 19. Pt in Zn(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> (13·4°/<sub>0</sub>) E = 3.68, W = 1000.

E = 5.6, W = 1000.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	1.68	1.72	1.700	20	2 · 22	2.25	2 · 235
30	1.64	1.66	1 650	30	2.16	2 · 22	2.190
40	1.60	1.62	1.610	40	2.10	2 · 15	2.125
50	1.55	1.57	1 560	50	2.06	2.08	2.070
60	1.50	1 · 52	1.510	60	1 · 95	1.96	1.955
70	1 · 44	1 · 45	1 · 445	70	1.90	1.90	1.900
80	1 · 38	1.38	1 · 380	80	1.86	1.88	1.870
90	1.31	1 32	1.315	90	1.84	1.84	1.840
			I				

E = 5.5, W = 600.

20. Pt in  $Mg(NO_3)_2$   $(10.5^0/_0)$  21. Pt in  $Na_2(NO_3)_2$   $(12.1^0/_0)$ E = 5.5, W = 600.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	2.20	2.38	2 · 290	20	2.40	2.50	2.450
30	2.10	2.28	2.190	<b>3</b> 0 ·	2.30	2.40	2.350
40	2 01	2.13	2.070	40	2 · 22	2.34	2.280
50	1.78	1.98	1.880	50	2.14	2 · 25	2 · 195
60	1.68	1.75	1.715	60	2.05	2 · 12	2.085
70	1.51	1.62	1.565	70	1.93	2.02	1.975
80	1.40	1 53	1.465	80	1.88	1.92	1.900
90	1.35	1.38	1.365	90	1.82	1 · 82	1.820

E = 3.7, W = 1000.

22. Pt in  $Cu(C_2H_3O_2)_2$   $(5^0/_0)$  23. Pt in  $Ni(C_2H_3O_2)_2$   $(5\cdot 9^0/_0)$ E = 5 48, W = 1000.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	Т	$P_E$	$P_A$	Mittel
20	1.14	1.16	1 · 150	20	1.80	1.75	1.775
30	1.10	1.10	1.100	30	1 · 72	1 · 39	1 · 705
40	1.00	1.03	1.015	40	1.65	1.63	1.640
50	0.96	0.97	0.965	50	1.57	1.57	1.570
60	0.91	0.80	0.905	60	1.50	1 · 49	1 · 495
70	0.82	0.83	0.840	70	1 · 43	1 • 41	1 · 420
80	0.80	0.78	0.790	80	1.33	1 · 32	1.325
90	0.74	0.74	0.740	90	1 · 27	1 · 27	1 · 270
1							

24. Pt in  $Zn(C_2H_3O_2)_2$  (5%) 25. Pt in  $Mg(C_2H_3O_2)_2$  (1%) E = 5.5, W = 1000. E = 5.5, W = 600.

T	$P_E$	$P_A$	Mittel	T	$P_{E}$	$P_{A}$	Mittel
-	- E	- A		<del></del>	- E	- A	
20	2.33	2.35	2.340	20	2.50	2.55	2.525
30	2 · 27	2.32	2 · 295	30	2.40	2.46	2 · 430
40	2.21	2.28	2 · 245	40	2.31	2.37	2 · 340
50	2.15	2 · 22	2.185	50	2 · 25	2.28	2 · 265
60	2.08	2.16	2 · 120	60	2 · 20	2.24	2 · 220
70	1.98	2.07	2.025	70	2.15	2.17	2.160
80	1.86	1.92	1.890	80	2.09	2.10	2.095
90	1.81	1.81	1.810	90	2.02	2.00	2.010
1		i					

Wie aus den Zahlen der vorstehenden Tabellen erhellt, nimmt, ganz unserer Voraussetzung gemäss, der Wärmewerth aller untersuchten Verbindungen mit steigender Temperatur ab und zwar in den meisten Fällen sehr bedeutend; drückt man die Abnahme der Polarisation zwischen 20° und 90° in Procenten des Werthes bei 20° aus, so ergeben sich die folgenden Zahlen:

Zersetzte Verbindung	$100  \frac{P_{20} - P_{90}}{P_{20}}$
1. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	$22 \cdot 4^{0}/_{0}$
2. HCl	19.4
3. HNO <sub>3</sub>	23 · 1
4. C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>	23.0
5. Na OH	16.6%
6. KOH	18.7
7. CuSO <sub>4</sub>	22.5%
8. CuSO <sub>4</sub>	18.0
9. Zn SO <sub>4</sub>	14.0
10. NiSO,	$23 \cdot 3$

Zersetzte Verbindung	$100  \frac{P_{20} - P_{90}}{P_{20}}$
11. CuCl <sub>2</sub>	$26 \cdot 2^{0}/_{0}$
12. Ni Cl <sub>2</sub>	25 · 1
13. Zn Cl <sub>2</sub>	26.3
14. Fe <sub>2</sub> Cl <sub>6</sub>	40.8
15. MgCl <sub>2</sub>	23.0
16. Fe <sub>2</sub> (NO <sub>3</sub> ) <sub>6</sub>	34.0%
17. $Cu(NO_3)_2 \dots$	18.0
18. Ni(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	23.0
19. $\operatorname{Zn}(\operatorname{NO}_3)_2 \ldots \ldots$	17.4
20. $Mg(NO_3)_2 \dots$	40.6
21. NaNO <sub>3</sub>	$25 \cdot 7$
22. Cu(C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> O <sub>2</sub> ) <sub>2</sub>	35.0%
23. $\operatorname{Ni}(C_2H_3O_2)_2 \dots$	28.8
24. $\operatorname{Zn}(C_{\mathfrak{g}}H_{\mathfrak{g}}O_{\mathfrak{g}})_{\mathfrak{g}}\ldots$	$22 \cdot 6$
25. $Mg(C_2H_3O_2)_2$	20.2

Eine Gesetzmässigkeit innerhalb der einzelnen Gruppen lässt sich hier nicht erkennen, ist auch kaum zu erwarten, da man es hier nicht mit den einfachen Verbindungen, sondern auch mit den Lösungen der Producte zu thun hat; welchen Gang aber die Temperaturcoëfficienten der Lösungswärmen einschlagen, das lässt sich vorläufig nicht übersehen.

Dass die Änderung der Polarisation von ZnSO<sub>4</sub> und CuSO<sub>4</sub> mit der Temperatur hier sehr viel grösser resultirt als bei der Untersuchung des Daniell, wo die Änderung an jedem Pol zwischen 20° und 90° nur circa 0·06 Volt betrug, dürfte seinen Grund darin haben, dass es sich hier um die Reactionen (Zn, O, SO<sub>3</sub>) und (Cu, O, SO<sub>3</sub>) handelt, im Daniell'schen Elemente dagegen aller Wahrscheinlichkeit nach um die Reactionen (Zn, SO<sub>4</sub>) und (Cu, SO<sub>4</sub>). Dafür spricht auch der Umstand, dass den Polarisationen die Werthe 2·34, respective 1·43 zukommen, den Potentialdifferenzen zwischen den Polen und den Flüssigkeiten im Daniell aber nur die Werthe 1·34, respective 0·34.

Wollte man die Temperaturcoëfficienten chemischer Reactionen auf dem eingeschlagenen Wege in ihrer Reinheit unter-

suchen, so müsste man dafür sorgen, dass ausser der gewünschten Reaction kein weiterer Vorgang, wie z. B. Lösung des Productes, eintritt; das stösst aber auf erhebliche Schwierigkeiten, indem die Producte der Elektrolyse, sobald sie nicht gelöst werden, sondern sich an den Elektroden absetzen, zu Störungen Veranlassung geben. (Die Elektrolyse geschmolzener Salze würde vielleicht ein geeignetes Mittel sein.)

Hätte ein galvanisches Element nur einen einzigen Potentialsprung und dementsprechend auch nur eine Reaction, so würde der Temperaturcoëfficient eines solchen Elementes zugleich der Coëfficient der betreffenden Reaction sein, d. h. da letzterer immer negativ ist, so müsste ein solches Element auch stets einen negativen Temperaturcoëfficienten aufweisen. Ich habe nun solche Elemente mit nur einem Potentialsprung angegeben, es sind das solche, die nur aus Grundstoffen bestehen und deren einer Pol durch Kohle gebildet wird, z. B. C|Br|M, wo M irgend ein durch Brom angreifbares Metall bezeichnet. Hier findet nur an der Stelle Br|M ein Potentialsprung statt entsprechend dem Wärmewerth (Br, M), und wird ein derartiges Element erwärmt, so müsste seine elektromotorische Kraft sinken.

Leider sind derartige Messungen für die meisten Metalle sehr ungenau wegen der Unlöslichkeit der gebildeten Bromverbindung, doch liess sich bei allen untersuchten Combinationen entweder eine deutliche Abnahme der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur oder ein Constantbleiben derselben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler constatiren; in keinem Falle aber zeigte sich eine Zunahme. So zeigte z. B. das Element Zn | Br | C bei den Temperaturen 2°, 20° und 50° die Werthe 1·57, 1·52 und 1·42 als Mittel mehrerer Versuche.

Bei Ag, Cd, Pb und Cu konnte ein deutlicher Effect nicht wahrgenommen werden, bei Ni dagegen sank der Werth zwischen 20° und 50° von 0.53 auf 0.45; ebenso bei Fe zwischen denselben Temperaturen von 0.51 auf 0.34.

Soweit somit gegenwärtig diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, wird man sagen müssen, dass der Wärmewerth einer

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 74 (1881).

chemischen Reaction mit steigender Temperatur abnimmt; die Temperaturcoëfficienten der galvanischen Elemente aber können als der Ausdruck dieses Effectes angesehen werden.

## §. 16. Über Verbindungswärmen.

In der Einleitung zur ersten Mittheilung¹ habe ich schon auf den Zusammenhang zwischen der elektrischen Energie einer Molekel und deren Bildungswärme im allgemeinen hingewiesen und den Satz ausgesprochen, \*dass die bei der Bildung von HCl aus H und Cl resultirende Wärme nichts anderes ist, als das Äquivalent der Arbeit, welche von den elektrischen Ladungen der Ionen bei Annäherung derselben bis auf Moleculardistanz geleistet wird\*.

Eine analoge Anschauungsweise ist theils gleichzeitig, theils später von Richarz<sup>2</sup> und von Ebert<sup>3</sup> ausgesprochen worden mit dem Unterschiede, dass von diesen nicht die Bildungswärme der chemischen Verbindungen, sondern die der Moleküle eines Grundstoffes aus den Atomen der Rechnung unterzogen wird; die Dissociationswärme, die für H2 und J2 angenähert bekannt ist, soll danach identisch sein mit der elektrischen Energie der betreffenden Molekeln. Was die dieser Rechnung zu Grunde liegende Vorstellung anlangt, dass z. B. die beiden Atome einer Wasserstoff oder einer Chlormolekel entgegengesetzte Ladungen im Molekül besitzen, so kann ich mich derselben nicht anschliessen; es scheinen mir dagegen sowohl chemische als physikalische Bedenken obzuwalten, die bisher, wie mir scheint, zu wenig berücksichtigt wurden. So ist es z. B. schwer verständlich, dass die positiv und die negativ geladenen Atome desselben Stoffes sich chemisch vollkommen gleich verhalten sollen. Oder, dass in einer Verbindung wie HCl sich doch immer H positiv und Cl negativ geladen findet; erzeugt man HCl aus H, und Cl,, so müssten nach obiger Vorstellung HCl-Moleküle entstehen nach dem Schema H<sub>+</sub>Cl<sub>-</sub>

<sup>1</sup> Diese Berichte. Bd, 100, Mai 1891.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Sitzungsber, der Niederrh, Gesellsch. 1890 und 1891, Verh, der phys. Gesellsch. zu Berlin 1891 und Wied. Ann., Bd. 52 (1894).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Wied. Ann., Bd. 50 (1893).

und ebensoviele H\_Cl<sub>+</sub>. Eine HCl-Lösung, der Elektrolyse unterworfen, müsste demnach an jedem Pol sowohl H als Cl liefern. Auch F. Braun<sup>1</sup> hat jüngst auf derartige Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die jedenfalls zu einer sehr vorsichtigen Anwendung dieser Vorstellungsweise mahnen.

Dass dagegen die Ionen eines Elektrolyten mit entgegengesetzten Ladungen behaftet sind, wird gegenwärtig kaum mehr in Zweifel gezogen werden; um nun die elektrische Arbeit zu berechnen, die bei der Bildung einer Molekel geleistet wird, ist die Kenntniss dreier Grössen erforderlich: erstens der Ladung die mit einem Atom verbunden ist, der sogenannten Valenzladung im Falle eines einwerthigen Atoms, zweitens der Moleculargrösse und drittens der Anzahl Moleküle in der Masseneinheit. Die erste Grösse folgt aus dem Faraday'schen Gesetze der Elektrolyse, die zweite und dritte aus der kinetischen Gastheorie. Besonders die dritte Grösse ist dabei mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet, indem die aus der Querschnittssumme resultirenden Werthe dafür um Hunderte von Procenten variiren. Ich habe darum zur Berechnung der letzteren einen anderen Weg eingeschlagen,2 der sich aus der Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes der Substanzen mit Hilfe der Dielektricitätsconstanten oder der Brechungsexponenten ergibt. Es hat dieses Verfahren auch den Vortheil, dass dadurch die fragliche, gewöhnlich mit N bezeichnete Zahl für jede Substanz unabhängig von den anderen bestimmt wird.

Ich gebe im Folgenden die Berechnung der Bildungswärme der HCl und des H<sub>2</sub>O unter der Voraussetzung, dass nur die elektrischen Kräfte dabei thätig sind, welche von Atom zu Atom wirken. Die elektrische Energie des Systems ist dabei gegeben durch das Product der Atomladungen, dividirt durch die Moleculardistanz, und diese Energie müsste der Wärmestörung

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zeitschr. für physikal. Chemie, Bd. 13 (1894).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Berichte, Bd. 91 (1885). Ich ergreise die erste Gelegenheit die sich bietet, um zu constatiren, dass die in dieser Arbeit durchgesührte Idee der Bestimmung molecularer Grössen aus den Dielektricitätsconstanten schon früher von Dorn (Wied. Ann. XIII, [1881]) ausgesprochen wurde; das Übersehen dieser Arbeit war dadurch bedingt, dass sich dieselbe in den »Beiblättern« nicht citirt findet.

quivalent sein. Als sicher kann angenommen werden, dassä 1 Cb.  $0.01 \, mg \, H_2$  ausscheidet, oder dass diese Menge  $H_2$  mit  $3.10^9 \, E.$  E. geladen ist.

 $H_2O$ . Zur Ermittlung der Zahl N Moleküle, welche in  $0.01~mg~H_2$  enthalten sind oder welche die Ladung  $3\cdot10^9~E$ . E. besitzen, dient, unter Voraussetzung kugelförmiger Moleküle, die Gleichung:  $N\frac{4}{3}\pi\rho^3\sigma=0.01~mg=10^{-5}~g$ . Es ist ferner:  $\rho=5\cdot10^{-9}~cm$  und  $\sigma=1$ , somit  $N=2\cdot10^{19}$ . Ein  $H_2$  Molekül erscheint somit geladen mit  $\frac{3}{2}\cdot10^{-10}~E$ . E. Die Energie einer  $H_2O$  Molekel wird demnach  $10^{-12}~Erg$ . und die von  $0.01~mg~H_2$  in Form von  $H_2O=2\cdot10^7~Erg$ .  $1~g~H_2$  in dieser Form repräsentirt somit  $2\cdot10^{12}~Erg$ .  $2\cdot10^9~g~cm=2\cdot10^4~kg~m$  oder 47 Calorien. Die thermochemischen Bestimmungen dagegen liefern für die Verbrennung von  $1~g~H_2$  34 Calorien, also einen Werth, der mit obigem sehr nahe übereinstimmt.

Es sind bei dieser Berechnung die Moleculargrössen des  $H_2$  zu Grunde gelegt, man könnte ebensogut auch von jenem des  $O_2$  ausgehen; man hätte dann zu berücksichtigen, dass  $3\cdot 10^9$  E. E. an  $0\cdot 08$  mg  $O_2$  haften und dass für  $\rho=8\cdot 10^{-9}$  cm und  $\sigma=8$  zu setzen ist. Man erhält so die Ladung von 1 Atom  $O_2=3\cdot 10^{-10}$  E. E. und die Arbeit bei Annäherung von  $H_2$  an O aus dem Unendlichen bis in Moleculardistanz gleich 90 Calorien statt der beobachteten 34. Unter Berücksichtigung der mannigfachen zweifelhaften Grössen und Voraussetzungen, welche in die Rechnung eingehen, wird man eine derartige Übereinstimmung immerhin befriedigend nennen müssen.

HCl. Für die Verbindungswärme der Salzsäure sind folgende Grössen massgebend:  $3 \cdot 10^9$  E. E. haften an  $0 \cdot 35$  mg Cl; ferner ist für Cl  $\rho = 10^{-8}$  und  $\sigma = 6 \cdot 2$  zu setzen; die mit  $3 \cdot 10^9$  E. E. geladene Zahl Cl-Atome beträgt somit  $N = 14 \cdot 10^{18}$ , oder die Ladung eines Atoms Cl =  $2 \cdot 10^{-10}$ . Daraus berechnet sich die Verbindungswärme von 1 g H<sub>2</sub> mit Cl zu 77 Calorien, statt 40 Calorien, wie die thermochemischen Untersuchungen liefern. Geht man bei der Berechnung nicht von Cl, sondern

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Berichte, Bd. 91 (1885).

von H aus, so gelangt man zu dem Werthe 47 Calorien, also auch hier zeigt sich wieder eine gute Übereinstimmung.

Die Valenzladungen, welche sich für Cl, H und O auf von einander ganz unabhängigen Wegen ergeben, stimmen untereinander recht gut überein, sie sind für H =  $^{3}/_{4}$   $10^{-10}$ , für O =  $1 \cdot 5 \cdot 10^{-10}$  und für Cl =  $2 \cdot 10^{-10}$ ; von Richarz<sup>1</sup> wurde auf ganz anderem Wege dafür der Werth  $1 \cdot 29 \cdot 10^{-10}$  erhalten.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass man, vorläufig für die gegebenen Beispiele, die chemische Energie ganz als den Effect elektrischer Kräfte ansehen kann, welche von den Ladungen der Ionen ausgehen.

Da alle einwerthigen Atome dieselben Ladungen besitzen, so wären auch die Verbindungswärmen aller binären Verbindungen gleich, wenn die Durchmesser der entstehenden Moleküle dieselben wären, und es ist vielleicht bezeichnend für die Richtigkeit dieser Anschauung, dass die Differenzen dieser Verbindungswärmen mit den Differenzen der Moleculardurchmesser von gleicher Grössenordnung sind. Die Fähigkeit, möglichst nahe aneinander zu gelangen, d. h. eine möglichst grosse Arbeit zu entwickeln, wird man im Allgemeinen den kleinsten Atomen im höchsten Maasse zuschreiben müssen, und damit mag es wohl in Einklang stehen, dass die Reactionsfähigkeit der Stoffe in so entschiedener Weise mit dem Atomgewichte abnimmt.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Vorstellung, als stammen die Verbindungswärmen vom Falle der Atome gegeneinander, sei also mechanischen Ursprungs, nicht haltbar ist, wenigstens nicht wenn das Gravitationsgesetz bis zu molecularen Distanzen als angenähert giltig vorausgesetzt wird. Die Gravitationsenergie bei der Verbrennung von 1 g H<sub>2</sub> würde nur

 $<sup>\</sup>frac{1}{2}$  .  $10^{-23}$  Cal. liefern, also eine absolut verschwindende Grösse.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> 1. c.

# Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur

von

#### J. G. Garvanoff.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

In Folgendem sind die Resultate einer Reihe von Versuchen mitgetheilt, die sich auf die innere Reibung in fetten und ätherischen Ölen beziehen. Die Methode, welche zur Anwendung kam, war die von Poiseuille, bei welcher die Ausflusszeit aus Capillaren gemessen wird.

Um bei höheren Temperaturen beobachten zu können, musste die Capillare in ein Wasserbad eingebaut werden. Da dieselbe in verticaler Stellung verwendet wurde, so wurde sie am unteren Ende vertical nach aufwärts gebogen und endigte sowohl am unteren, als oberen Ende in eine Glaskugel. Während des Versuches wurde die Flüssigkeit aus der oberen in die untere Kugel strömen gelassen und nach Beendigung des Versuches wieder in die obere zurückgesaugt. Selbstverständlich wurde auf die Reinigung der Capillare vor jedem Versuche besondere Sorgfalt verwendet. Auch war durch zwei Thermometer dafür gesorgt, dass in jedem Momente die Temperatur. sowohl des Bades, als der zu untersuchenden Flüssigkeit selbst abgelesen werden konnte. Zur Ermittlung der absoluten Werthe des Reibungscoëfficienten wurde eine besondere geradlinige Capillare verwendet. Es wurde zunächst mit deren Hilfe der absolute Werth des Reibungscoëfficienten des Wassers bei einer bestimmten Temperatur, nämlich 20.7° C., ermittelt und gefunden,  $\eta = 0.01045$ . Dieser Werth stimmt sehr gut mit dem von O. E. Meyer<sup>1</sup> gefundenen, aus dessen Zahlen sich durch Interpolation für dieselbe Temperatur der Werth  $\eta = 0.01041$ ergibt. Durch Beobachtung der Ausflusszeiten der Öle durch dieselbe Capillare konnten die absoluten Werthe der Reibungscoëfficienten der Öle durch Reduction auf den Wasserwerth ermittelt werden. (Im Folgenden wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei 0° gleich 100 gesetzt). Um die Reibungscoëfficienten bei der höheren Temperatur zu bestimmen, musste Ausflusszeit und Dichte für diese letztere ermittelt werden; die Druckhöhe dagegen blieb bei allen Versuchen constant. Bezeichnet z die Ausslusszeit in Secunden und 8 die Dichte der Flüssigkeit, so gelten für zwei Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  die Formeln  $\eta_1 = a \cdot z_1 \delta_1$  und  $\eta_2 = a z_2 \delta_2$ ; hier bedeutet a eine Constante der im Wasserbad verwendeten Capillare, die durch einmaligen Vergleich mit der geraden Capillare bei einer bestimmten Temperatur ermittelt wurde und so die Reduction aller Werthe auf absolutes Mass gestattet.

Die Beobachtungen erstreckten sich über ein Temperaturintervall von  $20-80^\circ$ ; wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei  $0^\circ$  gleich 100 gesetzt, so ergibt sich derselbe bei  $20^\circ$  im Mittel aus den verlässlichsten bisherigen Angaben zu  $56\cdot 15$  und auf diesen Werth sind auch die Resultate der folgenden Tabellen reducirt. In diesen bedeutet T die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit und zwar ist jedesmal unter A und E die Temperatur am Anfang und Ende eines jeden Versuches angegeben. (Bei jeder Temperatur wurden drei Versuche ausgeführt). Unter Z findet sich die Ausflusszeit in Secunden; unter  $\delta$  die jeweilig ermittelte Dichte angegeben. T' bedeutet das Mittel für eine jede Temperaturgruppe und  $\eta$  den zugehörigen, auf Wasser reducirten Reibungscoëfficienten. (Der letztere für  $0^\circ$  gleich 100 gesetzt). Es folgen nun die Beobachtungen, und zwar an fünf ätherischen und drei fetten Ölen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> O. E. Meyer, Wied. Ann., Bd. 32 (1887).

Tabelle I.
Citronenöl.

T	°C	Z	8		
Α.	E.	2		1	Ŋ
20.8	20.6	110			
20.5	20.5	110	0.8559	20 <b>°</b> 6 C.	66.77
20.5	20.5	110			
30.8	30.5	96.5			•
30.5	30.3	975	0.8498	30.6	58.45
30.1	30 · 1	97.5			
40.2	40.5	85.2			
40.8	40.5	86	0.8422	40.2	51.72
40	39	88.5		:	
51	51	77			
50.2	50	78	0.835	50.3	46 · 19
50	49.9	79			
61	61	69.5			
60.5	60.2	71	0.8272	60.4	41 · 47
60	59.6	71.7			
71	71.2	63.2			
70.5	70.1	65	0 818	70.4	37.7
70	69.4	66.2			
80	79.8	61			
80 · 1	80 · 1	60	0.8101	80	34.64
80.1	80 · 1	60			

Tabelle II.

Bergamottenöl.

1	T°		6	T'	
A.	E.	Z	0	1	η
20°5	21	151			
20	20	156	0.8718	20°3 C.	94.21
20 · 1	20 · 1	155			
31.9	31.1	125.5			
30.5	30.2	128.5	0.864	30.5	77 · 36
30	30	129			
40.6	40 8	107 · 5			
40.5	40.4	108.5	0.8558	40.4	65.22
40	40	110			•
50.8	51	94			
50.4	50.4	95.5	0.848	50.4	56.53
50	49 · 8	95			
60.2	60 · 1	84.5			
60	59.8	84.5	0.8398	60 · 2	49.3
60.4	61	82			
71	71	75			
70.1	69 · 8	76	0.831	70	44.37
69.5	68.8	77.5			
80.6	80.6	86			
80.2	79 · 2	69	0.8258	79 · 6	40.56
79	78	73			

Tabelle III.
Terpentinöl.

T	•	Z	8	T'	
A.	E.	2	0		ฑ
21°C.	20.8	126.5			
20.5	20.5	128	0.862	20°5 C.	77.11
20	20	130			
30.8	30.2	110			
30.4	30.2	110.5	0.8538	30.3	65 • 59
30.1	30	110			
40.8	40.4	97.5			
40.2	40	97.5	0.8462	40.2	57.79
40	39.8	98.5			
51°	51°	86.2			
50.5	50 · 1	88	0.8376	50.4	51.24
50	49.8	88.5			
60	60.2	78.5			
60	60	79.5	0.83	59 · 9	45.96
60	59 · 2	80			
71	70	72.5			
70.2	70	72.7	0.8214	70	41 · 7
<b>7</b> 0	69 · 1	73			
80.1	80	66.5			
79.8	79	66	0.8132	79 · 9	38.04
80.2	80.2	66.5			

Tabelle IV.

## Nelkenöl.

	T°	Z	8		
A.	E.	2			J
20	20	684			
20	20.1	671	1.53	20°	705 · 1
20	20 · 1	667			
31°	30.5	430			
30.5	30.3	434	1.45	30 · 4	430.3
30.2	30	438			
40.4	40.1	303			
40	39.6	310	1.363	39.9	285 · 5
39 5	39.8	306			
51	50	230			
51	51	221	1 · 25	50.5	194
50.5	50	230			
60.5	61	172			
61	60 · 1	177	1 · 19	60.2	144 · 8
60	59	185			
71.5	71	139			
70.5	69.5	144	1.106	69 · 9	108.9
69 · 1	68	148			
80	80.2	115			
80.2	79	119	1.04	79.8	83 · 2
		<del></del>			

Tabelle V.

### Kümmelöl.

7	~ o	Z	à	T'	
Α.	E.			1	າ
21	21	120			
20.5	20.2	122	0.8972	20.3	75.12
20.1	20	124			
31°	31°	103			
30.4	30	105	0.891	30.2	63.96
29.9	29.8	106			
41°7	41°	91			
40.8	40.3	91.5	0.8834	40.5	55.42
40.1	40	91.5			
50.6	50.6	82			
50.5	50.1	82	0.876	50· <b>3</b>	49.36
50	49.8	82.5			
61	. 61	73.5			
60 · 2	60	73.5	0.8683	60.2	44.1
60	59·4	75			
70.5	70.5	68			
70	69.9	68	0.8618	69.9	40.52
69.6	69	69 5			
81.5	81.5	62			
80 · 5	79.5	63.5	0.8555	79.9	37.05
79.5	78.5	64			1

Tabelle VI.
Olivenöl.

<i>T</i> °		. <i>Z</i>	8	Т'	<b>n</b>
Α.	E.			<i>1</i>	11
20.5	20.6	771.5			1
20.8	21 · 1	760 5	.0.9139	20.3	4339
21.1	21 · 1	758.7			 
31 · 4	31 · 2	495			
31.2	30.9	502	0.9057	31	2819
30.8	30.5	509.3			
41 · 1	41	340			
40.9	40.3	349.5	0.893	40.5	1931
40 · 2	<b>39</b> ·8	357 · 5			
50	49.2	255	-,		
50	50	244.5	0.889	50	1347
51 • 1	50	244.5			
60	60	185.5			
60	61 · 1	179.5	0.8859	60.3	1010
61	60	187			
69.5	70	143 5			
70	70	138.3	0.8828	70.1	766
71	70	138			
80	80.1	111			
80	79	116	0.8797	79.5	623 · 2
79	78.9	116	1		

Tabelle VII.

### Mandelöl.

7	$T^{\circ}$		6	T'	
Α.	' Е.	Z	0	<i>I</i>	η
21	20 · 4	665			
20	20	673	0.9989	20 alt	3539·3
20	20.1	671 · 5			
30.8	30 4	437.5			
30.4	30 · 1	443	0.9129	30.2	2315
30	30	449			
41	41	300			
40.5	40	308.5	0.906	40.4	1592.3
40	39.9	313			
51	51.5	215			
51	50	225	0.8977	50.5	1142
50	49.8	230.5			
61	60 5	170			
60.6	60.5	169.5	0.893	60.4	865 · 2
<b>6</b> 0	60	168.5			
71	69	136 5			
71	70.8	130	0.888	70· <b>3</b>	680.9
70.5	69 8	135			
80	80	105.2			
79.7	79.5	108.3	0.883	79 · 2	547.2
78	78	111			

### J. G. Garvanoff,

Tabelle VIII.

## Vaselinöl.

T	T°		8	T'		
Α.	E.	Z	9	<i>I</i> ·	່ ໗	
20.6	20.6	981 5				
20 9	20.9	971	0.874	20.9	4685	
21.2	21.2	960				
30 · 2	29.7	586.5				
30	29 9	576.5	0 870	30	2753	
30	30	575				
40.2	40	345				
39.8	39.8	353	0 866	40	1663	
39.8	39	363				
49.7	49.8	220				
49.7	49.3	227	0.8595	49.5	1074	
49.6	49 · 6	222				
60.5	60	159.5				
59.5	59	163	0.853	60.4	753 · 4	
60.3	60.3	159				
71	70 1	112				
70	69	118	0.8478	70 · 1	527.2	
70.1	70.7	108				
80	80	81				
80	80	85	0.8402	79.9	389.6	
79.9	79.4	87			!	

Tabelle IX.

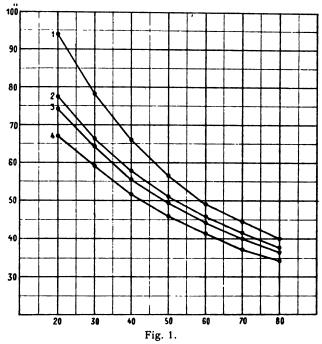
							ıcı	C	IC.
Kümmelöl	<b>1</b> la	0.01429	0.01207	0.01050	0.00932	0.00831	0.00761	96900.0	
	Jh.	75.45	64.18	55.84	49.55	44.21	40.48	37.01	
Nelkenöl	ηα	0.13261	0.08292	0.05341	0.03729	0.02742	0.02040	0.01553	
	بالد	705 • 1	440.86	284	198.3	145.8	108.5	82.6	
Terpentinöl	$\eta_a$	0.01461	0.01245	0.01088	89600.0	0.00863	0.00784	0.00716	
	J,	02.22	66.18	57.95	51.5	45.9	41.7	38.08	
Bergamottenöl	Ma	0.01781	0.01470	0.01235	0.01067	0.600.0	0.00834	0.00758	
	J.L	94.69	28.16	65.71	56.88	49.45	44 37	40.32	
Citronenöl	η absolut	0.01264	0 01108	0.00975	0.00871	0.00783	0.00711	0.00651	
	η relativ	67.27	58.94	51.86	46.35	41.65	37 · 85	34.64	
T		200	30	40	20	09	20	80	

Tabelle X.

- 11							
ηa	0.91102	0.51774	0.31275	0.19521	0.14391	0.0995	0.07301
۳۱,	4844	2753	1663	1038	765	529	388
ηa	0.66561	0.43988	0.30467	0.21894	0.16482	0.12909	0.10065
<b>4</b> 14	3539	2339	1620	1164	828	686	535
η absolut	0.80800	0.55684	0.37190	0.25333	0.19179	0.14452	0.11579
η relativ	4296	2961	1977	1347	1019	298	615
T		30	40	20	90	20	80
	η absolut η,	$\eta$ relativ $\eta$ absolut $\eta_r$ $\eta_r$ $\eta_r$ 4296         0.80800         3539         0.66561         4844	$\eta$ relativ $\eta$ absolut $\eta_r$ $\eta_r$ $\eta_r$ 4296         0.80800         3539         0.66561         4844           2961         0.55684         2339         0.43988         2753	$\eta$ relativ $\eta$ absolut $\eta_r$ $\eta_r$ $\eta_r$ 4296         0.80800         3539         0.66561         4844           2961         0.55684         2339         0.43988         2753           1977         0.37190         1620         0.30467         1663	$\eta$ relativ $\eta$ absolut $\eta_r$ $\eta_a$ $\eta_r$ 4296         0.80800         3539         0.66561         4844           2961         0.55684         2339         0.43988         2753           1977         0.37190         1620         0.30467         1663           1347         0.25333         1164         0.21894         1038	$\eta$ relativ $\eta$ absolut $\eta_r$ $\eta_r$ $\eta_r$ $\eta_r$ 4296         0.80800         3539         0.66561         4844           2961         0.55684         2339         0.43988         2753           1977         0.37190         1620         0.30467         1663           1347         0.2533         1164         0.21894         1038           1019         0.19179         876         0.16482         765	17 absolut 71, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18

Die Tabellen I bis V umsassen die Beobachtungen mit ätherischen Ölen, die Tabellen VI bis VIII jene mit fetten Ölen.

Da es bei den einzelnen Beobachtungen nicht möglich war, vorgeschriebene Temperaturen genau einzuhalten, so wurden für die Temperaturen 20°, 30° u. s. w. die Werthe durch lineare Interpolation aus den Nachbarwerthen ermittelt. Dieselben finden sich für die ätherischen Öle in Tabelle IX, für

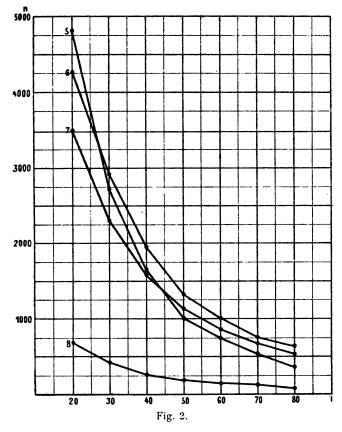


die fetten Öle in Tabelle X aufgeführt. In beiden Tabellen sind nebst den auf Wasser bezogenen relativen Reibungscoëfficienten  $\eta_r$  auch die absoluten auf (cgs) bezogenen  $\eta_a$  angeführt.

Die Werthe  $\eta_r$  dieser beiden Tabellen sind in den Fig. 1 und 2 graphisch dargestellt. Abscissen sind dabei die Temperaturen, Ordinaten die  $\eta_r$ . In Fig. 1 bezieht sich die Curve 1 auf Bergamottenöl, 2 auf Terpentinöl, 3 auf Kümmelöl und 4 auf Citronenöl. In Fig. 2 bezieht sich die Curve 5 auf Vaselinöl, 6 auf Olivenöl, 7 auf Mandelöl und 8 auf Nelkenöl. Die Curven zeigen sämmtlich einen vollkommen regelmässigen

Verlauf, der durch eine sehr bedeutende Abnahme des Reibungscoëfficienten mit der Temperatur charakterisirt ist.

In Tabelle XI ist diese Abnahme ersichtlich gemacht durch die percentuelle Änderung  $\Delta\eta$  des Reibungscoëfficienten  $\eta_{20}$  bei



20° C. zwischen den Temperaturen 20° und 80°. Es ist demnach in Tabelle XI:

$$\Delta \eta = rac{100 (\eta_{20} - \eta_{80})}{\eta_{20}}.$$

Bei den fetten Ölen ist diese Änderung im Allgemeinen viel stärker als bei den ätherischen und erreicht bis  $92^{0}/_{0}$  des ursprünglichen Werthes. Es stehen diese Resultate in gutem Einklange mit den wenigen Beobachtungen, welche über diesen

Gegenstand vorliegen; es sind dies Messungen von Koller<sup>1</sup> an einigen Ölen, bei denen jedoch nicht die absoluten Werthe der Reibungscoëfficienten ermittelt, sondern nur eine starke Abnahme derselben mit der Temperatur constatirt wurde.

Tabelle XI.

Substanz	$\Delta \gamma_{\parallel}$			
Citronenöl	48.7			
Terpentinöl	50.9			
Kümmelöl	50 9			
Bergamottenöl	57.4			
Nelkenöl	88.3			
Mandelöl	84.8			
Olivenöl	85 · 5			
Vaselinöl	91.9			

Über die Änderung des Reibungscoëfficienten mit der Temperatur bei Walrathöl liegen Messungen von Perry, Graham und Heath vor,<sup>2</sup> welche eine Abnormität desselben bei der Temperatur 40° ergaben; eine Untersuchung der gleichzeitigen Änderung der Dichte liess bei derselben Temperatur gleichfalls einen Sprung erkennen; von derartigen Unregelmässigkeiten war bei den im Vorstehenden untersuchten Substanzen durchaus nichts zu bemerken.

<sup>1</sup> Diese Ber., Bd. 98 (1889).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Phil. Mag. (5), 35 (1893).

# Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung

von

### Karl Bobek in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die allgemeine Fläche dritter Ordnung besitzt vier Invarianten. Dieselben bleiben bei den  $\infty^{15}$  Collineationen des Raumes erhalten. Haben zwei Flächen  $F^3$  und  $F^3$  dieselben Invarianten, dann gibt es eine und nur eine bestimmte Collineation, welche die Flächen in einander überführen; denn die allgemeine Fläche dritter Ordnung lässt keine collineare Umformung in sich zu. Im Folgenden ist eine geometrische Deutung der vier Invarianten gegeben.

Ist a eine Gerade der Fläche  $F^3$ , so gehen durch dieselbe fünf Tritangentialebenen,  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_2$ ,  $\mathfrak{E}_3$ ,  $\mathfrak{E}_4$ ,  $\mathfrak{E}_5$ , welche noch je ein Paar Geraden  $b_1c_1$ ,  $b_2c_2$ .  $b_3c_3$ ,  $b_4c_4$ ,  $b_5c_5$  von  $F^3$  enthalten. Die Ebenen durch a schneiden  $F^3$  in Kegelschnitten, welche auf a eine Punktinvolution ausscheiden, deren Deckpunkte  $D_1$ ,  $D_2$  seien und die Ebenen, welche die in  $D_1$  respective  $D_2$  die a berührenden Kegelschnitte von  $F^3$  enthalten, seien mit  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$  bezeichnet.  $D_1$  und  $D_2$  sind die parabolischen Punkte von  $F^3$ , die auf a liegen,  $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$  die Tangentialebenen von  $F^3$  in diesen Punkten.

Bezeichnet man nun mit  $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_4)$  das Doppelverhältniss der vier Ebenen  $\mathfrak{S}_1$ ,  $\mathfrak{S}_2$ ,  $\mathfrak{S}_3$ ,  $\mathfrak{S}_4$ , so sind die vier Doppelverhältnisse  $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_4)$ ,  $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_5)$ ,  $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{D}_1)$ ,  $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{D}_2)$  die vier Invarianten der Fläche dritter Ordnung.

Dass dieselben bei collinearer Umformung von  $F^3$  erhalten bleiben ist klar, dass ihre Gleichheit aber auch genügt, um zwei Flächen durch Collineation in einander zu überführen, soll gezeigt werden.

Vorher möge ein Hilfssatz für die  $F^3$  bewiesen werden.

Sind  $E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$  die Schnittpunkte der Geradenpaare von  $F^3$  in den durch a gehenden fünf Ebenen und projicirt man aus  $E_1$  die Punktpaare  $E_2 E_3$  und  $E_4 E_5$  durch zwei Ebenen, so schneiden diese a in einem Punktepaare M, N, welches durch die Schnittpunkte des Geradenpaares  $b_1 c_1$  harmonisch getrennt wird.

Man kann  $F^3$  erzeugen durch ein Flächenbüschel zweiter Ordnung  $(F^2)$ , an dessen Flächen man von  $E_1$  die Berührungskegel legt.  $F^3$  ist der Ort der Berührungskegelschnitte. Die Ebenen derselben gehen durch die Gerade a, in welcher sich die Polarebenen von  $E_1$  für die  $F^2$  des Büschels schneiden. Die Fläche  $F^2_0$ , welche durch  $E_1$  geht, schneidet die Ebene  $\mathfrak{E}_1$  in dem Geradenpaare  $b_1c_1$  von  $F^3$ . Die Ecken  $E_2E_3E_4E_5$  des allen  $F^2$  conjugirten Tetraeders sind die Schnittpunkte der noch übrigen vier Geradenpaare, die in den Ebenen durch a liegen. Da die Geraden  $E_2E_3$  und  $E_4E_5$  conjugirte Polaren für  $F^2_0$  sind, so schneiden die sie aus  $E_1$  projicirenden Ebenen, die  $\mathfrak{E}_1$  in einem Strahlenpaare, welches  $b_1c_1$  harmonisch trennt. Hiemit ist der Satz bewiesen.

Man erhält auf diese Art zehn Punkte auf a ausgeschnitten durch die zehn Ebenen, welche durch je drei der fünf Punkte  $E_i$  gehen. Durch jeden Punkt  $E_i$  gehen sechs der Ebenen, welche a in drei Paaren einer Involution schneiden, deren Deckpunkte aus  $E_i$  durch das Geradenpaar  $b_i c_i$  projicirt werden. Die fünf so erhaltenen Involutionen haben alle das Paar  $D_1$ ,  $D_2$  gemeinschaftlich. Denn  $D_1$ ,  $D_2$  sind die Deckpunkte der Involution, welche die Kegelschnitte von  $F^3$  auf a ausscheiden, zu denen auch die fünf Geradenpaare gehören.

Die Pole von a für die Kegelschnitte von  $F^3$  liegen auf einer Curve dritter Ordnung  $c^3$ , welche durch die fünf Punkte  $E_i$  und durch  $D_1$ ,  $D_2$  geht, in letzteren Punkten die  $F^3$ , also auch  $\mathfrak{D}_1$  respective  $\mathfrak{D}_2$  berührt. Beachtet man, dass die  $c^3$  aus  $E_1$  etwa durch einen Kegel  $\Re^2$  projicirt wird, welcher dem Kegelbüschel durch die vier Geraden  $E_1E_2$ ,  $E_1E_3$ ,  $E_1E_4$ ,  $E_1E_5$  angehört, so erkennt man, dass  $\Re^2$  die Gerade a in einem Paare derjenigen Involution schneiden muss, welche durch die drei Ebenenpaare des obigen Kegelbüschels bestimmt ist. Hieraus ergibt sich wieder, dass  $D_1$ ,  $D_2$  ein Paar aller fünf Involutionen ist.

Es möge bemerkt werden, dass die Doppelverhältnisse  $(E_1E_2E_3E_4)$ ,  $(E_1E_2E_3E_5)$ ,  $(E_1E_2E_3D_1)$ ,  $(E_1E_2E_2D_2)$  auf der Raumcurve  $c^3$  gleich sind den oben hingeschriebenen Doppelverhältnissen der entsprechenden Ebenen.

Es seien nun  $F^3$  und  $F^{3\prime}$  zwei Flächen dritter Ordnung, welche gleiche Invarianten für die Gerade a und a' besitzen.

Es existirt eine ganz bestimmte Raumcollineation, welche die Raumcurve  $c^3$  in die entsprechende  $c^3$  für  $F^3$  in der Weise überführt, dass den Punkten  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  die Punkte  $E_1'$ ,  $E_2'$ ,  $E_3'$ , entsprechen. Zu Folge der Beziehungen

$$\begin{array}{ll} (E_1E_2E_3E_4) = (E_1'E_2'E_3'E_4') & (E_1E_2E_3E_5) = (E_1'E_2'E_3'E_5'), \\ (E_1E_2E_3D_1) = (E_1'E_2'E_3'D_1') & (E_1E_2E_3D_2) = (E_1'E_2'E_3'D_2') \end{array}$$

werden durch dieselbe Raumcollineation die Punkte  $E_4$ ,  $E_5$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  von  $c^3$  in die Punkte  $E_4'E_5'D_1'D_2'$  von  $c^{3\prime}$  übergehen, so dass der Geraden  $a=D_1D_2$  die Gerade  $a'=D_1'D_2'$  entsprechen wird. Daher sind den fünf Ebenen  $\mathfrak{E}_i$  durch a die fünf Ebenen  $\mathfrak{E}_i'$  durch a' zugeordnet. Da ferner dem Ebenenpaare durch  $E_1E_2E_3$  und  $E_1E_4E_5$ , welches a in MN trifft das Ebenenpaar durch  $E_1'E_2'E_3'$  und  $E_1'E_4'E_3'$  entspricht, welches a' in M', N' schneiden möge, so sind M, M' und N, N' homologe Punkte der collinearen Räume.

Zu Folge des Hilfssatzes trennt das Geradenpaar  $b_1c_1$  die beiden Strahlenpaare  $E_1D_1$ ,  $E_1D_2$  und  $E_1M$ ,  $E_1N$  harmonisch, und dasselbe thut auch  $b_1'c_1'$  bezüglich der Strahlenpaare  $E_1'D_1'$ ,  $E_1'D_2'$  und  $E_1'M'$ ,  $E_1'N'$ , daher muss durch die Raumcollineation das Geradenpaar  $(b_1c_1)$  von  $F^3$  in das Geradenpaar  $b_1'c_1'$  von  $F^3$ ' übergehen. Da dasselbe von jedem der fünf Geradenpaare in den Ebenen  $\mathfrak{E}_i$  und  $\mathfrak{E}_i'$  gilt, so ist klar, dass die oben angegebene Raumcollineation  $F^3$  in  $F^{3\prime}$  überführt.

Die Gleichheit der eingangs hingeschriebenen vier Doppelverhältnisse für zwei Flächen dritter Ordnung ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Flächen durch eine Raumcollineation in einander überführbar sind.

Sind die vier Invarianten einer Fläche dritter Ordnung gegeben, so kann man noch 15 Constanten zur Bestimmung Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CIII. Bd., Abth. II. a. 60

der Fläche willkürlich annehmen. Zur Construction der nothwendigen Elemente der Fläche kann man folgendermassen verfahren. Man nehme eine Gerade a willkürlich an (vier Bedingungen für die durchgehende  $F^3$ ) durch diese drei beliebige Ebenen  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_2$ ,  $\mathfrak{E}_3$  (drei Constanten), dann sind zu Folge der vier gegebenen Invarianten auch  $\mathfrak{E}_4$ ,  $\mathfrak{E}_5$  und  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$  bestimmt. In  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_2$  wähle man je einen Punkt  $E_1$ ,  $E_2$  (vier Constanten) und in  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$  je eine gerade  $t_1$  respective  $t_2$  (vier Constanten) beliebig aus, wodurch der Schnittpunkt der Geradenpaare  $b_1c_1$  respective  $b_2c_2$  und die parabolischen Punkte  $D_1$  respective  $D_2$  als Schnittpunkte der  $t_1$  respective  $t_2$  mit a gegeben sind. Durch diese Annahme ist  $F^3$  eindeutig bestimmt. Denn durch  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  geht eine Raumcurve dritter Ordnung  $c^3$ , welche  $t_1$  und  $t_2$  berührt. Sie möge  $\mathfrak{E}_3$ ,  $\mathfrak{E}_4$ ,  $\mathfrak{E}_5$  in  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  schneiden.

Es ist nun ein Kegel  $\Re^2_2$  bestimmt, welcher  $E_2$  zur Spitze hat, für den  $E_2E_3$ ,  $E_2E_4$ ,  $E_2E_5$  ein Tripel conjugirter Strahlen ist, und dessen Polarebene von  $E_1$  die Ebene  $\mathfrak{E}_2$  ist. Desgleichen ist ein Kegel  $\Re^2_3$  bestimmt, für den  $E_3E_2$ ,  $E_3E_4$ ,  $E_3E_5$  ein Tripel conjugirter Strahlen und  $\mathfrak{E}_3$  die Polarebene von  $E_1$  ist.  $\Re^2_2$  und  $\Re^2_3$  bestimmen einen Flächenbüschel zweiter Ordnung für den  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  das gemeinschaftliche Poltetraeder aller Flächen, und  $E_2$  die Schnittgerade der Polarebenen von  $E_1$  für die Flächen des Büschels ist. Es erzeugt daher  $E_1$  mit dem Flächenbüschel in der oben auseinandergesetzten Weise eine  $E_3$ , welche den gestellten Bedingungen genügt.  $E_3$  ist, wie man sieht, die einzige Fläche dritter Ordnung, da die fünf Geradenpaare in den  $E_1$  durch die fünf Punkte  $E_2$  zu Folge des Hilfssatzes bestimmt sind.

Auf Flächen mit conischen oder biplanaren Doppelpunkten, welche speciellen Werthen der Invarianten oder Gleichheiten zwischen denselben entsprechen, möge hier nicht weiter eingegangen werden.

# Über die eireulare Magnetisirung von Eisendrähten

von

#### Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

In einem vom Strom durchflossenen Eisendrahte üben die einzelnen, der Drahtaxe parallelen Fäden, in welche man sich den Strom zerlegt denken kann, eine Richtkraft auf die Molecularmagnete aus, welche dieselben rings um die Axe des Drahtes kreisförmig anzuordnen strebt; sie sucht die Molecularmagnete transversal gegen die Stromfäden zu stellen. Ein solcher Draht befindet sich also in einem magnetischen Zustande, welchen man als circular oder transversal bezeichnet.1 Das Entstehen und Verschwinden dieses Zustandes äussert sich in der gleichen Weise wie die gegenseitige Induction der Stromfäden; es werden also die beiden Extraströme in geraden Leitern aus magnetisirbaren Metallen viel stärker auftreten als in nicht magnetisirbaren Drähten. Ein Theil dieses magnetischen Zustandes kann auch remanent bleiben. Dieser Theil ist es, welcher die von Villari<sup>2</sup> entdeckten und als »mechanische oder Erschütterungsströme transversal magnetisirter Eisenstäbe« bezeichneten Erscheinungen liefert. Villari selbst und

Nachfolgend soll für diese Art der Magnetisirung durchwegs die von Herwig eingeführte Bezeichnung »circular« gebraucht werden. Der Ausdruck »transversal magnetisirt« ist nicht eindeutig.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Villari, Pogg. Ann., Bd. 126, S. 85, 1865 und Bd. 137, S. 569, 1869.

nach ihm H. Streintz 1 studirten die Erschütterungsströme an dicken Eisen- und Stahlstäben und untersuchten dieselben hauptsächlich in ihrer Abhängigkeit von der Intensität des Primärstromes, von der Stärke der Erschütterung und von der Zahl der vorausgegangenen Stösse. Während diese Untersuchungen nur den remanenten Theil betrafen, hat Herwig? mittelst der Wheatstone'schen Brückenanordnung direct das Auftreten starker Schliessungs- und Öffnungsextraströme constatirt, wenn ein Zweig der Brücke aus einem dicken Eisenoder Stahlstabe gebildet war. Später hat Lorenz mit Brücke und Telephon den Selbstinductionscoëfficienten zweier 31 m langer Eisendrähte gemessen und die Susceptibilität der Eisensorte zu ungefähr 10 bestimmt. Im Allgemeinen waren alle diese Versuche mehr qualitativer Natur und auch gar nicht so eingerichtet, um genauere Messungen über das Verhalten der Eisendrähte bei circularer Magnetisirung zu gestatten. Es sind vor Allem zwei Fragen, welche in dieser Hinsicht gestellt werden können. Die erste Frage ist dieselbe, welche auch bezüglich der axialen Magnetisirung immer gestellt wird, sie bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Permeabilität und der Stärke der magnetisirenden Kraft. Die zweite Frage betrifft das Verhältniss der Permeabilität bei axialer und circularer Magnetisirung für ein und dasselbe Individuum. Bezüglich der ersten Frage kann man wohl vermuthen, dass sich der Verlauf der Magnetisirung auch in circularer Richtung ungefähr so abspielen dürfte wie in der axialen: allein hinsichtlich des zweiten Punktes hat man kaum Erfahrungsthatsachen oder theoretische Erwägungen. auf welche gestützt, man das Resultat des Versuches auch nur qualitativ angeben könnte.

Ein Umstand allerdings vereitelt die völlig exacte Beantwortung der beiden oben aufgeworfenen Fragen, und das ist die Thatsache, dass wir in einem vom Strom durchflossenen Drahte rings um die Axe magnetisirende Kräfte haben, welche in der Axe selbst gleich Null sind und gegen die Peripherie zu

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> H. Streintz, diese Sitzungsber., Bd. 76, S. 946, 1877.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Pogg. Ann., Bd. 153, S. 115, 1874.

<sup>3</sup> Wied. Ann., Bd. VII, 1879.

stetig wachsen. Wir können daher nur von einem Mittelwerth der magnetisirenden Kräfte sprechen. Nun wächst insbesondere bei weichen Eisendrähten die Susceptibilität zum Theile viel rascher wie die magnetisirende Kraft; der beobachtete Werth der Susceptibilität entspricht daher, mit Ausnahme der magnetisch sehr harten Drähte, nicht ganz dem Mittelwerthe der magnetisirenden Kraft. Doch ist es immerhin möglich, aus dem Verlaufe der Magnetisirungscurven selbst beim weichen Eisen Schlüsse über den Unterschied in der axialen und circularen Richtung zu ziehen.

Mit der Frage bezüglich der Magnetisirbarkeit des Eisens nach verschiedenen Richtungen hat sich Herwig¹ ebenfalls schon beschäftigt. Er untersuchte Eisenröhren (Gasleitungsröhren aus weichem Walzeisen gezogen) sowohl in axialer, als auch circularer Richtung. Die Magnetisirung in axialer Richtung erfolgte durch einen in der Axe der Röhre gelegten vom Strom durchflossenen Draht, die Stärke der Magnetisirung wurde durch den in der Richtung der Axe inducirten Strom gemessen. Die Resultate dieser Versuche werden weiter unten besprochen.

Mit Rücksicht auf die genaue Berechnung der Werthe der Susceptibilität und der magnetisirenden Kräfte bietet die Röhrenform grosse Vortheile; die Verhältnisse liegen da nahezu wie bei einem gleichmässig bewickelten Ringe, und die Röhre stellt uns eigentlich einen Ring mit rechteckigem Querschnitt vor. Vom praktischen Standpunkte aber empfiehlt es sich, solche Untersuchungen an Drähten zu machen, und an solchen wurden die hier beschriebenen Messungen auch gemacht. Nach Erwägung mehrerer Umstände wurden folgende Drähte für die Untersuchung gewählt.

- 1. Ein gut ausgeglühter, weicher Eisendraht, 0·21 cm dick. Der Draht wurde in einer Eisenhandlung, schon ausgeglüht gekauft und wird nachfolgend als »Eisen weich« bezeichnet.
- 2. Ein 0.20 cm dicker Frischeisendraht, bezogen von der Drahtzieherei der Alpinen Montangesellschaft in Graz. Das

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., Bd. 156, S. 430, 1875.

Frischeisen ist das reinste Eisen, welches fabriksmässig hergestellt wird. Dieser Draht wurde durch Zug gehärtet, und zwar wurde er ohne Ausglühen durch zwei Zuglöcher von 0.25 auf 0.20 cm gezogen. Diese Sorte wird unter Eisen hart angeführt.

3. Ein Bessemerstahldraht Nr. 4, 0·20 cm dick, ohne Ausglühen gezogen in drei Zügen von 0·28 cm, geliefert ebenfalls von der genannten Drahtzieherei. Dieser Draht wird kurzweg »Bessemerstahl« genannt.

Für die Wahl der Dicke war zum Theile der Umstand massgebend, dass zu dünne Drähte beim Durchgange der constanten Ströme zu stark erwärmt worden wären, anderseits war die Anwendung dickerer Drähte für die Untersuchung der axialen Magnetisirung wegen des Axenverhältnisses nicht günstig.

### Die Versuchsanordnung.

Für die Beobachtung der circularen Magnetisirung, respective der Extraströme stehen zwei Methoden zur Verfügung, die mit dem Differentialgalvanometer und die mit der Wheatstone'schen Brücke. Die erste, bei welcher die Galvanometerrollen mit ihren verhältnissmässig hohen Selbstinductionscoëfficienten direct in den primären Stromkreis eingeschaltet werden, eignet sich weniger gut zu solchen Beobachtungen wie die zweite, welche ich gewählt habe. Die Brückenverzweigung war, wie folgt, hergestellt. Der zu untersuchende Eisendraht, ungefähr 1 m lang und in der Mitte stimmgabelförmig gebogen, bildete den einen Zweig AC (Fig. 1). Für die übrigen Zweige habe ich einen Messingdraht von entsprechender Dicke gewählt, dessen Widerstand pro Längeneinheit nahe mit jenem des Eisendrahtes übereinstimmte. Der Zweig BC, gleich lang wie AC, war also aus Messingdraht und so gebogen wie der Eisendraht. AC und BC waren an die beiden Seiten eines Brettes ganz symmetrisch befestigt und standen vertical in einem hohen, mit Wasser gefüllten Glasgefässe. An die beiden

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Auch die erste Drahtsorte war ein ziemlich reines Eisen, was ein Vergleich mit einem gut ausgeglühten Draht aus Frischeisen zeigte.

Punkte A und B wurde ein etwas über 2m langer Draht (von derselben Dicke wie in BC) angelöthet und in der aus der Figur ersichtlichen Weise am Beobachtungstische horizontal festgelegt. Zwischen A und B kam das Galvanometer, mit langsam schwingender Magnetnadel (8 Sec.); ein ziemlich empfindliches Instrument von Hartmann und Braun, dessen Rollen parallel geschaltet waren.

Der Batteriezweig, enthaltend das Element E und einen Widerstandskasten W, war mit einem Ende an C angeschlossen; das andere wurde in bekannter Weise am Messingdrahte hinund hergeschoben und der Punkt D aufgesucht, bei welchem das Galvanometer keinen Strom anzeigte; an diesem Punkte

wurde es sodann angelöthet. Da die Compensation nur bei einer bestimmten Temperatur vorhanden war, so musste für alle Fälle noch ein grösserer Nebenschlusswiderstand wzwischen A und D, respective B und D angebracht werden, um die Nadel in allen Fällen auf o zu bringen. Zur Messung der Stromstärke im Batteriezweige diente ein Gal-

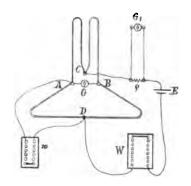


Fig. 1.

vanometer, dessen Enden an den kleinen Widerstand  $\rho$  (0.05 Ohm) gelegt waren. Die Angaben dieses Galvanometers wurden empirisch geaicht. Die Zweige AC und BC befanden sich wie gesagt in Wasser und waren dadurch vor raschen Temperaturschwankungen geschützt. Für den Theil ADB war eine grössere Vorsicht nicht nothwendig, denn eine kleine gleichmässige Erwärmung des ganzen Theiles hatte durchaus keine Störung zur Folge; nur einseitige Temperaturänderungen, wie sie etwa durch Bestrahlung oder Luftströmungen bedingt sind, mussten vermieden werden. Um solche hintanzuhalten, habe ich diesen Theil mit Papier und Tüchern gut zugedeckt.

In den Batteriezweig war auch ein Commutator eingeschaltet, und es wurde immer so eingestellt, dass sich beim Commutiren keine Stellungsänderung der Nadel zeigte.

Die elektrodynamische Induction der einzelnen Brückenzweige auf sich selbst ist hier sehr klein und hebt sich in der Wirkung auf die Galvanometernadel nahezu auf (ein eventueller kleiner Überschuss in der einen Richtung wurde in Rechnung gezogen); nur der Eisendraht AC liefert infolge der circularen Magnetisirung einen starken Extrastrom, und wir bekommen beim Commutiren, insbesondere bei intensiveren Strömen, sehr kräftige Ausschläge der Galvanometernadel. Die Widerstände in den Brückenzweigen sind gegenüber dem Galvanometerwiderstande ziemlich klein, und mit Rücksicht darauf wäre es besser gewesen, längere Eisendrähte zu nehmen; doch wärer, dann wieder Schwierigkeiten wegen der Constanthaltung der Temperatur entstanden; aus gleichen Gründen habe ich es vermieden, dem Eisendrahte gegenüber wieder einen Eisendraht als Brückenzweig anzubringen, wodurch der Ausschlag verdoppelt worden wäre.

Zur Bestimmung der axialen Magnetisirung wurde der gerade, ebenfalls ungefähr 1 m lange Draht in eine 121·5 cm lange Magnetisirungsspule (äusserer Durchmesser 3·5 cm) gebracht und nach der ballistischen Methode untersucht. Die Spule hatte zwei Lagen und 11·34 Windungen pro Längeneinheit. Die secundäre Rolle war auf ein Glasrohr gewickelt und hatte 150 Windungen. Sie befand sich in der Mitte der Magnetisirungsspule und ober der Mitte des zu untersuchenden Drahtes. Ein in die Leitung des Primärstromes geschalteter Widerstandskasten gestattete die Anwendung verschiedener Stromstärken. Als Galvanometer diente dasselbe Instrument wie bei der Untersuchung der circularen Magnetisirung, nur waren die Rollen diesmal hinter einander geschaltet.

Wegen des sogenannten Kriechens eignet sich die ballistische Methode weniger gut zur Bestimmung von Magnetisirungscurven weicher Eisendrähte wie die magnetometrische.<sup>2</sup> Für die Beantwortung der ersten Frage wäre das in Betracht

 $<sup>^{1}</sup>$  Ging die axiale der circularen Magnetisirung voraus, so wurde der wirksame Theil des Drahtes durch das Anlöthen an die Punkte A und C ein wenig verkürzt.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ewing, J. A., Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen, S. 120 der deutschen Ausgabe.

zu ziehen, für die zweite ist es kaum von Belang, weil die Schwingungsdauer der Galvanometernadel dieselbe ist sowohl bei der Beobachtung der axialen, als auch der circularen Magnetisirung und daher der gemachte Fehler in beiden Fällen gleich gross ausfällt.<sup>1</sup>

## Die Beobachtungsresultate.

#### 1. Circular.

Das magnetische Verhalten eines Drahtes ist durch die Curve, welche man bei einem vollen Magnetisirungscyclus erhält, vollständig charakterisirt. Die Beobachtungen werden in solchen Fällen bekanntlich so gemacht, dass man die magnetisirende Kraft in kleinen Sprüngen wachsen, respective abnehmen lässt, und zwar im positiven und negativen Sinne. Bei jedem Sprung wird der Zuwachs der Magnetisirungsintensität nach der ballistischen oder magnetometrischen Methode bestimmt. Diese Beobachtungsmethode ist nun allerdings auch bei der circularen Magnetisirung nicht ausgeschlossen; allein sie würde bedeutende Vorkehrungen erfordern, um die Widerstände in den Brückenzweigen während der Dauer eines ganzen Cyclus constant zu erhalten. Bei der hier gewählten Anordnung musste man von der cyclischen Beobachtung absehen, und ich habe daher immer den Ausschlag beim Commutiren beobachtet. Vor jeder Messung musste die Compensation der Zweigwiderstände durch Veränderungen am Nebenschlusswiderstande hergestellt werden. Die Beobachtungen waren ausserordentlich mühsam, da eine kleine Störung in der Temperaturvertheilung der Drähte gleich eine Änderung der Ruhelage der Nadel zur Folge hatte. Auch die Thermoströme bildeten ein Hinderniss, welches sich manchmal recht bemerkbar machte. Bei grösseren

<sup>1</sup> Bezüglich der axialen Magnetisirung des weichen Eisendrahtes in schwachen Feldern habe ich Versuche mit einem Thomson-Carpentier-Galvanometer bei zwei verschiedenen Schwingungsdauern (3 und 12 Sec.) gemacht, und es hat sich herausgestellt, dass die Magnetisirung bei Eisen weich in einer Zeit ablaufen muss, welche auch gegen 3 Secunden kurz ist. Die der Magnetisirung entsprechenden Ausschläge wurden mit denen, welche eine bestimmte Condensatorentladung ergab, verglichen.

Stromstärken wurden in den Zweigdrähten schon ziemlich beträchtliche Wärmemengen degagirt, und man musste jedesmal nach Einsetzen des stärkeren Stromes einige Zeit warten, bis sich ein stationärer Zustand einstellte. Die stärksten Ströme, welche bei der circularen Magnetisirung in Anwendung kamen, hatten ungefähr 6.5 Amp. im Batteriezweig. Es schien mir nicht angezeigt, noch kräftigere anzuwenden.

Aus dem beim Commutiren erhaltenen halben Ausschlag des Galvanometers  $\frac{\alpha}{2}$  wurde zunächst der Integralwerth der im Eisen inducirten elektromotorischen Kraft nach der Formel

$$\int edt = A \frac{RT}{\pi} \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$$
 1)

berechnet. Dabei ist

$$A = \frac{(w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\,\rho}{w_3 + w_4} \cdot$$

Der Widerstand des Eisens ist hiebei mit  $w_1$ , der des benachbarten im Wasser befindlichen Messingdrahtes mit  $w_2$  bezeichnet. R, T,  $\lambda$ ,  $\rho$  bedeuten bekanntlich den Reductionsfactor, die Schwingungsdauer, das log. Decrement und den Widerstand des Galvanometers. Der Reductionsfactor wurde mit Hilfe eines Clark'schen Elementes und eines bekannten Widerstandes bestimmt. Das Auftreten oder Verschwinden der circularen Magnetisirung wirkt so wie eine Selbstinduction in dem betreffenden Zweige. Bezeichne ich mit S den Coëfficienten dieser Selbstinduction, so bestimmt sich dessen Werth aus der Gleichung

 $Si_1 = \int edt,$  2)

wo

$$i_1 = \frac{w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \cdot i.$$

i bedeutet die Stromstärke im Batterie-,  $i_1$  die im Eisendrahtzweige.

Der weitaus grösste Theil des beim Commutiren erhaltenen Ausschlages entspricht der Induction durch die circulare Magnetisirung. Wären alle Batteriezweige gleich lang und gleich dick, so würden sich die elektrodynamischen Inductionen gegenseitig aufheben. In unserem Falle traf dies nicht ganz zu, und es musste mit Rücksicht auf die nicht ganz gleiche Länge der Brückenzweige und auf die Stromstärkeverhältnisse in denselben an S eine kleine Correctur (insbesondere bei Bessemerstahl und Frischeisen) angebracht werden, deren Berechnung die theoretische Formel für den Selbstinductionscoëfficienten s eines geradlinig gespannten Drahtes

$$s = 2i \left( \log \frac{2l}{rc} - \frac{1}{4} \right)$$

zu Grunde gelegt wurde. l ist dabei die Länge, r der Radius des Drahtes;  $c=e^{3/2}$ , wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Die so corrigirten Werthe von S sind in den Tabellen unter  $\overline{S}$  eingetragen. Aus diesem Werthe lässt sich nun die Susceptibilität  $\kappa$  berechnen, und zwar mit Hilfe einer Formel, welche von Kirchhoff l entwickelt wurde. Kirchhoff zeigte, dass durch die circulare Magnetisirung der Selbstinductionscoëfficient des Drahtes um  $2\pi\kappa l$  vergrössert wird. Wir setzen also  $\overline{S}=2\pi\kappa l$ .

Berechnet man auf diese Weise x, so findet man, dass es insbesondere für weiches Eisen mit der Stromstärke (innerhalb der Versuchsgrenzen) bedeutend ansteigt. Bei den Messungen über die Magnetisirung in axialer Richtung gibt man zu jedem Werthe der magnetisirenden Kraft oder Feldstärke den entsprechenden Werth von x an. Um die circulare mit der axialen Magnetisirung zu vergleichen, müsste man auch hier das gleiche thun; allein hier bietet sich insofern eine Schwierigkeit dar, als die circular wirkende magnetisirende Kraft bei einem vom Strom durchflossenen Drahte nur in gleichen Abständen von der Axe constant ist; sie steigt von der Axe, wo sie den Werth 0 hat bis zur Peripherie, und ist hier ein Maximum, und zwar gleich  $\frac{2i}{r}$ , wo r den Radius des Drahtes und i die

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., Ergbd. V, S. 1. Später hat auch Lorenz (Wied. Ann., Bd. VII) diese Formel abgeleitet und zur Berechnung von x benützt.

Stromstärke bedeutet. Bezeichnen wir mit H die magnetisirende Kraft an irgend einer Stelle des Drahtquerschnittes, mit a die Entfernung dieser Stelle von der Axe und mit u die Stromdichtigkeit, so ist  $H=2\pi a u$ 4)

Rechnet man nun aus der Formel 3) die Susceptibilität, so entspricht diese einer magnetisirenden Kraft, welche sicher zwischen 0 und  $\frac{2i}{r}$  liegt; allein den genauen Werth von H, welcher zum berechneten z gehört, kann man kaum angeben. Für hartes Eisen und für Stahl, bei welchen x nur langsam ansteigt, wird der zum berechneten Werthe von x gehörige Werth der magnetisirenden Kraft nahezu durch den Mittelwerth von H gegeben sein. Dieser Mittelwerth ergibt sich, wenn man alle H über den ganzen kreisförmigen Drahtquerschnitt summirt und durch den Querschnitt dividirt. In den Curven sind die Werthe von x überall auf den Mittelwerth von H bezogen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

i die Stromstärke im Batteriezweige in abs. E., i, \*

a den Galvanometerausschlag beim Commutiren,

β den Galvanometerausschlag beim Öffnen des Primärstromes.

 $H_{\text{max}}$  und  $H_{\text{mit}}$  den maximalen und den mittleren Werth der circularen magnetisirenden Kraft. Es ist  $H_{\text{mit}} = 0.666$  $H_{\text{max}}$ .

fedt den Integralwerth der elektromotorischen Kraft, entsprechend dem Galvanometerausschlag  $\frac{\alpha}{2}$ ,

S und  $\overline{S}$  den nicht corrigirten und corrigirten Werth des Selbstinductionscoëfficienten,

 $\frac{\alpha}{2}$  -  $\beta$  entspricht dem remanenten Theil des circularen Magnetismus,

 $\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$  das Verhältniss des remanenten zum temporären Magnetismus.

Jeder der unter  $\alpha$  eingetragenen Werthe ist das Mittel aus vier Beobachtungen; dasselbe gilt von  $\beta$ ; in die Tabellen wurde jedoch nur der Mittelwerth eingetragen. Unter jeder Tabelle sind die Widerstände der Brückenzweige und die Galvanometerconstanten angegeben. Den Beobachtungen bei niederen Stromstärken (insbesondere für Bessemerstahl) darf kein grosses Gewicht beigelegt werden, da die Ausschläge sehr klein waren. Ich glaubte jedoch, diese Werthe nicht unberücksichtigt lassen zu müssen, da sie sich den weiteren Messungen ziemlich gut anschliessen.

Tabelle I und II beziehen sich auf "Eisen weich«. Von dieser Sorte wurden zwei Proben untersucht, welche derselben Drahtrolle entstammten. Die erste Probe wurde zuerst circular, dann axial untersucht. Bei der zweiten Probe war die Reihenfolge axial, circular und wieder axial.

Tabelle III und IV geben die Resultate für »Eisen hart«. Es waren ebenfalls zwei Proben und die Reihenfolge hinsichtlich der axialen und circularen Magnetisirung dieselbe wie oben.

Tabelle V gilt für den Bessemerstahldraht. Nur eine Probe. Die circulare Magnetisirung ging der axialen voraus.

Zu den Beobachtungen ist noch Folgendes zu bemerken. Die Messungen wurden mit der niedersten Stromstärke angefangen und bis zur höchsten fortgesetzt; bei dieser wurde der Draht hierauf mehrmals (hundertmal und darüber) ummagnetisirt, dann durch Stromschwächung und Wechsel entmagnetisirt und schliesslich die zweite und dritte Beobachtungsreihe gemacht. Die Mittelwerthe  $\frac{\alpha}{2}$  sind in allen diesen Fällen den zwei letzten Reihen entnommen. Nur bei den Messungen in Tabelle I wurde die Probe gleich zu Beginn bei der höchsten Stromstärke mehrmals ummagnetisirt.

Tabelle I.

Eisen, weich -1. Probe, Länge = 103.5 cm.

0.11	21.0	0 · 19	0.34
0.5	0.7	6.1	6.8
14.3	16.7	20.5	28 7
8300	10840	13140	18660
8560	11100	13400	18920
116	250	615	1608
0.15	0.29	0.58	1.08
0.23	0.43	0.87	1.62
2.1	8· <del>6</del>	8.	17.5
1.9	4.1	10.1	26.4
3.5 3.5 3.5	8.0 8.5 19.1	21.6	54.5
0.012	0.023	0.046	0.085
0.022	0.041	0.084	0.155
	3.6 4.1 0.012 3.5 1.9 1.7 0.23 0.15 116 9560 9300 14.3 0.2	3.6 4.1 0.012 3.5 1.9 1.7 0.23 0.15 116 9560 9300 14.3 0.2 7.9 8.0 0.023 8.5 4.1 3.4 0.43 0.29 250 11100 10840 16.7 0.7	3.6       4.1       1.7       0.23       0.15       116       9560       9300       14·3       0.2         7.9       8.0       4·1       3·4       0·43       0·29       250       11100       10840       16·7       0·7         19·1       19·1       8·2       0·87       0·58       615       13400       13140       20·2       1·9

0.52	0.59	02.0	22.0	•
33.2	56.8	195•3	338.0	
46.8	61.2	103.5	. 112.9	•
30450	39740	67040	73110	<109 277.
30710	40000	92300	73370	= 0·0455 >
3873	5810	16110	26580	)533; w <sub>4</sub> = = 8·21 Se
09-1	1.85	3.04	4 60	$n_3 = 0.0$
2.40	2.77	4.56	06.9	$w_1 = 0.0387$ ; $w_2 = 0.0464$ ; $w_3 = 0.0533$ ; $w_4 = 0.0455 \times 10^9$ $R = 0.409 \times 10^7$ ; $p = 0.187 \times 10^9$ ; $\tau = 8.21$ Sec.; $\lambda = 0.277$ .
30.4	38.6	69 2	98.5	0387; # <sub>23</sub> = 109×10 <sup>7</sup> ;
63.6	95.4	264.5	436.5	$n_1 = 0.$ $R = 0.4$
120.0 126.5 135 0	191.0 191.5 190.0	517·4 533·2 535·8	890 866 862	•
0.126	0.145	0.239	0.362	
0.230	0 · 265	0.436	0.659	

Tabelle II.

Eisen, weich -2. Probe, Länge =104 cm.

1								
$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$		80.0	0.24		0.21		0.36	
2   2  -  -		0.5	1.3		2.2		11.8	
×		16.3	20.5		23.0		31 · 9	
S		10890	13480		15340		21290	
Seat		134	283		655		1678	
Hmit		0.16	0.27		0.54		1.00	
Нтах		0.53	0.40		0.81		1.50	
ന_	1	 	. <del>4</del>		10.2		21.3	
8   63	1	2-	5.6		12.9		33.1	
ಶ	5 3	6. 6 6. 4.	11.5	24.3	26.4	54.8	66.3	
$i_1$		0.012	0.021		0.043		0.079	
		0.024	0 041		0.084		0.155	

0.49	0.58	0.72	6.75	
35.9	56-1	223.1	378.6	
47.5	56.5	107.9	118.3	
31760	37770	72090	79060	$10 \times 10^{9}$ $= 0.277.$
3696	5072	15690	25480	$v_4 = 0.064$
1.48	1.71	2.76	4.09	= 0·0653; 1
2.22	2.56	4.15	6.14	$0402; m_3 = 187 \times$
0.28	44.0	86.3	123.9	$= 0.0388; w_3 = 0.0402; w_3 = 0.0653; w_4 = 0.0640 \times 10^9$ $R = 0.409 \times 10^{-7}; v = 187 \times 10^9; \tau = 8.21 \text{ Sec.}; \lambda = 0.277$
6-22	1.001	309.4	502.5	$w_1 = 0.0388$ ; $w_2 = 0.0402$ ; $w_3 = 0.0653$ ; $w_4 = 0.0640 \times 10^9$ $R = 0.409 \times 10^{-7}$ ; $p = 187 \times 10^9$ ; $\tau = 8.21$ Sec.: $\lambda = 0.27$
126·8 146·0 145·5	180.5 202.5 198.2	598·0 607·5 630 3	1029	*
0 · 116	0.134	0.218	0.322	
0.229	0.264	0.428	0.633	

Tabelle III.

Eisen, hart — 1. Probe — Länge = 104 cm.

I				
연. 연. 구 명	0.25	0.36	0.34	0.37
8   61   61	0.3	6.0	2.1	2.5
×	0.6	10.2	12.3	15.2
ıs	5860	6641	8060	8920
S	6140	6920	8340	10200
Seat	73	152	375	852
Hmit	0.16	0.29	09.0	11:11
Hmax	0.24	0.44	06.0	1.67
മ	6.0	1.6	4.1	6.8
2   22	2.	2.5	6.2	14.1
B	9 6 6 5 6 5 5 5	4·1 5 4 5·6	10·8 15·0 11·5	25.4
$i_1$	0.012	0.022	0.045	0.084
.,	0.022	0.040	0.081	0.151

	9	0.42			0.44				0.61			0.73	
		c. I I			15.3				75.5			0.602	_
	0	0.02			22.0				48.4			74.2	
	000	09081			14340	-			31630			48430	×10• -267.
	9	13340			14620	_			31910			48710	= 0·0425; ec.; \text{} = 0
	1 0	ccol			2090				7530			17240	 
	i.	. 65			1.91	_			3.15			4.72	$m_8 = 0.0$
	o o	2.48			2.86				4.72			2.08	$  \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad   \qquad$
	Q N	A.CI			19.3				49.2			76.2	0385; <i>w</i> <sub>2</sub> : 23×10-7
	t	<b>4</b> . /2		•••	34.6				124.7			282.2	$n_1 = 0.$ $R = 0.4$
52.0	57.0	7.cc	62.0	73.5	72.2	237.0	0.000	0.007	251.0	585.6	582.9	545.3	_
-	9	124			0.143				0.236		-	0.354	
	9	ezz.0			0.260				0.427			0.641	_

61\*

Tabelle IV.

Eisen, hart. — 2. Probe. Länge = 106 cm.

0.26	0.29	0.32	0.33
0.4	8.0	2.3	5.1
8.0	8.5	12.5	14.4
5330	6140	8340	0696
5470	6270	8470	9820
0.2	138	376	803
0.17	0.29	09.0	1.10
0.26	0.44	06.0	1.65
1.0	1.9	2.0	10.5
<del>+</del>	2.5	7.3	15.6
÷ &	4 10 10 0 20 10 91 1	14.5	30.8
0.013	0.022	0 · 044	0.082
0.024	140.0	0.084	0-155
	2·4 0·013 2·7 1 4 1·0 0·26 0·17 70 5470 5330 8·0 0·4	2·4         0·013       2·7       1 4       1·0       0·26       0·17       70       5470       5330       8·0       0·4         4·3       5·5       0·022       2·7       1·9       0·44       0·29       138       6270       6140       9·2       0·8	2.4       0.013       2.7       1 4       1.0       0.26       0.17       70       5470       5330       8.0       0.4         4.3       5.5       0.022       5.2       2.7       1.9       0.44       0.29       138       6270       6140       9.2       0.8         13.1       14.5       7.3       5.0       0.90       0.60       376       8470       8340       12.5       2.3

0 · 37	0 39	0.54	29.0
10.4	13.6	56.9	175.4
8-21	19-1	35.8	.59.9
11840	12730	23810	39870
01810	12860	23940	40000
1447	1792	5402	13350
1.63	1.88	3.04	4.49
2 . 44	2.82	4.56	6.74
17.7	21.2	48.0	83.8
28.1	34.8	104.9	259.2
52.4 56.5 56.1	60·4 70·0 69·4	184·7 209·5 210·0	538.6 519.6 517.2
0.121	0.139	0.226	0.334
0.229	0.264	0.427	0.632

 $w_1 = 0.0384$ ;  $w_2 = 0.0430$ ;  $w_3 = 0.0675$ ;  $w_4 = 0.0603 \times 10^9$  $R = 0.432 \times 10^{-7}$ ;  $p = 0.171 \times 10^9$ ;  $\tau = 8.01$  Sec.;  $\lambda = 0.276$ .

Tabelle V.

Bessemerstahl. — Länge = 99·3 cm.

$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$					
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	α-2β α	0.14	20.0	0.14	0.21
$i_1$ $\alpha$ $\frac{\alpha}{2}$ $\beta$ $H_{max}$ $H_{mit}$ $\int cat$ $S$ $\bar{S}$ 11-2       17-4       0.7       0.6       0.23       0.15       50       4420       4320         2.8       2.7       0.06       0.23       0.15       50       4420       4320         0.021       3.1       1.4       1.3       0.42       0.28       100       4820       4720         5.3       5.3       5.3       0.85       0.57       207       4920       4820         11.2       11.2       5.6       4.4       1.55       1.03       400       5220       5120	2 - B	0.1	0.1	4.0	1.2
$i_1$ $\alpha$ $\frac{\alpha}{2}$ $\beta$ $H_{\text{max}}$ $H_{\text{mit}}$ $\int cat$ $S$ 1.2     1.4     0.7     0.6     0.23     0.15     50     4420       2.8     2.7     0.06     0.23     0.15     50     4420       2.7     2.7     0.06     0.28     0.05     4820       5.3     5.9     2.5     0.85     0.57     207     4920       11.2     11.2     5.6     4.4     1.55     1.03     400     5220	×	6.9	9.2	2.2	8.
$i_1$ $\alpha$ $\frac{\alpha}{2}$ $\beta$ $H_{max}$ $H_{mit}$ $\int_{cat}$ 11-2     1.4     0.7     0.6     0.23     0.15     50       1.4     0.7     0.6     0.23     0.15     50       2.8     2.7     0.6     0.23     0.15     50       5.3     1.4     1.3     0.42     0.28     100       5.9     5.9     2.5     0.85     0.57     207       11.2     11.2     5.6     4.4     1.55     1.03     400	ıs	4320	4720	4820	5120
$i_1$ $\alpha$ $\frac{\alpha}{2}$ $\beta$ $H_{max}$ $H_{mit}$ $\int_{0}^{4}$ 11-2     11-4     0.7     0.6     0.23     0.15       11-4     0.7     0.6     0.23     0.15       2.7     2.7     0.6     0.23     0.15       5.3     1.4     1.3     0.42     0.28     1       5.9     2.9     2.5     0.85     0.57     2       11.2     11.2     4.4     1.55     1.03     4	S	4420	4820	4920	5220
i₁     α     α/2     β     Hmax       11-2     1.4     0.7     0.6     0.23       11-4     0.7     0.6     0.23       2-8     2.7     0.6     0.23       2-7     1.4     1.3     0.42       5-3     5.9     0.42       5-9     2.9     2.5     0.85       11-2     11-2     5.6     4.4     1.55	Seat	90	100	207	400
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Hmit	0.15	0.28	0.57	1.03
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Hmax	0.23	0.42	0.85	1.55
i <sub>1</sub> α 1-2 1-4 0·011 1·4 0·021 3·1 5·9 0·042 6·0 11·2 11·2 11·2 11·2 11·2	63.	9.0	1.3	2.57	4.
0.0011	2 g	0.7	4.1	8.0	5.6
	ಶ	2 - 1 - 4 - 1	2.8 3.1	5.3 6.0	11.2
0.021	$i_1$	0.011	0.021	0.042	0.077
	***	0.021	0.039	820.0	0.142

0.15	0.23	0.16	0.12	
1.3	2.5	61 80	3.3	
2.8	9.8	9.6	6.6	•
2460	5345	5970	6193	×10• •267.
2560	5445	6070	6293	$m_1 = 0.0761$ ; $m_2 = 0.088$ ; $m_3 = 0.1016$ ; $m_4 = 0.0870 \times 10^{\circ}$ $R = 0.428 \times 10^{-7}$ ; $p = 0.184 \times 10^{\circ}$ ; $\tau = 8.00$ Sec.; $\lambda = 0.267$ .
614	693	1214	1835	= 8.00  S
1.49	1.7.1	2.70	3 93	$m_3 = 0$ . $84 \times 10^9$ ; $\tau$
2.53	2.57	4.05	5 · 89	= 0.088 p = 0.18
7.3	2.2	14.2	4.62	·0761; 11′2 28×10-7
9.8	2.6	0.21	25.7	$\mathbf{r}_1 = 0$ $R = 0.4$
16.9	19.2 18.8 20.2	31.5 36.3 34.5	52.0 50.5 52.0	
0.111	0 · 127	0.201	0 · 292	
0.205	0.236	0.372	0.541	

#### 2. Axial.

Die Bedeutung der Buchstaben ist in diesen Tabellen dieselbe wie vorher, H bedeutet jetzt die Feldstärke überhaupt, J die Intensität der Magnetisirung. Der Reductionsfactor des Galvanometers, bestimmt wie vorher, war in diesem Falle  $= 0\cdot1072\times10^{-7}$  abs. E.,  $T=7\cdot89$  Sec. Der Widerstand des Galvanometers, der Zuleitung und der Secundärrolle  $= 3\cdot24\times10^{9}$ ;  $\lambda=0\cdot272$  (brig.). Bei niederen Feldstärken, insbesondere für die Beobachtungen an Bessemerstahl habe ich statt des Hartmann-Galvanometers ein solches von Thomson-Carpentier benützt, welches ungefähr zehnmal grössere Ausschläge lieferte wie das erste. Die Beobachtungen wurden dann für die Verhältnisse des Hartmann-Galvanometers umgerechnet und in die Tabellen eingetragen.

Den Tabellen ist ein »vor circ.« oder »nach circ.« beigefügt. Dies bedeutet, dass die in der Tabelle angeführten Messungen vor oder nach der Untersuchung der circularen Magnetisirung gemacht wurden.

In den meisten Fällen sind zwei Reihen beobachtet worden; eine vor und die andere nach mehrmaliger Ummagnetisirung bei der höchsten Stromstärke; für den Vergleich wurden immer nur die letzteren benützt.

Für die Untersuchung der circularen Magnetisirung musste der Draht, wie erwähnt, stimmgabelförmig abgebogen werden. Der Bug kam gerade in die Mitte des Drahtes zu liegen. Zur Messung in der axialen Richtung ist der Draht wieder gerade gerichtet worden und die Secundärspule lag eben über der deformirten Stelle. Solche Deformationen ändern aber bei weichen Drähten die Susceptibilität ganz erheblich. Thatsächlich wurde diese in den, nach der circularen Magnetisirung ausgeführten Beobachtungen durchwegs kleiner gefunden wie vorher. Der Grund kann in der vorausgegangenen circularen Magnetisirung oder auch in den Deformationen, wahrscheinlich aber in beiden liegen.

Mit \*Eisen weich (zweite Probe) habe ich noch folgenden Versuch gemacht. Der Draht wurde in zwei, je 53 cm lange Hälften geschnitten und diese in der axialen Richtung untersucht.

Tabelle VI.

Eisen weich. — 1. Probe, Länge = 101.5 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	'n	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0 00085	2 · 2	1 • 1	1.0	1.9	0 12	15.8	0.1	0.09
0.0022	6.5	3.2	2.9	5.6	0.31	17.9	0.3	0.11
0.0041	14.8	7.4	5.9	12.8	0.58	21.9	1.5	0.20
0.0067	30 · 1	15.0	11.0	25.9	0.95	27 · 1	4.0	0.27
0.0108	69.9	34.9	21.3	60.3	1.54	39 · 2	13.6	0.38
0.0128	105.7	<b>52</b> ·8	28.0	91.2	1 · 82	50.0	24.0	0.45
0.0203	418 7	209 3	47.5	381.7	2.89	132	161.8	0.77
0.0311	761 • 9	380.9	63.3	658.2	4.43	149	317 · 6	0.83
0.0203	418 7	209 3	47.5	381.7	2.89	132	161.8	0

Tabelle VII. Eisen, weich. — 2. Probe, Länge = 109 cm (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	3	J	Н	x	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00083	2·8 3·1	1·4 1·5	1 3 1·4	2 7	0.12	22.7	0 · 1 0 · 1	0·07 0·07
0.0022	8·2 9·4	4·1 4·7	3·7 4·1	8 · 1	0.31	<b>26</b> ·0	0·4 0·6	
0.0044	18·7 23·0	9·4 11·5	8·1 9·4	19.9	0.63	31.6	1·3 2·1	0·14 0 18
0.0067	34·6 42·8	17·3 21·4	13·8 15·8	37.0	0.95	38.8	3·5 5·6	
0.0108	86·5 107·8	43·2 53·9	27·0 29·7	93 · 1	1.54	60.6	16·2 24·2	0·37 0·45
0.0130	149·3 181·2	74·7 90·6	36·1 39·3	156.6	1.85	84 · 8	38·6 51·3	
0.0204	577·2 583·6	288·6 291·6		504.2	2.91	173	225 229	0·78 0·78
0.0312	930·6 910·8	465·3 455·5	82·4 81·7	787 - 1	4.45	177	383 374	0·82 0·82

Tabelle VIII. Eisen, weich. — 2. Probe, Länge =  $106 \cdot 5 cm$  (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	з	J	Н	x	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00084	2·2 2·4	1·1 1·2	1 · 1 1 · 1	2.0	0.12	17.1	0.0	0.03
0.0022	6·6 7·5	3·3 3·8	3·3 3·0	6.6	0.31	21 2	0.3	0·13
0.0044	15·7 19·1	7·9 9·6	6 · 6 7 · 6	16.6	0.62	26.8	1·3 2·0	
0.0067	28·6 34·8	14·3 17·4	11·2 12·6	30.1	0.95	31.6	3·1 4·8	0·22 0·28
0.0108	67·2 82·2	33·6 41·1	21·6 24·5	71 · 0	1.53	46.3	12·0 16·6	
0.0129	103·6 129·4	51·8 64·7	29·0 31·6	111.8	1 · 83	61.0	22·8 33·1	
0.0202	463·3 477·1	231·6 238·5	51·8 51·3	412.1	2.88	143	179·8 187·2	0·78 0·78
0.0308	807·7 788·2	403·8 394·1	67·4 67·8		4.39	155	336·4 326·3	

Tabelle IX.

Eisen, hart. — 1. Probe, Länge = 101.5 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	Н	x	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00085	1 · 1			1.0	0.12	8.7		
0.0022	2 · 9	1.5	1 · 3	2.8	0.31	9.0	0.2	0.12
0.0041	6 9	<b>3</b> ·5	2.8	6.6	0.58	11.3	0.7	0.20
0.0067	14.2	7 · 1	5.5	13 · 7	0.94	14 5	1.6	0.23
0.0108	30.8	15.4	10.6	29.8	1.55	19.3	4.8	0.31
0 0128	42.4	21.2	13.3	41.0	1.84	22 · 3	7.9	0.37
0.0203	118.7	59 · 3	25.2	114.7	2.90	39.6	34.1	0.57
0.0311	293 · 2	146.6	47.8	283 · 7	4.43	64.0	96.8	0.66
						3.0	30 0	

Tabelle X. Eisen, hart. — 2. Probe, Länge = 110 cm (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	3	J	Н	x	$\frac{\alpha}{2}$ — $\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00087	0·90 0·94	0·45 0·47	0·43 0·47	0.8	0.12	7 · 4	0·02 0·00	0·04 0·00
0.0022	2.7	1·3 1·4	1 · 2 1 · 3	2 · 7	0 31	8.8	0.09	0·07 0·07
0.0044	6.6 6.0	3·3	2·7 2·8	6 · 4	0.62	10.3	0·3 0·5	0·10 0·15
0.0067	10.8	5·4 5·8	4·4 4·6	11.2	0.96	11.7	1·0 1·2	0·19 0·21
0.0108	21.8	10·9 11 6	8·2 8·6	22.5	1.54	14 6	2·7 3·0	0·25 0 26
0.0129	28.7	14·4 15·6	10.7	30 · 1	1 · 83	16 4	3·7 5·1	0.26
0 0204	69.4	34·7 37·2 98·7	20·7 22·4 37·2	71.9	2 · 91	24 · 7	14·0 14·8 61·5	0·40 0·40 0·62
0.0312	197·4 186·1	93 · 1	36.8	180.0	4 · 44	40.5	56.3	0.60

Tabelle XI. Eisen, hart. -2. Probe, Länge = 104.8 cm (nach circ.)

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	ន្	J	Н	ĸ	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00081	0.93	0·46 0·46	0·44 0·46	0.9	0.12	7.8	0·02 0·00	0·04 0·00
0 0022	2·7 2·7	1·35 1·36	1·25 1·27	2.6	0.31	8.6	$0.09 \\ 0.08$	0·07 0·07
0.0043	6·2 6·3	3·1 3·1	2·8 2·8	6.1	0.61	10.0	$\begin{array}{c} 0.3 \\ 0.3 \end{array}$	0·10 0·10
0 0066	11·2 11·4	5·6 5·7	4·5 4·6	11.0	0.94	11.8	1 · 1 1 · 1	0 20 0·19
0.0107	22·6 22·9	11·3 11·5	8·8 8·7	22.2	1.52	1 <b>4</b> ·6	2·5 2·8	0·22 0·24
0.0128	30.8 30.0	15·0 15·4	11·0 11·2	29.8	1.82	16.4	4·0 4·2	0·27 0·27
0.0201	71·7 75·0	35·8 37·5	22·2 22·4	72 · 6	2.87	25.3		0·37 0·40
0.0307	217·5 202·9	108·7 101·4	39·3	196.2	4.37	44.9	68·9 62·1	0.61

Tabelle XII.

Bessemerstahl. — Länge = 97 cm (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	Н	x	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0.00085	0.78	0.39		0.75	0.12	6.2		
0.0022	1.9	0.95	0.95	1.84	0.31	5.9	0	0.00
0.0041	3.8	1.8	1.8	3.5	0.58	60	0	0.00
0.0067	6 · 1	<b>3</b> ·05	2.9	5 · 9	0.94	6.2	0.15	0.05
0 0108	10.0	5.0	4.8	9 · 6	1.55	6.2	0.2	0 04
0.0128	12.0	60	5.7	11.6	1 · 84	6.3	0.3	0.05
0.0203	19.8	9.9	9 · 4	19.1	2.90	6.6	0.5	0.05
0.0311	32.7	16.4	14.7	31 · 6	4 · 43	7 · 1	1 · 7	0.10
		j				ļ		

Tabelle XIII.Eisen, weich. — 2. Probe. — Die Hälften, je 53 cm lang.

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	з	J	Н	×	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2}{2}\beta$
0.00079	2·9 2·4	1 · 45 1 · 20	1·4 1·1	2·5 2·1	0.11	22·5 18·6	0·05 0·1	0·04 0·08
0.0021	8·7 7·3	4·35 3·65	3·3	7·6 6·4	0.30	25·5 21·3	0·45 0·35	0·10 0·10
0.0043	21·0 17·6	10 5 8·8	8·6 7·4		0.59	30 7 25·7	1·9 1·4	0·18 0·16
0.0065	39·1 32·4	19·6 16·2	14·4 12·2		0.91	37·3 30·7	5·2 4·0	0·27 0·24
0 0105	92·6 73·8	46·3 36·9	27·2 23·0	80.0	1.45	55·2 43·8	19·1 13·9	0·41 0·38
	140.1	70.0	35.3	120 8		70 · 2	34.7	0.20
0.0125	107·7 461·0	230.5	23·8	398·3	1.72	54·1 153·8	24·3 176·6	0·44 0·77
0.0197	375·0 808·0	187·5 404·0	52·6 85·5	324 0 698·1	2.61	123·2 178·3	135·6 318·5	0 72 0·79
0.0301	697.5	348.7	74.2	602.6	3.95	152.0	274.5	0.79

Die Resultate sind in Tabelle XIII verzeichnet. Die Werthe von H sind mit Rücksicht auf die entmagnetisirende Wirkung der Enden corrigirt. Vergleicht man die Werthe von Tabelle XIII mit jenen von Tabelle VIII, so findet man, dass eine Hälfte bedeutend grössere, die andere eine etwas kleinere Werthe der Susceptibilität ergibt als die Mitte. Der Draht war also wahrscheinlich schon von allem Anfang an magnetisch nicht ganz homogen. Für den Vergleich mit der circularen Magnetisirung habe ich die mit dem ungetheilten Drahte erhaltenen Zahlen benützt.

## Discussion der Resultate.

Wir wollen zunächst den Extrastrom oder den Integralwerth der elektromotorischen Kraft fedt, welche durch die circulare Magnetisirung inducirt wird, in Betracht ziehen. In Tabelle XIV sind die Werthe von fedt und die entsprechenden Stromstärken für die einzelnen Drahtsorten zusammengefasst und in der Curventafel Fig. 2 graphisch dargestellt. Die Werthe von fedt steigen insgesammt mit der Stromstärke, am stärksten beim weichen, dann weniger stark beim harten Eisen, sehr mässig und nahezu in einer geraden Linie beim Bessemerstahl. Der Verlauf von fedt ist zu vergleichen mit der Magnetisirungsintensität bei der axialen Magnetisirung; bei dieser Versuchsanordnung muss fedt bei zunehmender Stromstärke einem constanten Werthe zustreben. Die zwei Curven des weichen Eisens verlaufen ganz ähnlich, nur sind sie quantitativ ein wenig verschieden, was zum Theile in der nicht ganz gleichen materiellen Beschaffenheit, zum Theile aber auch in der etwas verschiedenen Länge der beiden Probestücke seinen Grund hat. Dasselbe gilt für die beiden Curven des harten Eisens.

Aus den Werthen von  $\int edt$ , respective den Selbstinductionscoëfficienten sind die Werthe der Susceptibilität berechnet worden.

Der Verlauf ist ähnlich wie bei der axialen Magnetisirung, das Maximum der Susceptibilität scheint auch beim weichen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Nach H. du Bois, Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung, S. 45.

Tabelle XIV.

<i>i</i> <sub>1</sub>	Sedt	$i_1$	∫edt	<i>i</i> <sub>1</sub>	∫edt	<i>i</i> <sub>1</sub>	∫edt	<i>i</i> <sub>1</sub>	Sedt
0.012	116	0.012	134	0.012	73	0.013	70	0.011	50
0.023	250	0.021	283	0.022	152	0.022	138	0.021	100
0.046	615	0.043	655	0.045	375	0.044	376	0.042	207
0.085	1608	0.079	1678	0.084	852	0.082	803	0.077	400
0.126	3873	0.116	3696	0.124	1655	0.121	1447	0.111	614
0.145	5810	0.134	5072	0.143	2090	0.139	1792	0 · 127	693
0.239	16110	0.218	15690	0.236	7532	0.226	5402	0.201	1214
0.362	26580	0.322	25480	0.354	17240	0.334	13350	0.292	1835
	1. Pr  i <sub>1</sub> 0·012  0·023  0·046  0·085  0·126  0·145  0·239	0·012 116 0·023 250 0·046 615 0·085 1608 0·126 3873 0·145 5810 0·239 16110	1. Probe     2. P $i_1$ $\int edt$ $i_1$ 0·012     116     0·012       0·023     250     0·021       0·046     615     0·043       0·085     1608     0·079       0·126     3873     0·116       0·145     5810     0·134       0·239     16110     0·218	1. Probe     2. Probe $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ 0.012     116     0.012     134       0.023     250     0.021     283       0.046     615     0.043     655       0.085     1608     0.079     1678       0.126     3873     0.116     3696       0.145     5810     0.134     5072       0.239     16110     0.218     15690	1. Probe     2. Probe     1. Probe $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ 0.012     116     0.012     134     0.012       0.023     250     0.021     283     0.022       0.046     615     0.043     655     0.045       0.085     1608     0.079     1678     0.084       0.126     3873     0.116     3696     0.124       0.145     5810     0.134     5072     0.143       0.239     16110     0.218     15690     0.236	1. Probe         2. Probe         1. Probe $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ 0.012         116         0.012         134         0.012         73           0.023         250         0.021         283         0.022         152           0.046         615         0.043         655         0.045         375           0.085         1608         0.079         1678         0.084         852           0.126         3873         0.116         3696         0.124         1655           0.145         5810         0.134         5072         0.143         2090           0.239         16110         0.218         15690         0.236         7532	1. Probe     2. Probe     1. Probe     2. Probe $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ 0.012     116     0.012     134     0.012     73     0.013       0.023     250     0.021     283     0.022     152     0.022       0.046     615     0.043     655     0.045     375     0.044       0.085     1608     0.079     1678     0.084     852     0.082       0.126     3873     0.116     3696     0.124     1655     0.121       0.145     5810     0.134     5072     0.143     2090     0.139       0.239     16110     0.218     15690     0.236     7532     0.226	1. Probe       2. Probe       1. Probe       2. Probe $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ $i_1$ $\int edt$ 0.012       116       0.012       134       0.012       73       0.013       70         0.023       250       0.021       283       0.022       152       0.022       138         0.046       615       0.043       655       0.045       375       0.044       376         0.085       1608       0.079       1678       0.084       852       0.082       803         0.126       3873       0.116       3696       0.124       1655       0.121       1447         0.145       5810       0.134       5072       0.143       2090       0.139       1792         0.239       16110       0.218       15690       0.236       7532       0.226       5402	1. Probe         2. Probe         1. Probe         2. Probe         sta $i_1$ $\int edt$ $i_1$

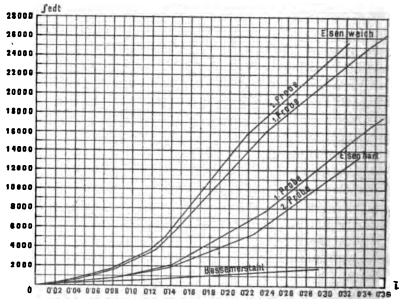


Fig. 2.

Eisen noch nicht erreicht zu sein; kräftigere Ströme, bei denen das Maximum erreicht und überschritten worden wäre, konnten

eben nicht angewendet werden. In den Curvenfiguren 3 und 4 sind die Werthe von x und die dazu gehörigen Feldstärken

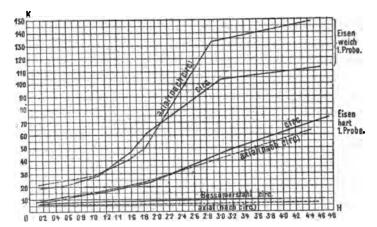
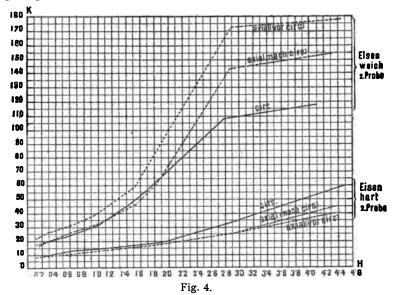


Fig. 3.

sowohl für die circulare, als auch axiale Magnetisirung eingetragen.



Nun kommen wir zur zweiten Frage, deren Lösung wir uns gestellt haben, und diese lautet: Wie ist das

Verhältniss der Permeabilität in axialer und circularer Richtung?

H. Herwig (l. c.) hat für Gasleitungsröhren gefunden, dass die Curve der circularen Magnetisirungsfunctionen von ungefähr demselben Ansangspunkt mit der Curve der axialen Functionen beginnend, später bedeutend steiler ansteigt. Herwig konnte bei den Versuchen über die circulare Magnetisirung die zusammengehörigen Werthe der Feldstärke und der Susceptibilität ziemlich genau angeben; weniger gut war dies bei der axialen Magnetisirung möglich; wegen der Röhrenform und des kleinen Axenverhältnisses war die wirkliche Feldstärke kaum sicher zu ermitteln. Bei den vorliegenden Versuchen ist es umgekehrt. Wie schon oben erwähnt, ist die circular wirksame magnetisirende Kraft in einem vom Strom durchflossenen Drahte in der Axe = 0 und in der Peripherie ein Maximum; dem entsprechend wird auch die Susceptibilität an verschiedenen Stellen des Querschnittes verschieden sein, und der aus dem Extrastrom gerechnete setzt sich aus einer Summe von ungleichen Werthen zusammen. Für Drähte mit geringer, langsam ansteigender Susceptibilität wird das aus dem Extrastrom gerechnete ziemlich richtig dem Mittelwerth der magnetisirenden Kraft entsprechen. Für weiches Eisen, bei dem die Susceptibilität anfangs langsam, dann aber rasch ansteigt, bekommen wir jedoch auf diese Weise einen Werth von z, welcher für den Mittelwerth der magnetisirenden Kraft zu gross ist. Bei der Beantwortung der zweiten Frage muss man sich daher diese Erwägungen vor Augen halten.

Betrachten wir zunächst die auf das weiche Eisen bezüglichen Daten und Curven (Fig. 4 und 5). In den Curven sind die Werthe von x und die zugehörigen H (für die circulare Magnetisirung die Mittelwerthe) eingetragen. Sieht man zunächst von der einen auf die axiale Magnetisirung bezüglichen Curve der Probe 2 ab, welche vor der circularen erhalten wurde, so zeigen beide Proben einen fast gleichen Verlauf. Die Axialcurve liegt bei kleinen Werthen der Feldstärken über der circularen, dann schneidet sie diese und erhebt sich schliesslich bei höheren magnetisirenden Kräften wieder ganz beträchlich über dieselbe. Die Axialcurve in Fig. 5, welche mit dem ganz frischen

weichen Eisendraht, vor den Messungen über die circulare Magnetisirung erhalten wurde, liegt jedoch ganz beträchtlich über der Circularcurve. Berücksichtigt man, dass die Werthe von x für die circulare Magnetisirung gegenüber dem Mittelwerth von H sicher zu hoch sind, so folgt daraus, dass für weiches Eisen die Susceptibilität rings um die Axe durchwegs kleiner ist als in der Richtung der Axe.

Beim harten Eisen hat die Probe 1 für beide Magnetisirungsarten etwas grössere Werthe von x geliefert als Probe 2. Letztere war magnetisch härter als erstere, obwohl beide derselben Drahtrolle entnommen wurden. Auch das Verhältniss der beiden Curven ist bei diesen zwei Proben etwas verschieden. Bei der härteren Probe 2 liegt die Axialcurve durchwegs unter der circularen. Bei Probe 1 verlaufen sie anfänglich zusammen, dann erst nehmen sie den Verlauf so wie bei Probe 2, ohne sich jedoch so weit von einander zu entfernen wie bei dieser. Die Versuche von Herwig mit gezogenen Gasleitungsröhren gehören in diese Rubrik und stimmen, wie man sieht, qualitativ mit den hier gemachten Beobachtungen überein. Ein Vergleich der für weiches und hartes Eisen erhaltenen Resultate lehrt also, dass durch den Zug die Susceptibilität sowohl in axialer, als auch circularer Richtung heruntergesetzt wird, jedoch stärker in der axialen als in der circularen, so dass für Eisen, welches durch Zug gehärtet wird, die Susceptibilität in der axialen Richtung kleiner werden kann als in der circularen.

Beim Bessemerstahl liegt die Axialcurve ganz unter der circularen; hier ist die Susceptibilität rings um die Axe entschieden grösser als in der Richtung derselben.

Bei allen Versuchen wurden auch Messungen über den remanenten Magnetismus vorgenommen. Ich habe einige der Resultate in den Figuren 5 und 6 graphisch dargestellt. Es bezieht sich, wie vorher, die ausgezogene Curve auf die circulare, die gestrichelte aber auf die axiale Magnetisirung. Hiebei muss noch erwähnt werden, dass die Daten, welche sich auf den remanenten Magnetismus in schwachen Feldern (insbesondere bei circularer Magnetisirung) beziehen, ziemlich unsicher sind und daher den entsprechenden Curven in diesem Gebiete nur ein qualitativer Werth beizulegen ist. Die Curven geben einer-

seits den remanenten Magnetismus in Procenten des temporären, anderseits die Feldstärke. Beim weichen Eisen durchschlingen sich die beiden Curven, schliesslich bleibt die Axialcurve etwas ober der circularen. Der remanente Magnetismus beginnt bei beiden Arten der Magnetisirung mit niederen

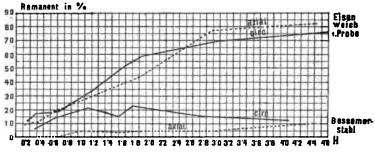


Fig. 5.

Werthen und erreicht bei den höchsten hier angewendeten Feldern circa  $70^{\circ}/_{\circ}$  des temporären.

Für hartes Eisen und Bessemerstahl sind die Werthe des remanenten Magnetismus für die circulare Magnetisirung durchwegs grösser als für die axiale. Der unregelmässige Verlauf der Circularcurve für Bessemerstahl ist jedenfalls Beobachtungs-

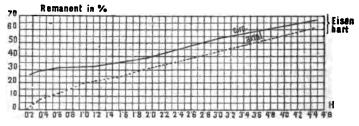


Fig. 6.

fehlern zuzuschreiben. Auffallend ist der Umstand, dass die Circularcurven bei diesen zwei Drähten schon ziemlich hohe Werthe anzeigen, wo die Axialcurven noch den Werth Null angeben. Auch Herwig hat bei den Eisenröhren gefunden, dass der remanente Magnetismus bei der circularen Magnetisirung durchwegs grösser ist als bei der circularen; bei seinen

Versuchen war jedoch dieses Ergebniss, wegen der beträchtlichen entmagnetisirenden Wirkung der Röhrenenden, vorauszusehen.

Schliesslich lässt sich den Beobachtungen noch Einiges über den Einfluss mehrmaliger Ummagnetisirung bei stärkeren Feldern auf die Susceptibilität in schwachen Feldern entnehmen.

Ein hundertmaliger Magnetisirungswechsel bei der höchsten hier angewendeten Feldstärke hatte beim weichen und harten Eisen in allen Fällen eine grössere Susceptibilität in niederen Feldern zur Folge. Bei der Maximalfeldstärke selbst, wurde die Susceptibilität durch diesen Wechsel jedoch heruntergesetzt. Mit 100 Wechseln war schon ein constanter Zustand erreicht, weitere 100 Ummagnetisirungen übten keine Veränderung mehr aus. Beim Bessemerstahl konnte jedoch ein solcher Einfluss in keinem Falle constatirt werden.

Die Frage, ob ein Einfluss der axialen auf die circulare Magnetisirung und umgekehrt vorhanden ist, lässt sich aus diesen Beobachtungen schwer beantworten, weil die Messungen bei circularer und axialer Magnetisirung nicht hinter einander gemacht werden konnten, ohne den Draht zu deformiren. Der Unterschied in den Axialcurven für weiches Eisen, welche vor und nach der circularen Magnetisirung erhalten wurden (Fig. 4), kann sowohl der circularen Magnetisirung, als auch den Deformationen zugeschrieben werden.

Die Resultate dieser Untersuchung lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

Schickt man durch Eisendrähte einen Strom, so entstehen beim Schliessen und Öffnen des Stromes infolge der circularen Magnetisirung kräftige Extraströme, aus welchen man mit Hilfe einer von Kirchhoff entwickelten Formel die Susceptibilität der betreffenden Drahtsorte berechnen kann. Es wurden nun an demselben Drahte Bestimmungen der Susceptibilität in circularer und axialer Richtung vorgenommen. Die Beobachtungen ergaben bei den untersuchten Drahtsorten in qualitativer Beziehung einen gleichen Verlauf der Susceptibilität in beiden Richtungen; in quantitativer Hinsicht ist jedoch ein bemerkenswerther Unterschied zu constatiren.

Beim weichen, ausgeglühten Eisen ist die Susceptibilität rings um die Axe kleiner als in der Richtung derselben. Wird

der Eisendraht durch Zug gehärtet, so vermindert sich die Susceptibilität in der Längsrichtung rascher als in der circularen und das für das weiche Eisen beobachtete Verhältniss kann sich sogar umkehren.

Beim Bessemerstahl ist die circulare Susceptibilität entschieden grösser als die axiale.

Der remanente Magnetismus verläuft beim weichen Eisen ziemlich gleich in beiden Richtungen. Beim harten Eisen und Bessemerstahl ist er grösser bei der circularen Magnetisirung als bei der axialen und der Unterschied ist insbesondere in schwachen Feldern sehr gross.

Ein mehrmaliges Ummagnetisiren bei grösseren Feldstärken erhöht die Susceptibilität in niedereren Feldern.

# Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen

von

### J. Sahulka.

(Mit 3 Textfiguren.)

Aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Erzeugt man einen Lichtbogen zwischen gleichartigen Elektroden durch Anwendung von Gleichstrom, so beobachtet man bekanntlich zwischen der positiven Elektrode und dem Lichtbogen einen grossen, zwischen dem Lichtbogen und der negativen Elektrode einen kleinen Spannungsunterschied. Diese Erscheinung lässt sich am einfachsten unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften erklären. Erzeugt man den Lichtbogen mit Wechselstrom, so beobachtet man mit einem zur Messung alternirender Spannungsdifferenzen dienenden Voltmeter zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen einen gleich grossen Spannungsunterschied.

Im Folgenden sind in dem ersten Abschnitte einige Versuchsresultate mitgetheilt, welche an einem mit Wechselstrom zwischen Eisen und Kohle erzeugten Lichtbogen erhalten wurden. Der Lichtbogen verhält sich wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, doch konnte ich einige Erscheinungen weder unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften, noch unter der Annahme von Übergangswiderständen erklären. Vielleicht sind diese Erscheinungen dadurch bedingt, dass der Lichtbogen eine disruptive Entladung ist, wie schon G. Wiedemann<sup>1</sup> annahm und E. Lecher<sup>2</sup> an

<sup>1</sup> G. Wiedemann, Elektricität 1885, Bd. 4, S. 835 und 855.

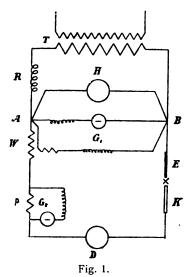
<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> E. Lecher, Neue Versuche über den galvanischen Lichtbogen. Diese Sitzungsber., 1887, II, S. 1007.

dem mit Gleichstrom zwischen Eisenelektroden erzeugten Lichtbogen experimentell bewies. Der zweite Abschnitt handelt über den mit Wechselstrom zwischen zwei Kohlenelektroden erzeugten Lichtbogen. In diesem Falle besteht zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz. Im dritten Abschnitte sind einige Versuchsresultate mitgetheilt, welche an einem Gleichstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden erhalten wurden; aus diesen Versuchen ging nur hervor, dass die Aureole des Lichtbogens einen sehr grossen Widerstand hat.

Bei meinen Versuchen wurde ich von meinen Collegen H. Eisler und Dr. M. Reithoffer, sowie von Herrn Oberingenieur Böhm-Raffay in sehr werkthätiger Weise unterstützt, wofür ich denselben an dieser Stelle bestens danke.

### Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle.

Der zu den Versuchen verwendete Wechselstrom wurde aus dem Kabelnetze der Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft in Wien entnommen und mit Hilfe eines Transformators auf 100 Volt Spannungsdifferenz im secundären Kreise transformirt. Die Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes ist 2500 pro Minute. Die eine Elektrode des Lichtbogens bestand aus einem 4 mm dicken Stäbchen aus weichem Eisen, die andere aus einer 10 mm dicken Dochtkohle. Eine homogene Kohle erwies sich für die Versuche als ungeeignet, weil sich dann der Lichtbogen nur sehr schwer bilden liess und nur kurze Zeit andauerte. Die leichte Zerstäubbarkeit der Kohle schien eine nothwendige Bedingung zu sein, dass der Lichtbogen dauernd erhalten bleibe. Die Elektroden wurden in vertikaler Stellung verwendet, das Eisenstäbchen als obere Elektrode; an demselben bildet sich während der Dauer der Versuche ein Tropfen von flüssigem Eisen. Von demselben gehen Dämpfe in der Form eines blauen Kegels aus, welcher die Spitze an der Oberfläche des Eisentropfens hat. Der Kegel ist von rothen Dämpfen umgeben. Das Eisenstäbehen und die Kohle überziehen sich nach kurzer Zeit mit Rost, welcher jedoch nicht haftet. Legt man an die Elektroden ein Galvanometer an, so wird die Magnetnadel abgelenkt; eine in den Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole zeigt ebenfalls an, dass im Stromkreise ein Gleichstrom oder gleichgerichteter Strom fliesst, welcher eine Componente des gesammten Stromes bildet. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle verhält sich daher wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, und zwar bildet die Kohle den positiven, das Eisen den negativen Pol, indem im Lichtbogen der Gleichstrom vom Eisen zur Kohle fliesst. Verbindet man das Galvanometer mit den Secundärklemmen des Transformators, so bekommt man einen



sehr kleinen Ausschlag, der nur dem Spannungsverluste des Gleichstromes in der Secundärwickelung entspricht. Für die in der Secundärwickelung des Transformators T (Fig. 1) erzeugte periodisch veränderliche elektromotorische Kraft bildet der Lichtbogen und der demselben vorgeschaltete Regulirwiderstand R den äusseren Kreis, während für die im Lichtbogen erzeugte elektromotorische Kraft von constantem Vorzeichen der Widerstand R und die Secundärwickelung des Transformators den äusseren Kreis bilden.

Das Schema der Versuchsanordnung ist aus der Figur ersichtlich: *EK* ist der Lichtbogen; *D* ist ein Torsions-Elektrodynamometer von Siemens & Halske zur Messung der

gesammten Stromstärke J; p ist ein in den Stromkreis eingeschalteter inductionsloser Widerstand, an dessen Enden ein Torsionsgalvanometer  $G_{\bullet}$  von Siemens & Halske von 19 Widerstand nebst einem Vorschaltwiderstande von  $9\Omega$  angeschlossen war; W ist die dickdrahtige Spule eines Wattmeters von Ganz & Co., dessen dünndrahtige Spule nebst einem vorgeschalteten, inductionslosen Widerstande von 1000Ω zwischen die Punkte AB geschaltet war; mit H ist ein Hitzdraht-Voltmeter von Hartmann & Braun bezeichnet, mit welchem die gesammte zwischen den Punkten AB herrschende Spannungsdifferenz  $\Delta$  gemessen wurde;  $G_1$  ist ein Torsionsgalvanometer von Siemens & Halske von 1Ω Widerstand, welchem ein inductionsloser Widerstand von 999  $\Omega$  vorgeschaltet war. Die Spulen eines jeden der Galvanometer  $G_1$ ,  $G_2$ , haben nur circa 150 Windungen von kleiner Windungsfläche; bei diesen Instrumenten entspricht einer Drehung der Spiralfeder um 1° eine Stromstärke von 0.001 A. Mit dem Galvanometer  $G_1$  wird die zwischen den Punkten AB herrschende gleichgerichtete Spannungsdifferenz A, gemessen, welche eine Componente der gesammten Spannungsdifferenz  $\Delta$  bildet. Aus den Angaben des Galvanometers  $G_2$  findet man die Stärke  $J_1$  des im Stromkreise fliessenden gleichgerichteten Stromes, welcher eine Componente des Gesammtstromes J bildet.

Der Reductionsfactor des Elektrodynamometers war bei den in der folgenden Tabelle mit Nummer 1 bis 4 bezeichneten Versuchen 0.78, bei den mit Nummer 5 bis 7 bezeichneten Versuchen 2.56; der Reductionsfactor des Wattmeters war 0.00344.

Zwischen den Punkten AB besteht ausser  $\Delta_1$  noch eine periodisch veränderliche Spannungsdifferenz  $\delta_2 \sin \omega t$ ; die resultirende Spannungsdifferenz ist

$$\delta = \Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t$$
.

Die Angaben des Voltmeters H hängen von dem mittleren Quadrate der Grösse  $\delta$  ab:

$$\Delta^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t)^2 dt = \Delta_1^2 + \frac{\delta_2^2}{2}.$$

Setzt man

$$\Delta_{\mathbf{z}}^{\mathbf{z}} = \frac{\delta_{\mathbf{z}}^{\mathbf{z}}}{2},$$

so erhält man

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}.$$

Die Grösse  $\Delta_2^2$  ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Spannungsdifferenz; die Formel bleibt auch richtig, wenn die periodisch veränderliche Componente nicht nach dem einfachen Sinusgesetze variirt.

Der Strom setzt sich in analoger Weise aus  $J_1$  und einer periodisch veränderlichen Componente zusammen:

$$i = -J_1 + i_2 \sin(\omega t - \varphi)$$
.

Dem Werthe  $J_1$  musste das Vorzeichen — gegeben werden, denn wenn die Componenten  $\Delta_1$  und  $\delta_2$  sin  $\omega t$  gleiches Vorzeichen haben und sich addiren, so erzeugen sie entgegengesetzt gerichtete Ströme, weil die eine Componente der elektromotorischen Kraft im Transformator, die andere im Lichtbogen erzeugt wird. Die Phasendifferenz zwischen der periodisch veränderlichen Stromcomponente und der Spannungsdifferenz  $\delta_2$  sin  $\omega t$  ist mit  $\varphi$  bezeichnet. Die Angaben des Elektrodynamometers D hängen vom mittleren Quadrate des resultirenden Stromes ab:

$$J^{2} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} [-J_{1} + i_{2} \sin(\omega t - \varphi)]^{2} dt = J_{1}^{2} + \frac{i_{2}^{2}}{2}.$$

Setzt man

$$J_{\mathbf{z}}^{\mathbf{z}} = \frac{i_{\mathbf{z}}^2}{2},$$

so erhält man

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \tag{2}$$

 $J_{2}^{2}$  ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Stromcomponente.

Die Angaben des Wattmeters hängen von dem Werthe ab:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \delta i \, dt = J_z \, \Delta_z \cos \varphi - J_1 \, \Delta_1. \tag{3}$$

Die Grösse

$$W_2 \equiv J_2 \Delta_2 \cos \varphi$$

stellt die Arbeit dar, welche dem Wechselstrome entspricht und zwischen den Punkten AB auf der Seite des Lichtbogens verbraucht wird, d. i. die Wechselstromarbeit im Lichtbogen.

Die Grösse

$$W_1 \equiv J_1 \Delta_1$$

stellt die Arbeit vor, welche dem Gleichstrome  $J_1$  entspricht und zwischen den Punkten AB auf Seite des Transformators verbraucht wird. Das Wattmeter gibt die Differenz dieser Grössen an:

$$W = W_2 - W_1. \tag{3}$$

Da nun die Arbeit  $W_1$  auf Kosten der Arbeit  $W_2$  entsteht, stellt diese Differenz den Arbeitsverlust im Lichtbogen dar.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe mitgetheilt, welche dadurch erhalten wurde, dass der Vorschaltwiderstand R und somit auch die Stromstärke geändert wurde. Die einzelnen Grössen sind in den Einheiten Ampère, Volt, Ohm, Watt ausgedrückt. Die Grössen  $J_2$ ,  $\Delta_2$ ,  $W_2$ sind entsprechend den Formeln 1), 2), 3) durch Rechnung gefunden. Jeder einzelne Werth ist ein Mittelwerth von 3 bis 5 Ablesungen. Die einzelnen Ablesungen haben gewöhnlich nur in den Zehnteln differirt. Bemerkenswerth ist, dass der Werth des \( \Delta \) während der ganzen Versuchsreihe nur zwischen den Grenzen 74.5 und 75.5 schwankte. Nur dann, wenn man die Elektroden sehr weit von einander entfernte, so dass der Lichtbogen abriss, dann stieg  $\Delta$  bis 80 Volt, während  $\Delta$ , bis 23 Volt sank. Bei sehr kurzer Lichtbogenlänge war  $\Delta_1$  etwas grösser als der in der Tabelle stehende Werth. Die Kohle war während der Versuche in einer Holzzwinge befestigt, welche ohne Anwendung einer Mikrometerschraube mit der Hand in die entsprechende Distanz gezogen wurde.

	Ü		uonu	ngen	uber	den	CICKII
E	36.8	37.9	38.1	38 4	37.6	36.9	37.9
	2 · 89	5.89	2.04	2.04	1.64	1.64	1.15
φ soo	0.501	0.540	0.554	0.569	0.538	0.230	0.525
H <sub>2</sub>	171.0	207.9	300.9	323.2	346.6	380.0	421.8
11/1	79.5	80.3	132.7	139.5	156.4	157.1	207.5
Ж	91.5	117.7	168.2	183.7	190.2	222.9	214.3
$J_{\rm g}$	4.93	5.56	08.2	8.12	9.30	10.15	11.78
J,	2.76	3.12	4.64	4.93	5.45	5.71	6.94
J	5.64	6.38	80.6	9.50	10.78	11.65	13.67
۵2	69.3	89.5	2.69	0.02	69.5	9.02	68.2
4	75.0	75.0	75.3	75.5	75 2	75.8	74.5
۵٫	8.82	6.87	28.6	28.3	28.7	27.5	59.8
Ņ.	_	61	က	4	Ω	9	2

Der im Stromkreise sliessende Gleichstrom variirte, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, zwischen 2.76 stäbchens schmolz und abtropfte. Die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz  $\Delta_{\bf l}$  variirte innerhalb der Grenzen 27.5 bis 29.9 Volt. In der Tabelle ist noch der Werth für den Cosinus der Phasenverschiebung und 6.94 A.; über diesen Werth konnte man nicht hinausgehen, weil sonst eine zu grosse Menge des Eisenangegeben; derselbe ist berechnet entsprechend der Formel

$$\cos \varphi = \frac{W_2}{J_0 \Delta_0}$$
.

Ausserdem ist der effective Widerstand r des Lichtbogens in der Weise gerechnet, dass der Arbeitsverlust W im Lichtbogen durch das Quadrat der gesammten Stromstärke J dividirt wurde. In dem Werthe r ist aber auch der Widerstand  $\rho=0\cdot 1\,\Omega$ , sowie der Widerstand des Elektrodynamometers D, der dicken Spule des Wattmeters W und der Zuleitungen enthalten; die letzteren Widerstände betragen zusammen auch circa  $0\cdot 1\,\Omega$ , so dass der effective Widerstand des Lichtbogens um circa  $0\cdot 2\,\Omega$  kleiner ist als der in der Tabelle stehende Werth. Endlich ist noch die Grösse E gerechnet entsprechend der Formel

$$E \equiv \Delta_1 + rJ_1$$
.

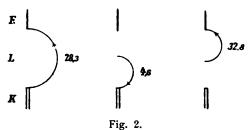
Die Grösse E könnte man als die im Lichtbogen erzeugte gleichgerichtete elektromotorische Kraft ansehen; wie aus der Tabelle ersichtlich ist, weichen die einzelnen Werthe nicht viel von dem Mittelwerthe 37:7 Volt ab.

Das Auftreten des gleichgerichteten Stromes  $J_1$  und de gleichgerichteten Spannungsdifferenz  $\Delta_1$  könnte auch durch die Annahme von Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden. Es wird nämlich während der einen halben Periode des Wechselstromes hauptsächlich das Eisen, während der nächsten halben Periode hauptsächlich die Kohle zerstäubt.

Dies kann zur Folge haben, dass der Widerstand des Lichtbogens in den aufeinanderfolgenden halben Perioden ungleich gross ist. In den halben Perioden, in welchen der Widerstand verkleinert wird, tritt ein Anwachsen der Stromstärke ein, so dass der gesammte Strom eine gleichgerichtete Stromcomponente enthalten muss. Erzeugt man den Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Gleichstrom, und wählt man einmal die Kohle, das anderemal das Eisen als Anode, so sieht man an dem mit einer Linse erzeugten Bilde des Lichtbogens, dass hauptsächlich die Kathode zerstäubt wird; ist das Eisen die Anode, so bläht sich der flüssige Eisentropfen häufig auf und platzt, welche Erscheinung wahrscheinlich durch die von den Kohlentheilchen mitgerissene Luft bedingt ist. Wird der Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Wechselstrom erzeugt, so müsste der Widerstand des Lichtbogens abnehmen, wenn die

Kohle die Kathode ist, damit der entstehende gleichgerichtete Strom die beobachtete Richtung hat.

An dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen wurden auch die Spannungsdifferenzen zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen mit Hilfe eines aperiodischen Spiegelgalvanometers von Siemens & Halske gemessen, welchem ein Widerstand von  $10^7\,\Omega$  vorgeschaltet war; die Spulen des Galvanometers hatten circa 31000 Windungen. Das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen bestand aus Kohle und war 3 mm dick. Bei diesen Versuchen wurde der Lichtbogen als positiv elektrisch im Vergleiche zu beiden Elektroden gefunden. Bei einem Versuche (Fig. 2) waren die Spannungsdifferenzen in Volt ausgedrückt:  $LE=32\cdot 8$ ,  $LK=4\cdot 6$ ,  $KE=28\cdot 3$ . Bei einem anderen Versuche mit sehr kurzem Lichtbogen war



 $LE=34\cdot5$ ,  $LK=3\cdot9$ ,  $KE=30\cdot6$ . Wenn der Lichtbogen nicht sehr kurz war, hatte die Spannungsdifferenz KE immer die in der früheren Tabelle angegebenen Werthe. Die Ablesungen wurden nur gemacht, wenn das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen selbst weissglühend war. Wenn sich während der Dauer des Versuches die Lichtbogenlänge beträchtlich änderte, so war die Beziehung

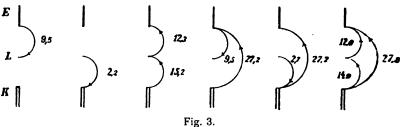
$$KE = LE - LK$$

nicht ganz genau erfüllt.

Es mögen nun die Erscheinungen mitgetheilt werden, welche an dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen beobachtet wurden und weder durch die Annahme von elektromotorischen Kräften, noch durch die Annahme von Übergangswiderständen oder Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden konnten.

1. Beobachtet man die Spannungsdifferenzen mit Hilfe der früher angeführten Torsionsgalvanometer von 1  $\Omega$  Widerstand, welchen ein Widerstand von 999  $\Omega$  vorgeschaltet ist, so findet man ganz andere Spannungsdifferenzen als in dem Falle, wenn der Galvanometerkreis einen Widerstand von  $10^7 \Omega$  hatte. Die bei einer Versuchsreihe erhaltenen Resultate sind in der Fig. 3 dargestellt.

Zu den Versuchen wurden drei Torsionsgalvanometer mit Vorschaltwiderständen verwendet. Es wurden, wie dies in der Figur angedeutet ist, entweder nur ein oder zwei oder alle drei Galvanometer eingeschaltet; die Richtungen der Spannungsdifferenzen und ihre Werthe, in Volt ausgedrückt, sind in der Figur angegeben. Werden die Spannungsdifferenzen KL und LE gleichzeitig gemessen, so ergibt sich die gesammte Spannungs-



differenz KE als Summe der beiden Theile. Misst man aber eine der Spannungsdifferenzen EL oder LK allein oder eventuell gleichzeitig mit KE, so hat jede der beobachteten Spannungsdifferenzen EL oder LK das entgegengesetzte Zeichen im Vergleiche zur Spannungsdifferenz KE. Die Versuche wurden mehrfach wiederholt, doch wurde stets bezüglich der Richtung der gemessenen Spannungsdifferenzen das gleiche merkwürdige Resultat erhalten.

Die für die Spannungsdifferenz EL gefundenen Werthe variirten von 5·4 bis 10·7 Volt; die Werthe für LK variirten zwischen 2·2 und 3·8 Volt. Die Versuche wurden noch in der Weise ausgeführt, dass das Spiegelgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von  $10^7 \,\Omega$  und ein Torsionsgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von  $999 \,\Omega$  gleichzeitig zwischen die Eisenelektrode und den Lichtbogen geschaltet wurden; an LK war kein Galvanometer angelegt. Man konnte

nun sehen, dass beim Schliessen und Unterbrechen des Zweiges des Torsionsgalvanometers sich die Richtung des Ausschlages am Spiegelgalvanometer augenblicklich änderte. Die bei einem Versuche erhaltenen Resultate sind in der Tabelle A enthalten. Die Buchstaben a, e bedeuten, dass das Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, respective eingeschaltet ist. Unter TG sind die Angaben des Torsionsgalvanometers, unter SG die des Spiegelgalvanometers, in Volt ausgedrückt, mitgetheilt; das Zeichen + ist beigesetzt, wenn die beobachtete Spannungsdifferenz dasselbe Vorzeichen hat wie die dem KE entsprechende. Es machte keinen Unterschied, wenn statt des Zweiges des Torsionsgalvanometers ein einfacher Widerstand von 1000  $\Omega$  versionsgalvanometers ein einfacher Widerstand von 1000  $\Omega$ 

Tabelle A.

	TG	SG
a	-6 -7·7	+32·7 - 6·2 +32·3 - 8·1 +31·1

wendet wurde. Die Angaben der beiden Galvanometer stimmen nicht genau überein, weil es schwer ist, am Torsionsgalvanometer sehr rasch abzulesen. Der Versuch wurde noch in der Weise abgeändert, dass das Spiegelgalvanometer zwischen LK geschaltet wurde, während das Torsionsgalvanometer zwischen EL geschaltet blieb. Beim raschen Einschalten und Ausschalten des Zweiges des Torsionsgalvanometers wurden die in der Tabelle B enthaltenen Werthe abgelesen; die Angaben des Torsionsgalvanometers wurden nicht beobachtet. Aus den Versuchen geht hervor, dass die zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen gemessenen Potential-differenzen sich ändern, wenn man zu KL oder LE allein, oder zu beiden gleichzeitig Nebenschlüsse von  $1000 \Omega$  Widerstand anbringt, obwohl diese Wider-

stände beträchtlich gross sind im Vergleich zu dem scheinbaren Widerstande des Lichtbogens. Die Potentialdifferenzen ändern sogar das Vorzeichen, doch behält ihre Summe EL+LK stets denselben Werth. Vielleicht ist die Änderung der Potentialdifferenzen durch elektromotorische Kräfte bewirkt, welche am Mittelstäbchen infolge der schwachen Messströme entstehen.

Tabelle B.

		SG
	a	- 3.1
	c	+34.0
	a	<b>— 2·8</b>
	e	+35.2

2. Ein merkwürdiges Verhalten zeigte der Lichtbogen, wenn der Versuch gemacht wurde, die in ihm entstehende gleichgerichtete elektromotorische Kraft zu compensiren, um dadurch ihren wahren Werth zu ermitteln. Zunächst wurde der Versuch mit einer Accumulatorenbatterie gemacht, welche eine elektromotorische Kraft von circa 60 Volt hatte. Es war nicht möglich, die Compensation auszuführen. Je schwächer der gleichgerichtete Strom war, welchen die in den Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole anzeigte, desto kleiner wurde der Lichtbogen; derselbe verlöschte, bevor der gleichgerichtete Strom zum Verschwinden gebracht werden konnte. Auf Rath des Herrn Böhm-Raffay transformirte ich hierauf den Wechselstrom auf 200 Volt und schaltete in den Stromkreis zwei Lichtbögen Eisen-Kohle ein, damit sich ihre gleichgerichteten elektromotorischen Kräfte gegenseitig compensiren. Auch in dieser Weise konnte die Compensation nicht erreicht werden. Die Stärke des im Stromkreise fliessenden gleichgerichteten Stromes  $J_1$  und die an einem Lichtbogen gemessene gleichgerichtete Spannungsdifferenz  $\Delta_i$  waren in einem labilen Zustande. Je schwächer  $J_1$  war, desto kleiner wurde  $\Delta_1$ ; der kleinste beobachtete Werth war 9 Volt. Wenn die in einem der Lichtbögen erzeugte gleichgerichtete elektromotorische Kraft das Übergewicht erlangte, dann stieg  $\Delta_1$  rasch auf 20, 40, ja selbst 65 Volt, wobei dann der Versuch infolge Abtropfens der Eisenelektrode ein Ende hatte. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle zeigt demnach das merkwürdige Verhalten, dass die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz desto kleiner wird, je mehr der Gleichstrom zum Verschwinden gebracht wird. Wenn der gleichgerichtete Strom sehr schwach war, dann war auch die gesammte Spannungsdifferenz  $\Delta$  an dem Lichtbogen beträchtlich kleiner als die in der ersten Tabelle angegebenen Werthe; der kleinste beobachtete Werth war 40 Volt.

3. An die Elektroden des Lichtbogens wurde ein Telephon angelegt, welchem ein Condensator von 2½ Mikrofarad vorgeschaltet war. Zieht man die Elektroden auseinander, so dass der Lichtbogen unterbrochen wird, so hört man im Telephon einen Ton, welcher der Periodenzahl des verwendeten Stromes entspricht. Wird der Lichtbogen gebildet, so hört man einen stärkeren und höheren Ton, der vielleicht durch eine discontinuirliche Entladung bedingt ist. Wenn man den Lichtbogen mit Gleichstrom erzeugt, so hört man im Telephon ein starkes Sausen.

# Wechselstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Die zu den Versuchen verwendeten Kohlen waren 7 mm dicke Dochtkohlen, das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen war 3 mm dick. Wenn der Lichtbogen zwischen den vertical gestellten Elektroden erzeugt wurde, so war die obere Kohle negativ elektrisch im Vergleich zur unteren, gleichgiltig welche Kohle als obere Elektrode verwendet wurde. Der mit einem Torsionsgalvanometer beobachtete Spannungsunterschied war von der Stromstärke abhängig und stieg bis 2·8 Volt an. Wurden die beiden Kohlen horizontal angeordnet, so zeigte das Torsionsgalvanometer keinen Spannungsunterschied an. Um zu prüfen, ob das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen das Potential verändern könne, wurde dasselbe und eine der dicken Kohlen als Elektroden für den Lichtbogen verwendet. In diesem Falle war stets das dünne

Stäbchen positiv elektrisch im Vergleich zur dicken Kohle, doch betrug die gemessene Spannungsdifferenz im Maximum 3 Volt. Dieser Umstand kann die im Folgenden beschriebenen Erscheinungen nicht wesentlich beeinflusst haben. Bei den Versuchen waren die Elektroden horizontal gestellt, das Mittelstäbchen war von oben in den Lichtbogen eingeführt. Misst man mit einem Galvanometer die Spannungsdifferenzen, so findet man, dass zwischen dem Lichtbogen und den Elektroden eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz besteht; dieselbe ist von der Stromstärke und Lichtbogenlänge abhängig und betrug bei den angestellten Versuchen im Maximum 7 Volt. Der Lichtbogen ist dabei negativ elektrisch im Vergleich zu den Kohlenelektroden. Das Vorhandensein einer solchen Spannungsdifferenz kann nicht überraschen. Während einer halben Periode des Wechselstromes ist die Kohlenelektrode die positive Elektrode. in der nächsten halben Periode ist sie die negative Elektrode; nun ist in der ersten halben Periode der Spannungsunterschied zwischen der Kohlenelektrode und dem Lichtbogen grösser als in der zweiten; daher muss sich eine resultirende gleichgerichtete Spannungsdifferenz ergeben. Ein merkwürdiges Verhalten zeigten die beobachteten Spannungsdifferenzen, wenn zwischen eine Elektrode und den Lichtbogen ein entsprechend grosser Widerstand (1000  $\Omega$ ) eingeschaltet wurde und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reichte. Eine Versuchsreihe ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen war ein Torsionsgalvanometer I nebst 999 Ω Vorschaltwiderstand geschaltet, zwischen den Lichtbogen und die rechte Kohle ein gleiches Torsionsgalvanometer II nebst Vorschaltwiderstand 999 Q. Zum Torsionsgalvanometer I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst dem Vorschaltwiderstand von 10<sup>7</sup> Q parallel geschaltet. Um nicht unter verschiedenen Verhältnissen zu beobachten, wurde der Lichtbogen gar nicht regulirt; auch das Mittelstäbchen, welches abbrannte, wurde nicht nachgeschoben. Der Lichtbogen, welcher anfangs sehr kurz war, verlängerte sich allmälig bis zu einer Länge von 14 mm, worauf er verlöschte. Das Mittelstäbehen, welches anfangs fast in den

Kern des Lichtbogens reichte, brannte dabei um mehr als 1 cm ab. Die Zweige der beiden Torsionsgalvanometer wurden rasch aus- und eingeschaltet, und die Ablesungen an den Instrumenten ausgeführt. In der Tabelle bedeutet der Buchstabe a, dass der Zweig des Torsionsgalvanometers ausgeschaltet war; unter SG stehen die Angaben des Spiegelgalvanometers. Alle Zahlen haben die Benennung Volt. Die Angaben der beiden

I	II	SG
5.4	4.9	5.5
a	10.7	11.5
10.8	a	10.8
a	a	5.7
4.3	3.3	4.4
a	10.9	11.7
11 · 1	а	11.1
а	a	4.3
3.8	3.5	3.8
a	11.7	12.0
12.7	a	12.4
a	12.3	12.9

Torsionsgalvanometer sollten eigentlich stets gleich gross sein, da zwischen den beiden Elektroden keine gleichgerichtete Spannungsdifferenz bestand. Die Zahlwerthe stimmen nicht genau überein, weil nicht ganz gleichzeitig und sehr rasch abgelesen wurde, damit sich der Zustand des Lichtbogens nicht zu sehr verändere; auch waren bei den kleinen Spannungsdifferenzen die Torsionswinkel sehr klein, da einem Torsionswinkel von 1° eine Spannungsdifferenz von 1 Volt entspricht. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, ergeben sich ungefähr die gleichen Spannungsdifferenzen, ob beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren. Dagegen sieht man das merkwürdige Resultat, dass die zwischen den Kohlenelektroden und dem Lichtbogen gemessene Spannungsdifferenz beträchtlich anwächst, wenn

zwischen eine der Kohlen und den Lichtbogen ein Widerstand von 1000  $\Omega$  eingeschaltet wird und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reicht. Kurz nach Stromschluss waren die beobachteten Spannungsdifferenzen sehr klein oder hatten sogar anfangs das entgegengesetzte Zeichen; dieselben wuchsen aber rasch zu dem Werthe von einigen Volt an. Die anfänglichen Beobachtungen sind in der Tabelle nicht aufgenommen. Bei dem Versuche sank die Stromstärke von 8.4 A. successive bis 4.5 A. Das Mittelstäbchen befand sich immer in guter Berührung mit dem Lichtbogen, weil dieser durch die Luftströmung nach aufwärts bewegt wurde. Bei einigen anderen Versuchen brannte das Mittelstäbehen stärker ab; dann sank die mit den Torsionsgalvanometern gemessene Spannungsdifferenz bis auf 1 Volt herab, stieg jedoch trotzdem bis circa 10 Volt an, wenn nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet war. Wenn das Mittelstäbchen, nachdem der Lichtbogen schon eine Länge von 10 mm erreicht hatte und die Stromstärke auf 5.5 A. gesunken war, wieder so weit gesenkt wurde, dass es fast in den Kern des Lichtbogens reichte, so stieg die Spannungsdifferenz zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen auf 5.5 Volt, wenn beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren; wurde jedoch nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet, so stieg die Spannungsdifferenz wieder auf 12.5 Volt an. Wenn das Mittelstäbehen bis in den Kern des Lichtbogens eintauchte, dann wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz abgelesen, gleichgiltig ob nur das eine oder beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet waren. Aus den Versuchen scheint hervorzugehen, dass sowohl an den Elektroden, als auch am Mittelstäbchen elektromotorische Kräfte auftreten.

Zum Schlusse wurde noch zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen ein Regulirwiderstand und eine Tangentenboussole eingeschaltet. Die Boussole zeigt einen gleichgerichteten Strom an, dessen Stärke durch Änderung des Regulirwiderstandes verändert werden kann. Solange der Gleichstrom nur einige Zehntel oder 1 Ampère betrug, hatte er stets die Richtung von der Kohle zum Lichtbogen, wie auch zu erwarten

war. Wenn aber der Widerstand des Zweiges, in welchen die Tangentenboussole eingeschaltet war, sehr verkleinert wurde, so ereignete es sich häufig, dass der gesammte Strom von der linken Kohle durch den Regulirwiderstand zum Mittelstäbchen und von diesem zur rechten Kohle floss. In diesem Falle wurde das Mittelstäbchen zur Elektrode, und da dasselbe, wie früher erwähnt wurde, im Vergleich zur anderen Kohle schwach positiv elektrisch ist, so änderte der von der Tangentenboussole angezeigte gleichgerichtete Strom die Richtung. Wenn bei den Versuchen das Mittelstäbchen vom Kerne des Lichtbogens weit entfernt war, so verhielt sich die Aureole wie ein grosser Widerstand.

## Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Zum Schlusse wurde am Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden untersucht, ob sich die Vertheilung des Potentials im Lichtbogen ändert, wenn man zwischen die Elektroden und den Lichtbogen Widerstände von 1000 Ω schaltet. Wenn das Mittelstäbchen in den Lichtbogen gut eingeführt ist, macht es keinen Unterschied, ob die beiden Torsionsgalvanometer (1000  $\Omega$ ) zugleich oder einzeln eingeschaltet oder ausgeschaltet werden; es wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz erhalten. Wenn man jedoch das Mittelstäbehen aus dem eigentlichen Lichtbogen in die denselben umgebende Aureole schob, änderten sich die mit den Torsionsgalvanometern gemessenen Spannungsdifferenzen, wenn diese Instrumente eingeschaltet oder ausgeschaltet wurden. Die Ergebnisse lassen sich aber leicht erklären, wenn man annimmt, dass die Aureole einen beträchtlichen Widerstand hat. Wenn das Stäbchen aus dem Lichtbogen weit herausgeschoben war, so zeigten die beiden Torsionsgalvanometer, wenn sie gleichzeitig eingeschaltet waren, fast gleiche Spannungsdifferenzen an; wurde das eine Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, so zeigte das andere eine sehr kleine Spannungsdifferenz an, etc. Der Widerstand der Aureole hatte desto mehr Einfluss, je weiter das Stäbchen aus dem Lichtbogen herausgeschoben wurde. Wurde zur Messung der Spannungsdifferenzen das aperiodische Spiegelgalvanometer verwendet, so hatte der Widerstand der Aureole einen geringen Einfluss. In der Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe angegeben. Zwischen die positive Kohle und den Lichtbogen war ein Widerstand I =  $1000 \Omega$  geschaltet, zwischen die negative Kohle und den Lichtbogen ein gleicher Widerstand II =  $1000 \Omega$ . Zum Widerstande I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst einem Vorschaltwiderstande von  $10^7 \Omega$  parallel geschaltet. Das Mittelstäbchen reichte in die Aureole. Während der Dauer des Versuches änderte sich die

_
-
ĺ

gesammte Spannungsdifferenz am Lichtbogen, welcher nicht regulirt wurde, von 45 bis 58 Volt, die Stromstärke von 4·7 bis 3·5 A. Das Mittelstäbchen brannte während der Dauer des Versuches allmälig ab. Wenn die Widerstände I, II ein- und ausgeschaltet wurden, ergaben sich am Spiegelgalvanometer die in der Tabelle angegebenen Ablesungen, welche in Volt ausgedrückt sind. Die bei dem Versuche verwendeten Kohlen waren Homogenkohlen von 8 und 13 mm Dicke.

# Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern

von

### Joh. Zuchristian.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Innsbruck.

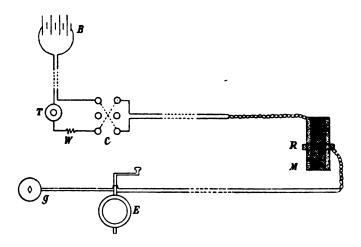
(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Im Folgenden ist ein Verfahren angegeben, welches den Verlauf von Magnet-Kraftlinien sowohl ihrer Richtung als auch ihrer Anzahl nach rasch zu bestimmen gestattet. Durch Streuen von Eisenpulver auf ein Cartonblatt ist die Richtung der Kraftlinien, und gleichzeitig durch die Bestimmung der gewöhnlichen Inductionswirkung die Anzahl derselben gegeben. Ein eingeschalteter Erdinductor ermöglicht die Reduction auf absolutes Mass. Diese Combination längst bekannter Methoden dürfte, wie aus Folgendem ersichtlich ist, vielleicht einiges Interesse gewähren, indem die von mir gewählten Beispiele zeigen werden, dass die in vielen unserer Lehrbücher gegebenen Darstellungen der Kraftlinien in Bezug auf deren Anzahl und Dichtigkeit an bestimmten Stellen eines Magnets nicht immer der Wahrheit entsprechen und daher diese einfache Methode zur Klärung der Vorstellung über Kraftlinien oft nicht unwichtige Beiträge liefern könnte.

Bei den Versuchen, die ich hier schildern will habe ich zwei Eisencylinder verwendet, von denen jeder 14 cm lang war und einen Durchmesser von 3·6 cm hatte. Dieselben wurden mit 2 mm dickem Kupferdraht in drei Lagen umwickelt. Die Zahl der auf jedem Cylinder vorhandenen Windungen, welche einen mittleren Durchmesser von 4·28 cm besassen, war 163.

Auf diesen Cylindern verschiebbar war ein Inductionsring, der in zwei Lagen übereinander sieben Windungen eines 0.86 mm starken Kupferdrahtes hatte; der mittlere Durchmesser dieser Windungen war 5.8 cm.

Die Versuchsanordnung war nun folgende: Eine Batterie B von 3—4 Bunsen-Elementen schickte den primären Strom durch eine Tangenten-Bussole T, einen Rheostaten W und einen Commutator C in den zu untersuchenden Elektromagneten M, beziehungsweise in die zu untersuchende Elektromagneten-Combination; der secundäre Strom ging vom Inductionsring R aus durch einen Erdinductor E zum Spiegel-Galvanometer g.



Aus der Windungsfläche F des Erdinductors und der Verticalcomponente des Erdmagnetismus V, d. i. der Anzahl derjenigen Kraftlinien des magnetischen Feldes der Erde, die durch eine horizontale Fläche von  $1\,cm^2$  hindurchgehen, einerseits und der Anzahl der Windungen des Inductionsringes anderseits erhält man die Zahl der Kraftlinien in absolutem Masse, da die Galvanometer-Constanten und der Widerstand der Inductionsleitung immer gleich bleiben.

Der Ausschlag  $\Delta$ , den das Galvanometer bei einmaliger Umdrehung des Erdinductors um 180° gibt, ist proportional

2 VF. Daraus ergibt sich die Anzahl der geschnittenen Kraftlinien

$$2 VF = \alpha.\Delta.$$

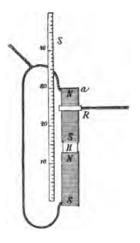
An der Stelle wo sich der Inductionsring befindet, werden nun durch Commutiren des primären Stromes die vorhandenen z Kraftlinien verschwinden und gleichzeitig die nämliche Anzahl der entgegengesetzt gerichteten entstehen, und der Ausschlag  $\delta$ , den der Inductionsstrom hervorruft, entspricht daher 2z, d. i. der doppelten Anzahl der bei Erregung des Magnetfeldes auftretenden Kraftlinien. Wir erhalten in Folge dessen, wenn n die Zahl der Windungen des Inductionsringes ist

$$z = x \cdot \frac{\delta}{2n} \cdot$$

Daraus ergibt sich schliesslich

$$z = \frac{VF}{n} \cdot \frac{\delta}{\Delta} \cdot$$

Die Durchführung der Versuche ist nun sehr einfach. Der Inductionsring R wird an eine bestimmte Stelle des aufrechtstehenden Elektromagnetes M geschoben, welche mittels eines daneben befindlichen Massstabes ablesen kann. Darauf schliesst man den Primärstrom und ertheilt ihm mit Hilfe des Rheostaten W eine gewisse Stromstärke, bestimmt den Nullpunkt des Galvanometers. commutirt den Primärstrom und erhält einen Ausschlag δ. Dabei ist noch zu bemerken, dass man bei grösseren Stromstärken das Galvanometer mit



einem Shunt versehen muss, um allzu grosse Ausschläge zu vermeiden. Dann wird noch  $\Delta$  bestimmt durch Umdrehen des Erdinductors.

Ich werde nun als Beispiel jenen Versuch hier ausführlicher darstellen, wo zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen einander zugekehrt waren; zwischen denselben war ein Holzcylinder H von  $28\,mm$  Höhe.

Für V habe ich den von Liznar im Jahre 1890 für Innsbruck ermittelten Werth von  $0.40381~(\text{cm}^{-1/2}~\text{g}^{1/2}~\text{sec}^{-1})$  zu Grunde gelegt; das F des Erdinductors war  $133017.6~\text{cm}^2$  und n die Windungszahl des Inductionsringes 7.

Ich benützte somit die Formel

$$z = 7673 \frac{\delta}{\Lambda}$$
.

Der verwendete Primärstrom hatte vier Ampère, der Erdinductor gab bei wiederholten Messungen während des Versuches stets den Ausschlag  $\Delta = 7.65$  cm. Wegen der Symmetrie der Zusammenstellung habe ich bloss die obere Hälfte untersucht. Der Massstab S war so aufgestellt, dass die oberste Fläche a bei 30 stand.

In der folgenden Tabelle ist in der ersten Rubrik die Lage des Inductionsringes, in der zweiten der aus mehreren Messungen erhaltene mittlere Ausschlag δ angegeben; die dritte Rubrik enthält die wirkliche Anzahl der Kraftlinien, die vierte die in der Abbildung 948 auf einer Seite eingezeichneten.

ò cm	z	N	IndRing	д с <b>т</b>	≈	N
		1	1			11
0.85	852					12
1.20	1204		26	9.69	9720	
1 32	1324	2	25	10.34	10372	13
2.00	2006					
		3	24	10.90	10933	14
3.53	3541	4	23	11.26	11295	14
		5				
= .=	5 4 0 7	6	22	11.23	11264	14
0 40	3407	7	21	11.08	11114	14
		8				13
7.00	5000	•	20	10 · 10	10131	10
7.20	1222	9	19	9.45	9479	12
		10				11
8.66	8686		18	8.45	8476	
	0·85 1·32 2·00 3·53 5 45	cm     z       0·85     852       1·32     1324       2·00     2006       3·53     3541       5·45     5467       7·20     7222	cm         z         N           0.85         852         1           1.32         1324         2           2.00         2006         3           3.53         3541         5           5         45         5467         7           8         7.20         7222         9           10         10         10	cm         z         N         cm           0.85         852         1         26           1.32         1324         2         25           2.00         2006         3         24           3.53         3541         23           5         6         22           5.45         5467         7         21           8         20           7.20         7222         9         19           10         10         19	cm         z         N         cm         cm           0.85         852         1         26         9.69           1.32         1324         2         25         10.34           2.00         2006         3         24         10.90           3.53         3541         23         11.26           5         6         22         11.23           5.45         5467         7         21         11.08           8         20         10.10           7.20         7222         9         19         9.45	cm         z         N         cm         z           0.85         852         1         26         9.69         9720           1.32         1324         2         25         10.34         10372           2.00         2006         3         24         10.90         10933           3.53         3541         23         11.26         11295           5         6         22         11.23         11264           5         45         5467         7         21         11.08         11114           8         20         10.10         10131           7.20         7222         9         19         9.45         9479

IndRing	ò cm	z	N	IndRing	ò cm	z	N
			10				6 5
17	7 · 15	7172	9 8	15	3.93	3942	
16	4.90	4915	7	14	4.04	4052	5

Nach der Berechnung dieser Tabelle habe ich dann in bekannter Weise, und wie aus den Abbildungen der folgenden Tafel ersichtlich ist, durch Streuen von Eisenfeile auf weissen Carton die Richtung der Kraftlinien bestimmt und für je 800 berechnete Kraftlinien auf beiden Seiten des Magnetes eine eingezeichnet, und zwar in der Weise, dass in der Entfernung 4cm vom oberen N noch keine Kraftlinie den Inductionsring schneidet, in 3cm Abstand auf jeder Seite eine, in ungefähr 2cm Entfernung auf beiden Seiten noch eine zweite mehr u. s. w. Zur leichteren Verkleinerung des so erhaltenen Bildes wurde dann eine photographische Aufnahme gemacht, welche nun im Lichtdruck als Fig. 7 folgt.

Analog erhielt ich auch die folgenden Resultate (siehe beiliegende Tafel):

Die Figuren 1 und 2 geben die Intensitätsverhältnisse bei einem Elektromagnet für 2, beziehungsweise 4 Ampère.

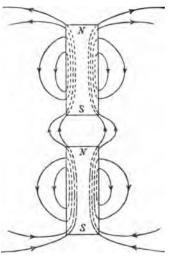
Die Figuren 3, 4 und 5 stellen zwei Elektromagnete dar, die mit den gleichen Polen einander zugewendet sind, in den Entfernungen 0.28 und 41 mm bei 4 Ampère Stromstärke.

Die Figuren 6, 7 und 8 zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen einander zugekehrt, in den Abständen 0.28 und 41 mm und gleichfalls 4 Ampère.

Die Figuren 9 und 10 zeigen einen Elektromagneten über einem Parallelepiped aus Eisen von den Dimensionen 5, 6 und 17 cm in den Entfernungen 0 und 41 mm (4 Ampère).

Für die Nützlichkeit solcher Messungen glaube ich die Fälle, dargestellt in den Figuren 6, 7 und 8, besonders erwähnen zu dürfen, die über den Verlauf der Kraftlinien nicht uninteressante Aufschlüsse geben. Sind die beiden Elektro-

magnete zur Berührung gebracht, so verhalten sie sich nahezu wie ein einziger von doppelter Länge. Zieht man dieselben etwas auseinander, so reissen einige der inneren Kraftlinien ab, und jede derselben theilt sich in zwei für jeden der beiden Magnete in sich geschlossene Linien; der Rest dagegen ist noch beiden Magneten gemeinschaftlich. Dabei tritt eine eigenthümliche Ausbuchtung der Kraftlinien an der Unterbrechungsstelle



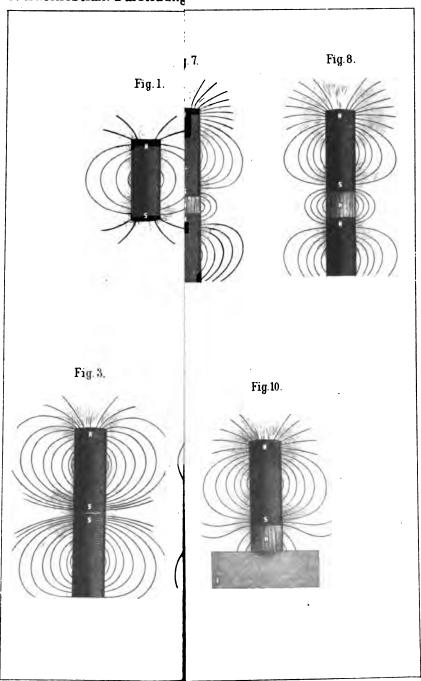
auf, wie es nebenstehendes Schema zur Darstellung bringt. Jener Theil der Kraftlinien, welcher durch die Mitte der Magnete geht, ist weggelassen, um die Figur nicht übervoll zu machen.

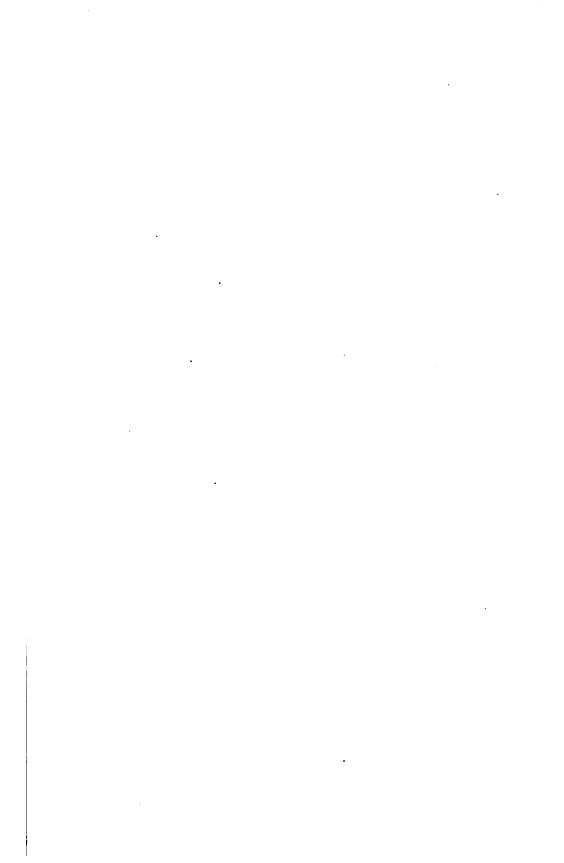
Für diesen Verlauf der Kraftlinien spricht sowohl das Bild, welches das gestreute Eisenpulver gibt, als auch die Messung. Wie könnte es sonst wohl möglich sein, dass, wie in dem hier durchgeführten Beispiele, an der Trennungsstelle bloss  $5 \times 800$  Kraftlinien berechnet werden können, während doch nach der Fig.  $7.8 \times 800$  beiden Magneten

gemeinsam sind und den Inductionsring bei ihrem Entstehen durchschneiden müssen. Es wird eben letzterer von einigen Kraftlinien zweimal geschnitten, und zwar in verschiedenen Richtungen, so dass sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben.

Es wäre wohl sehr wünschenswerth, wenn Zeichnungen von Kraftlinien immer in der angegebenen Weise in Bezug auf alle ihre Verhältnisse richtig wiedergegeben würden.

# J. Zuchristian: Darstellung





# Eine Studie über unipolare Induction

von

### Prof. Dr. Ernst Lecher.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 17 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Die folgende Abhandlung sucht die Entscheidung der Frage, ob bei einem um seine Axe rotirenden, cylindrischen Magneten die Kraftlinien feststehen oder mitrotiren.

Die erste Abtheilung enthält allgemeine und historische Bemerkungen und zeigt, dass weder die bisher angestellten Versuche, noch einige neue Abänderungen derselben diese Frage entscheiden können. Dabei stellt sich heraus, dass die Biot-Savart'sche Vorstellung über die Einwirkung eines geradlinigen Leiters auf einen Magnetpol den experimentellen Thatsachen nicht immer entspricht.

Die zweite Abtheilung enthält einen gedrängten Bericht über elektrometrische Versuche, deren Schlussresultat aber nicht einwurfsfrei ist.

Die dritte Abtheilung enthält das Experimentum crucis und die Entscheidung der angeregten Frage.

## I. Allgemeine Bemerkungen.

Faraday. Faraday ging bei Entdeckung jener Inductionserscheinungen, welche W. Weber¹ später unipolare Induction nannte, von der Vorstellung seiner Kraftlinien aus; die späteren Forscher aber führten die Erklärung mit Hilfe des Begriffes der

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., 52, 1841.

magnetischen Pole durch, und so entstand eine nicht immer glückliche Mischung der Anschauungen.

Als man in neuerer Zeit wieder den Begriff der Kraftlinie in Verwendung zog, wurde oft die ursprüngliche Anschauung Faraday's über die unipolare Induction unrichtig dargestellt. Faraday ist nämlich der Meinung, dass ein rotirender Magnet sein Feld nicht mitrotiren lasse, dass die Kraftlinien feststehen, während in vielen unserer besten Lehrbücher angegeben ist, dass Faraday der entgegengesetzten Ansicht gewesen sei. Faraday sagt:

»Wenn von Kraftlinien gesprochen wird, insofern sie einen leitenden Kreis schneiden, so muss man sich dies durch die Fortbewegung eines Magneten bewirkt denken. Eine blosse Rotation eines Magnetstabes um seine eigene Axe bewirkt keine Induction in äusseren Kreisen, da in diesem Falle die oben angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind. Das den Magnet umgebende Kräftesystem braucht man sich nicht nothwendig mit dem Magneten rotiren zu denken, so wenig wie man annimmt, dass die Lichtstrahlen, welche von der Sonne ausgehen, mit dieser rotiren. Man kann sich sogar in gewissen Fällen denken, dass der Magnet zwischen seinen eigenen Kräften rotire, während er dennoch einen am Galvanometer nachweisbaren vollen elektrischen Effect hervorbringt«. In den folgenden Paragraphen begünstigt Faraday auch stets den Standpunkt, dass bei einem um seine Längenaxe rotirenden Magneten das magnetische Feld feststeht.2

Translatorische und rotatorische Bewegung. Der Unterschied zwischen dem Fortbewegen der Kraftlinien bei translatorisch bewegten Magneten und dem Feststehen der Kraftlinien eines rotirenden Magneten ist Faraday auffallend: \*a singular independence of the magnetism and the bar in which it resides«.

Dieser befremdende Unterschied dürfte aber nur ein scheinbarer sein. Das Kraftfeld besteht in irgend einem Energie-

<sup>1</sup> Exp. Untersuchungen über Elektricität, deutsch von Kalischer, Bd. III, 8. 3090.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 353, 1852 vertritt ähnliche Anschauungen, aber ohne Verwendung des Begriffes der Kraftlinien.

zustand des Äthers, veranlasst durch den Magneten. Es erscheint nun wohl nicht nothwendig, anzunehmen, dass jeder Magnet bei einer Bewegung seinen Äther soweit mitschleppt, als seine Kraftwirkung reicht. Wir können uns auch die Idee bilden, dass der Äther feststeht, und dass bei einer Bewegung des Magneten jene Veränderung des Äthers, deren Richtung und Grösse wir durch den Begriff der Kraftlinien symbolisiren, verschiedene Partien des Äthers ergreift. Bei einer translatorischen Bewegung des Magneten kann man nun selbstverständlich von einem Bewegen der Kraftlinien nur im figürlichen Sinne sprechen. Wenn man einen Lichtpunkt bewegt, so gehen die Lichtstrahlen des Punktes auch nur im figürlichen Sinne mit, indem ja an den Orten, wo der Lichtpunkt im Laufe seiner Bewegung hinkommt, immer wieder neue Strahlen entstehen, während die alten verschwinden.

Wenn ein symmetrischer Magnet um seine eigene Axe rotirt, so ändert sich das äussere Feld gar nicht, es ist daher a priori absolut kein zwingender Grund vorhanden, sich dieses Feld als rotirend zu denken.

Preston. Mit dieser Überlegung fällt einer der Hauptgründe von Tolwer Preston,¹ welcher wohl zuerst gegen Faraday die Ansicht ausgesprochen, dass bei einem rotirenden Magneten das magnetische Feld mitrotire; indirect (ohne Rücksicht auf die Begriffe »magnetisches Feld« oder »Kraftlinien«) hat diese Frage natürlich schon bei allen früheren Versuchen mitgespielt. Da sowohl W. Weber, als Lord Rayleigh in zwei Briefen, die Preston am Schlusse der citirten Arbeit gibt, sich vollständig auf Seite Preston's stellen,² so dürfte es vielleicht nicht überflüssig sein, zu zeigen, dass die Überlegungen Preston's für unsere Frage absolut keine Entscheidung treffen. Der eine Einwand Preston's ist eben wiederlegt; ein weiterer

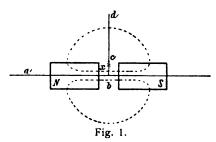
<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> On some Electromagnetic Experiments of Faraday and Plücker. Phil. Mag. (5), 19, S. 131, 1885. Einen ähnlichen Schluss macht A. Föppl in der eben erschienenen Einleitung in die Maxwell'sche Theorie, Teubner 1894, S. 328.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Weber schreibt: Ich habe die Arbeit mit grösstem Interesse gelesen und mich gefreut, dass die Frage über unipolare Induction dadurch endlich zur definitiven Entscheidung gelangen werde.

ist folgender: Nach Faraday muss ein Leiter, der gleich schnell mit dem Magneten rotirt, statisch geladen werden. Das erscheint nun Preston aus dem Grunde unmöglich, weil wir hier keine relative Bewegung der rotirenden Massen hätten. Dieser Schluss ist unrichtig. Nach Faraday steht ja das Feld still, die Bewegung ist relativ gegen die feststehenden Kraftlinien.

Nur in einem Punkte hat Preston recht, dass es nämlich Faraday nicht gelungen sei, für seine Anschauung einen experimentellen Beweis zu erbringen. Eine Entscheidung zwischen den beiden Fragen ist überhaupt durch einfache galvanometrische Messungen an einem einzigen rotirenden Magneten nicht möglich, wie sich durch folgende Beispiele zeigen lässt.

Unmöglichkeit der galvanometrischen Entscheidung mit Einem Magneten. Es sei NS ein Magnet, den wir uns in der Mitte durch eine schmale Luftschichte unter-



brochen denken wollen (wie dies auch Faraday, §. 3098 thut), die punktirten Linien stellen typisch den Gang zweier Kraftlinien dar. abxcd sei die zum Galvanometer führende Leitung (Fig. 1).

abx rotire mit dem Magneten, während xd feststehe, x sei der Schleifcontact.

Nehmen wir zuerst an, der Punkt x falle mit d zusammen, d. h. es rotire der ganze Drath bcd mit. Nach der Anschauung Preston's, die heute wohl die allgemein beliebtere sein dürfte, rotiren die Kraftlinien mit dem Magneten: wir haben also keinen Strom zu erwarten, da der Draht cd mit den Kraftlinien mitrotirt. Nach der Anschauung Faraday's aber bekommen wir zwei

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ähnliche Schlüsse macht z. B. Clausius, Pogg. Ann., 156, S. 657, 1875. »Wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass die elektrodynamische Einwirkung zweier Elektricitätstheilchen auf einander durch einen zwischen ihnen befindlichen Stoff vermittelt werde, so braucht man von ihr nicht anzunehmen, dass sie nur von der relativen Bewegung der Theilchen abhänge, sondern kann auch den absoluten Bewegungen der beiden Theilchen einen Einfluss auf sie zuschreiben.

elektromotorische Kräfte, nämlich die Wirkung von bc, sie sei  $E_i(bc)$ , und von cd, sie sei  $E_a(cd)$ . Jede Kraftlinie, die aussen geht, muss durch den Magneten selbst geschlossen sein; wir haben daher aussen ebensoviel Kraftlinien wie innen. Das Schneiden aller Kraftlinien aussen und innen hebt sich auf, weil die Richtung der Kraftlinien durch bc die umgekehrte ist, wie durch cd. Der Effect nach Faraday ist  $E_i(bc) - E_a(cd) = 0$ .

Würde die Linie bd feststehen, während aber der Magnet rotirt, so kehrt sich diese Betrachtung für die beiden Theorien um. Wir erhalten keinen Strom, weil nach Faraday keine elektromotorische Kraft auftritt, oder weil, nach Preston, zwei einander gleichgerichtete elektromotorische Kräfte sich aufheben.

Rücken wir nun mit x an den in der Zeichnung fixirten Punkt, so rotirt bx mit dem Magneten, xd steht aber fest. Es gibt jetzt die Theorie Faraday's eine elektromotorische Kraft  $E_i(bx)$ , da ja bx, mit dem Magneten rotirend, die feststehenden Kraftlinien schneidet. Die Theorie Preston's aber liefert als elektromotorische Kraft  $E_a(cd)-E_i(cx)$ , da cd und cx feststehen und durch die mit dem Magneten rotirenden Kraftlinien geschnitten werden. Die beiden Werthe müssen subtrahirt werden, weil die Richtung der Kraftlinien im Innern des Magneten (xc) die entgegengesetzte Richtung haben, wie aussen (cd). Nun ist

$$E_i(bx) + E_i(xc) \equiv E_i(bc) \equiv E_a(cd),$$

woraus folgt, dass  $E_i(bx) = E_a(cd) - E_i(cx)$ .

Wir erhalten somit nach beiden Anschauungen, wo immer der Punkt x auch liegen möge, stets das gleiche galvanometrische Resultat, wiewohl die erzeugten elektromotorischen Kräfte an ganz verschiedenen Stellen ihren Sitz haben.

Ebensowenig kann man durch Zweigschaltung, durch Einschaltung von Condensatoren und ähnlichen Kunstgriffen an einem einzigen rotirenden Magneten galvanometrisch eine Entscheidung treffen. Damit sind alle Versuche pro und contra gemeint und die Ergebnisse von Plücker, Edlund, Exner

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ann. de chim. et de phys. (5), 16, S. 49, 1879.

und Czermak, <sup>1</sup> Budde, <sup>2</sup> Hoppe <sup>3</sup> u. s. w. können meines Erachtens alle nach beiden Theorien gleich befriedigend erklärt werden.

Versuche von Hoppe. Ich will dies an den Experimenten von Hoppe zeigen, da dieselben zu Gunsten einer Mitrotation der Kraftlinien gedeutet wurden. Ich habe diese Versuche in etwas veränderter Gestalt wiederholt und will die Deutung der Resultate unter consequenter Beibehaltung des Begriffes der Kraftlinien besprechen.

Hoppe arbeitet mit einer Eisenröhre, die durch eine feststehende Drahtspule magnetisirt wurde. Da aber ein grosser Theil der Kraftlinien durch den inneren Hohlraum einer solchen

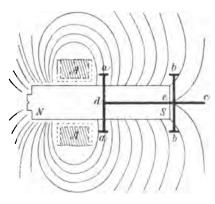


Fig. 2.

Eisenröhre geht, anderte ich den Versuch dahin ab, dass ich mit einem möglichst massiven Magneten arbeitete.

Fig. 2 stellt schematisch die Anordnung meiner Versuche in etwa <sup>1</sup>/<sub>3</sub> natürlicher Grösse dar. *NS* ist ein um eine Horizontalaxe drehbarer Eisenkern, welcher, wie bei Hoppe, durch die feststehende Spule *A* 

magnetisirt wurde. Zur einen Hälfte geht in die Axe des Magneten der Kupferdraht dc, vom Magneten gut isolirt; a und b sind zwei Cylinderflächen, welche mit dc leitend verbunden, vom Magneten aber vollständig isolirt sind. a, b, cd sind fix mit dem Magneten verbunden und rotiren mit demselben pro Secunde 13.5 mal. Es sind diese für die unipolare Induction dienenden und vom Magneten gut isolirten Leitungen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, 94, S. 357, 1886.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Wied. Ann., 30, S. 358, 1887.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Wied. Ann., 28, S. 483, 1886.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> So verstärkt Faraday die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes dadurch, dass er eine Eisenröhre in das Innere des Solenoides (um den drehenden Körper herum) einschob. L. c. §. 2209.

in der Fig. 2 dick gezeichnet. Die Enden einer Galvanometerleitung schleifen auf a, b oder c. Der unipolare Ausschlag wird erzeugt durch Commutiren des magnetisirenden Stromes in der Spule A, um den Effect des Thermostromes zu eliminiren.

Die angegebenen Resultate sind Mittel aus je 10 Beobachtungen. Schleifen die Galvanometerdrahtenden auf ac, bc, respective ab, so ist der unipolare Strom 12·8, 2·5, 10·3.¹ Fig. 2 stellt auch den wirklichen Verlauf der Kraftlinien (in willkürlichem Masssystem) dar.² Es ist selbstverständlich, dass die Kraftlinien im Innern des Eisens wieder in sich zurückkehren müssen.

Die Übereinstimmung der Werthe der unipolaren Induction mit der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien ist eine sehr schöne, wobei aber natürlich wieder nicht ein Unterschied zwischen der Theorie Faraday's und Preston's getroffen werden kann.

Nach Preston schneidet die feststehende Galvanometerverbindung ab ausserhalb des Magneten 7 rotirende Kraftlinien, bc aber 2 und ac schliesslich 9. Nach Faraday schneidet, wenn ac zum Galvanometer führt, das rotirende Leiterstück ad 9 feststehende Kraftlinien, die ja im Innern des Magneten (in der Figur nicht gezeichnet) in sich zurückkehren müssen; schleift aber die Galvanometerleitung in b und c, so schneidet eb 2 Kraftlinien, während bei Ableitung von a und b 2 entgegengesetzte elektromotorische Kräfte in da (= 9) und eb (= 2) in Wirkung treten. Die Verhältnisse von 9, 7, 2 entsprechen aber innerhalb der Versuchsgrenzen den Verhältnissen der gefundenen Galvanometerausschläge  $12 \cdot 8$ ,  $10 \cdot 3$ ,  $2 \cdot 5$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Um die Arbeit nicht zu umfangreich zu machen, gebe ich hier und später immer nur die Mittel, wie ich auch aus dem gleichen Grunde meine Zeichnungen nur schematisch mache.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Diese Zeichnung wurde dadurch gewonnen, dass eine mit einem Galvanometer verbundene Drahtschleife an bestimmten Stellen des Feldes sich befand und durch Commutiren des magnetisirenden Stromes Inductionswirkung gemessen wurde. Hat man vorher mittelst Eisenfeile die Richtung der Krastlinien fixirt, so genügen einige solche Messungen, um quantitativ die Zahl der Krastlinien an einzelnen Stellen des Feldes zu bestimmen. Siehe darüber Näheres in der gleichzeitig (in diesen Sitzungsberichten) erscheinenden Arbeit von J. Zuchristian, der einige solche Bestimmungen im absoluten Masse ausgeführt hat.

Es wurde schliesslich, um auch in diesem Punkte die Versuchsanlage Hoppe's zu imitiren, a und b durch eine aufgelöthete Kupferlamelle leitend verbunden. Die Resultate waren, wie es nach beiden Theorien zu erwarten war, mit den vorausgehenden identisch, nämlich es gaben die Schleifcontacte ac 12.7, bc 2.4, ab 10.9.

Auf die elektrometrischen Versuche Hoppe's einzugehen, erscheint mir überflüssig, da ihre Auslegung nichts für unseren Fall Entscheidendes bringen würde.<sup>1</sup>

Rotationsversuch von J. Weber. Ebensowenig lässt sich eine Entscheidung treffen durch Einleitung von Rotationen durch einen Strom. Auch hier sind eine Reihe von Trugschlüssen in der Literatur anzutreffen, von denen ich wieder als typisches Beispiel einen herausgreifen will, den von J. Weber.<sup>2</sup>

NS ist der Magnet, der an seinem Äquator die Quecksilberrinne g trägt. Der bewegende Strom geht durch das

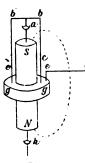


Fig. 3.

Quecksilbernäpfchen h in den Magneten zum Quecksilbernäpfchen a, durch den Bügel abc zur Quecksilberrinne g, welche vom Magneten isolirt ist und durch den feststehenden Draht ed zurück. Wird der Magnet festgehalten (Versuch 1), so rotirt der Bügel abc, weil er (nach beiden Theorien) einen Druck gegen die Kraftlinien, wovon eine punktirt gezeichnet ist, erfährt. Wird jetzt der Magnet mit dem Bügel mechanisch verbunden und an einem Faden aufgehängt (Versuch 2), so dass beide rotiren

können, so rotirt Magnet und Bügel. Nach der Theorie Fara-

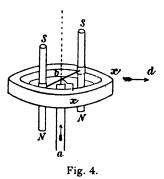
¹ Wied. Ann., 29, S. 544, 1866; 32, S. 297, 1887. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, dass meine Vorstellung über Verwendung des Elektrometers bei Messungen an ungeschlossenen Leitungen von denen Hoppe's stark abweicht. Er sagt in der letzteren Arbeit z. B. S. 298: →Für die 2¹/₂ m lange feste Leitung bis zum Elektrometer tritt wegen des höheren Widerstandes eine erhebliche Einbusse auf ; S. 304: →Da der Draht sehr lang, wird eine Verzögerung in der Ladung eintreten «. Oder, Hoppe will durch eine Kugel von 15 mm Durchmesser, die isolirt aufgehängt, zuerst mit dem rotirenden Magneten und dann mit einem Elektrometer von Edelmann in Berührung gebracht wird, die eventuellen minimalen Ladungen des Magneten nachweisen u. s. w.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Zeitschr. für Elektrotechnik, Kareis, Wien, VII, S. 445, 1889.

day's muss man jetzt sagen, da das Feld ja stillsteht, dass der rotirende Bügel den Magnet mitnimmt, nach der entgegengesetzten Anschauung aber, und das hat J. Weber übersehen, ist die bewegende Kraft in ed, dorten wird die Kraftlinie weggedrückt, und mit der rotirenden Kraftlinie muss der Magnet mitrotiren, da Kraftlinie und Magnet fix verbunden sind. Hätte aber Weber in Versuch 2 Magnet und Bügel, jeden für sich rotirbar gemacht, so müsste der Magnet nach beiden Theorien ruhig bleiben. Nach Faraday ist das unmittelbar ersichtlich. Nach Preston drücken aber bc und ed in entgegengesetzter Richtung auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien, und die Wirkung hebt sich auf, da, wie S. 961 gezeigt werden wird, ein rotirendes bc denselben Druck ausübt wie ruhendes bc.

Wirkung eines geraden Stromes auf einen sogenannten Pol. Auch mit nebenstehendem Apparat, der so oft zur Entscheidung in verschiedenen Modificationen herbei-

gezogen wurde, kommt man nicht weiter. Ich erwähne diesen, in den meisten Lehrbüchern beschriebenen Versuch, weil fast immer eine, wenn auch naheliegende, so doch falsche Deutung desselben gegeben wird. Die Kraftlinie wird oft definirt als die Richtung, in der sich ein Nordpol bewegt. Die Ursache der Rotation in diesem Versuche soll darin bestehen, dass die Magnetpole N



durch den stromdurchflossenen Leiter ab um diesen herumgedreht werden. Diese Biot-Savart'sche Vorstellungsweise

<sup>1</sup> Die diesbezügliche Arbeit von Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852, geht zwar, aber leider ohne Verwendung des Begriffes »Kraftlinien«, von jenen Anschauungen aus, welche ich die Faraday'schen nannte. Plücker gibt jedoch keinen Beweis für diese Prämisse, er stellt sie als selbstverständlich hin. Siehe z. B. S. 354, Abschnitt 4: »Wenn hiebei auch die Nachweisung dieser elektrischen Vertheilung am Elektrometer durch mich nicht versucht worden ist, so ist dieses doch in analogen Fällen, wie z. B. beim Arago'schen Rotations-Magnetismus geschehen und daher als unzweifelhaft anzusehen«. Dieser Arago'sche Rotations-Magnetismus ist aber doch ganz etwas anderes.

scheint mir aber ebenso unphysikalisch wie die Vorstellung eines einzigen Poles, der für sich allein nie existiren kann oder die Vorstellung eines isolirten Stromelementes. Ferner muss auch die Ampère'sche Regel herhalten; die in ab gedachte bekannte Figur weist dem Nordpol den Weg nach links. Um die Unrichtigkeit dieser Anschauung zu zeigen, braucht man nur bx sehr gross zu machen. Diesem Versuche gab ich, da dann die Reibung der grossen Quecksilberrinne zu bedeutend würde, folgende Form:

ab ist derselbe Leiter wie früher. Der Strom geht dann durch das Quecksilbernäpfehen b nach x, wo er sich theilt,

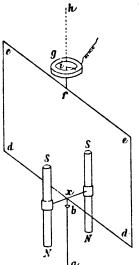


Fig. 5.

durch den Rahmen xdef und schliesslich durch den Draht fi in die Quecksilberrinne g. Dieser ganze Rahmen hängt an einem Seidenfaden ih und ist daher sehr leicht beweglich. Die Zeichnung ist der Deutlichkeit halber nicht in den richtigen Dimensionen gezeichnet. Die Magnete sind zu gross und zu weit aus einander gezeichnet; sie sind in Wirklichkeit quadratische Stäbe von 12·5 cm Länge, die beiden Mittelpunkte N stehen nur 2·3 cm von einander. Der Rahmen war sehr gross, xd war 30 cm und dc war 28 cm. g hingegen war wieder möglichst klein.

Trotz Anwendung starker Ströme von circa 15 Ampère konnte keine Spur

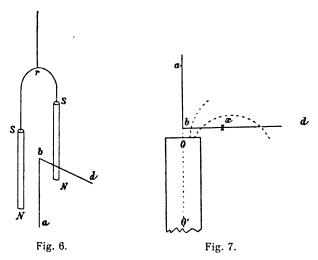
einer drehenden Kraft entdeckt werden. Das Resultat war vielmehr, dass der Leiter ab die beiden Nordpole N nicht längs seiner kreisförmigen Kraftlinien dreht und dass auch die Ampère'sche Regel sich hier nicht in der einfachen, oft beliebten Form anwenden lässt. xd ist natürlich nach Biot-Savart ohne Einfluss, da ja um die Drehungsaxe xd keine Rotation möglich ist, da auch in den symmetrischen Theilen des Rahmens der Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst und da überdies die beiden Pole S und N gleich weit entfernt sind: drei Gründe, von denen jeder einzelne allein schon

genügen würde. Ähnliche Gründe und in erster Linie die grosse Entfernung schliessen einen Einfluss von de und ef aus.

Der Sitz der bewegenden Kraft in dem Versuche Fig. 4 liegt im feststehenden Leiter xd. Dies zeigt folgender Versuch.

Die beiden Magnete (Fig. 6) hängen mittelst des Drahtbügels r an einem Seidenfaden, währenddem der Strom abd fixirt ist, dann dreht sich das Magnetsystem bis zum Anstoss, weil die Fläche abd einen anziehenden Magneten vorstellt.

Umgekehrt habe ich bei dem Versuche Fig. 5 die mechanische Befestigung der Magneten von dem Rahmen xdef weggegeben. Die Magnete sind an derselben Stelle wie in Fig. 5,

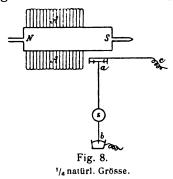


aber an einem Stativ befestigt, der dieselben verbindende Draht fehlt. ab und der Rahmen xdef waren unverändert. Dann dreht sich dieser Rahmen gleichfalls bis zum Anstoss; wir haben jetzt die reactio der in Fig. 6 geschilderten actio.

Es ist die Versuchsanordnung Fig. 4, welche von Plücker, Edlund u. A. mit Vorliebe für die Erklärung der unipolaren Induction herbeigezogen wurde, zu diesem Zwecke sehr ungeeignet. Es hat aber Beer¹ diesem Versuche eine übersichtlichere Form gegeben, die (in etwas veränderter Weise) durch obenstehende Fig. 7 angedeutet ist. Es sei OO' ein sehr grosser

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann., 94, S. 178, 1855.

Magnet, dessen unterer Pol in unendlicher Entfernung sich befindet. abx rotirt mit dem Magneten, xd steht fest. Ob wir nun für 00' einen Vollmagneten oder einen um die Axe symmetrischen Hohlmagneten nehmen, so wird bei Einleiten eines Stromes durch abxd immer abx und der mit demselben fest verbundene Magnet rotiren, nach Faraday, weil die feststehenden Kraftlinien auf bx drücken, nach Preston, weil das feststehende xd auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien drückt. Wir haben hier eine Umkehrung der Betrachtungen von S. 952. In gleicher Weise hat auch Beer gezeigt, dass sowohl die Laplace'sche Ansicht, welche zur Plücker'schen Anschauung, von mir als die Faraday's bezeichnet, führt, als auch die Ampère'schen Ideen, welche zur Neumann'schen Theorie, respective mit Berücksichtigung des Begriffes Kraftlinien zur Vorstellung Preston's führen, in gleicher Weise diesen Versuch erklären.



Ponderomotorische Wirkung eines rotirenden Magneten. Im weiteren Verfolge dieser Ideen machte ich zwei neue Versuche, die vielleicht von einigem Interesse sein dürften. NS (Fig. 7) ist ein horizontal liegender Elektromagnet, AA die magnetisirende Spule, welche gleichzeitig mit dem Magneten um

eine horizontale Axe gedreht werden kann, die Stromzuführung geschieht durch nicht gezeichnete Schleifcontacte; ab ist ein kleines, 24 cm langes Pendelchen (in der Figur zu kurz gezeichnet), das in keinerlei mechanischer Verbindung mit dem Magneten steht. Das untere Ende des Pendelchen b taucht in Quecksilber und ein starker Hilfsstrom kann durch cab hindurchgeleitet werden. Geschieht dies, während der Elektromagnet magnetisch ist, so wird das Pendelchen aus der Ruhelage herausgedrückt und die Ablenkung kann mittelst des kleinen Spiegelchens s bestimmt werden. Diese Ablenkung war nun gleich gross, ob der Magnet in Ruhe war, oder etwa 80mal in der Secunde gedreht wurde. Durch Commutiren des magne-

tisirenden Stromes oder des Stromes im Pendelchen oder durch Änderung der Rotationsrichtung wurde dieser Versuch in mannigfacher Weise variirt, das Resultat blieb aber immer das gleiche.

Nach Faraday ist das selbstverständlich, denn die Kraftlinien stehen trotz der Rotation fest, das Feld bleibt physikalisch ganz unverändert. Nehmen wir aber an, dass die Kraftlinien mit dem Magneten rotiren, so haben wir schon eine gewisse Einschränkung, wonach der Druck eines stromdurchflossenen Leiters gegen magnetische Kraftlinien von einer Eigenbewegung dieser Kraftlinien ganz unabhängig ist.

Diese Differenz beider Anschauungen tritt vielleicht in folgendem Versuche noch klarer zu Tage. Es handelt sich um Beantwortung der Frage, ob das bekannte Faraday'sche Pendel, das, wenn es stromführend ist, um einen Magneten herumrotirt, in seiner Rotationsgeschwindigkeit sich ändere, wenn man den Magneten selbst mechanisch in derselben Rich-

tung oder in entgegengesetzter dreht. Aus technischen Gründen wurde dieser Versuch in folgender Form, gleichsam auf den Kopf gestellt, ausgeführt.

NS (Fig. 9) ist der Eisenkern mit der Spule; er steckt in einer verkehrt aufgestellten Centrifugalmaschine nach abwärts; der magnetisirende Strom wird durch Schleifcontacte zugeleitet, damit auch hier die magnetisirende Spule mitrotire. ab ist ein Metallständer mit einem Quecksilbernäpfchen b; eg sind zwei feststehende, concentrische, kreisförmige Quecksilberrinnen, die miteinander (durch Überbrückung von zahlreichen Eisendrähtchen) in

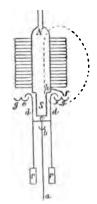


Fig. 9.

1/6 natürl. Grösse.

leitender Verbindung stehen; der Draht fh ist fest mit dem Magneten verbunden und rotirt mit demselben; r sind Gegengewichte, damit das Drahtsystem cde auf der Spitze c stabil stehe. Der Strom, der durch das Faraday'sche Pendelchen cde

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe z. B. Pfaundler, Lehrbuch der Physik, III, S. 702-704, 1888 bis 1890 oder Wüllner, Lehrbuch der Physik, IV, S. 895, 1886.

geht, nimmt im Ganzen den Verlauf durch den Leiter ab, der fix ist, weiter durch cde, welcher durch elektromagnetische Einwirkung rotiren kann; der Strom geht dann aus der feststehenden Quecksilberrinne e in die feststehende Nachbarrinne g; in diese taucht der mit dem Magneten verbundene Draht fh, durch welchen der Strom in den Magneten eintritt, um durch einen (nicht gezeichneten) Schleifcontact bei N wieder zur Batterie zurückzukehren.

Steht der Elektromagnet fest, so rotirt das Drahtsystem cde, ich kann aber auch den wirkenden Elektromagneten mechanisch in Rotation versetzen. Weil gleichzeitig mit dem Magneten fh rotirt, muss fh in eine zweite Quecksilberrinne tauchen, um nicht durch Reibung die Rotation des eigentlichen Pendelchens zu beeinflussen. Stand der Elektromagnet ruhig, so fanden etwa 60 Umdrehungen des Pendelchens in 30 Sekunden statt; genau dieselben Zahlenverhältnisse wurden aber auch gefunden, wenn man den Elektromagneten mit beliebigen Geschwindigkeiten in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotirte.

Steht der Magnet ruhig, so geben beide Theorien das gleiche Resultat. Sowie durch den Leiter im Felde Strom fliesst, wird derselbe gegen die Kraftlinien gedrückt und rotirt immer rascher, bis seiner weiteren Beschleunigung durch die Reibung und Inductionsströme ein Ziel gesetzt wird. Die Energie dieser Rotation entsteht nach beiden Theorien durch den elektrischen Strom, der die durch die Rotation entstehende elektromotorische Gegenkraft überwinden muss.

Lassen wir nun durch mechanische Kraft den Magneten ebenso rasch rotiren, als es der Leiter unter dem Einflusse des Stromes thut, so verlangen wieder beide Theorien dasselbe, dass nämlich jetzt die Energie der Pendelrotation nicht mehr durch den Strom, sondern durch die mechanische Energie der Rotation des Magneten geliefert werde. Nur aus verschiedenen Gründen. — Nach Faraday stehen auch jetzt die Kraftlinien fest. Es entstehen sowohl einerseits in *cde*, als auch anderseits in der Strombahn im Magneten hN elektromotorische Gegenkräfte, die sich aber gegenseitig aufheben. (Das wird aus der Betrachtung der einen, in der Figur punktirt gezeichneten Kraft-

linie unmittelbar ersichtlich. hf kann nach Belieben klein gemacht werden, es ist daher seine Wirkung zu vernachlässigen.) Nach Preston bewegen sich Kraftlinien und Leiter gleich schnell, es findet also auch hier keine Schwächung des ursprünglichen Stromes statt, somit kommt die Rotationsenergie des Pendelchens von der Rotationsenergie des Magneten.

Nach Maxwell sucht ein vom Strome durchflossener Leiter im magnetischen Felde jene Lage einzunehmen, bei welcher er die möglichst grösste Anzahl von Kraftlinien umschliesst. Das gilt aber in unserem Falle nicht, weil hier der Magnet sich bewegt.<sup>1</sup>

Somit liefert dieser Versuch auch keine Entscheidung.

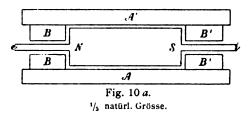
Unipolare Induction in einem Eisenrahmen. Folgender Versuch wäre vom Standpunkte der Theorie Faraday's sehr leicht zu erklären, während er nach der Preston's eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet. Diese Schwierigkeit tritt aber auch bei Beibehaltung der Idee Faraday's, wiewohl an anderer Stelle (siehe S. 979) auf.

Es wurde die Änderung der unipolaren Induction eines Magneten untersucht, wenn man die magnetischen Kraftlinien durch feststehende massive Eisenmassen gehen liess; der Magnet rotirte in einem Eisenrahmen oder aber ausserhalb desselben.

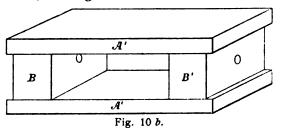
In nachstehender Fig. 10 sehen wir in a den verticalen Längsdurchschnitt, der die magnetische Axe enthält, in b eine perspectivische Ansicht des Eisenrahmens ohne Magneten und endlich in c einen auf die magnetische Axe senkrechten Verticalschnitt durch die Äquatorebene des Magneten. Es sei NS der Elektromagnet, der durch die Axenverlängerungen e und i in rasche Rotationen versetzt werden kann. Die Axe ei

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ein analoger Fall auf mechanischem Gebiete wäre folgender: Es sei eine feststehende Kugel a, welche eine Kugel b mit der Newton'schen Gravitation anzieht. Die Kugel b fällt, indem sie von Orten minderen Potentiales zu solchen höheren Potentiales fortschreitet. Bewege ich aber die anziehende Kugel a mit einer Geschwindigkeit, welche ebenso gross ist und gleich gerichtet wie die von b, so ändert sich die Entfernung der beiden Kugeln nicht, die Kugel b bleibt stets auf Orten gleichen Potentiales und die Bewegungsenergie des gesammten Systemes rührt her von jener Energie, welche von aussen her in die Kugel a hineingesteckt wird.

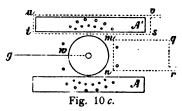
geht ohne Berührung durch die Löcher des Rahmens und die Dimensionen des Magneten sind so gewählt, dass der Rahmen (Fig. 10 a) sowohl von oben und unten, als auch von rechts und links möglichst dicht an den Magneten heranreicht. Die



(nicht gezeichneten) Windungen des Elektromagneten rotiren mit demselben; der magnetisirende Strom wurde mittelst zweier



Schleifcontacte zugeführt und war auf das Sorgfältigste vom Magneten isolirt. Der Eisenrahmen, welchen man um diesen Magneten herumbauen konnte, bestand aus zwei Eisenplatten



A und A' und aus zwei durchbohrten Eisenparallelepipeden B und B'.

Bevor ein Versuch über unipolare Induction gemacht wurde, untersuchte ich zuerst das Feld durch gewöhnliche Induction. Eine einfache, mit einem Galvanometer verbundene Drahtschlinge umgibt den Äquator des Magneten und man erhält, nach Anbringung aller Correctionen beim Commutiren des magnetisirenden Stromes einen Ausschlag von 2·21 ohne

Eisenrahmen und 7.37 mit Eisenrahmen, es ist somit die Gesammtanzahl aller Kraftlinien in Folge der Anwesenheit des Eisens 3.34 mal so gross geworden. Die Mehrzahl der Kraftlinien wird aber im zweiten Falle durch das Eisen hindurchgehen. Um das zu constatiren, wurde eine zweite rechteckige Schlinge stuv um die Eisenplatte A gelegt (siehe Fig. 10c). Die Induction in diesem Rechtecke war 3.01, somit gehen von 7.37 Kraftlinien  $2 \times 3.01$  oder 6.02 durchs Eisen. Ich füge noch hinzu, dass eine Rotation des Magneten während dieser Messung keinen Einfluss hatte, es gingen also die Kraftlinien vom rotirenden Magneten gerade so weg, wie vom ruhenden.

Des Späteren wegen erwähne ich noch folgende Inductionsmessung. Eine rechteckige Spule qmnr (Fig. 10 c) ist in dem Luftraume des Eisenrahmens in der Äquatorebene eingeschoben. Beim Commutiren des magnetisirenden Stromes erhält man ohne Eisenrahmen 0.99 und mit Eisenrahmen 0.21, d. h. es wurde das Feld an der Stelle des Äquators durch Anbringung des Eisenrahmens 4.75 mal so schwach. Diese Zahl kann mit den vorigen nicht unmittelbar verglichen werden, weil diese Spule aus mehreren Windungen bestand und auch keine für die spätere Überlegung überflüssige Messungen der Dimensionen dieser Spule ausgeführt wurden.

Jetzt erst wurde zur Bestimmung der unipolaren Induction geschritten. Ein Schleifcontact wg (Fig. 10 c) und die Axe e (Fig. 10 a) führen zum Galvanometer; die unipolare Induction beträgt  $12 \cdot 6$  im Eisenrahmen und  $3 \cdot 6$  ohne Eisenrahmen. Es ist somit die unipolare Induction durch Anwendung des Eisens  $3 \cdot 5$  mal vergrössert worden. Nach Faraday's Theorie ist die Erklärung sehr einfach. Alle Kraftlinien gehen durch das Innere des Magneten. Der Sitz der elektromotorischen Kraft liegt in ow (Fig. 10 c), wo durch den rotirenden Magneten die im Innern des Magneten liegenden feststehenden Kraftlinien geschnitten werden. Alles was aussen im magnetischen Felde die Anzahl der Kraftlinien ändert, muss auch die Anzahl der Kraftlinien innerhalb des Magneten und daher auch den Betrag der unipolaren Induction um gleich viel verändern. Durch den Eisenrahmen erhielten wir eine  $3 \cdot 34$  fache Vermehrung der

Kraftlinien und eine 3.5 fache Vergrösserung der unipolaren Induction. Diese beiden Zahlen sind mit Rücksicht auf die Fehlerquellen an den Schleifcontacten u. dgl. als gleich anzusehen.

Viel compliciter wird die Erklärung, wenn wir uns auf die Anschauungsweise stellen, dass die Kraftlinien mitrotiren. Der Sitz der elektromotorischen Kraft ist dann im feststehenden Draht gw zu suchen (Fig. 10 c). Wir haben aber früher gesehen, dass durch Anbringung des Eisenrahmens die Anzahl der Kraftlinien an der Stelle gw auf den etwa fünften Theil (0.99)

verkleinert wird und trotzdem ist die unipolare Induction an dieser Stelle  $2\cdot 5$  mal so gross. Es stellen in Fig.  $10\,c$  die Punkte den Äquatorialdurchschnitt der Kraftlinien dar, von je  $7\cdot 37$  gehen nach den früheren Messungen  $6\cdot 02$  durch das Eisen, nur  $20^{\circ}/_{0}$  gehen durch den Luftraum. Gleichwohl müssen bei einer Umdrehung alle Kraftlinien die Strecke gw passiren, da ja die unipolare Induction in gw ihrer Grösse nach dem Schneiden aller Kraftlinien entspricht. Daraus folgt, dass die Kraftlinien mit sehr grosser Geschwindigkeit rotiren: sie werden im oberen A längere Zeit verweilen und dann plötzlich mit einer Geschwindigkeit, die viel grösser ist, als die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten, in das untere A hinunterspringen, um die versäumte Rotation nachzuholen. Nur so glaube ich vom Standpunkte Preston's aus meine Resultate erklären zu können.

Diese Rotationsversuche im Eisenrahmen lassen sich nach Faraday viel ungezwungener erklären; es wäre aber voreilig, dies zu Gunsten dieser Theorie deuten zu wollen, da wir eben dasselbe »Springen der Kraftlinien« bei Erklärung einer anderen Thatsache (S. 979) vom Standpunkte Faraday's nicht werden entbehren können.

Eine ähnliche Schwierigkeit wird auch von Ermacora<sup>1</sup> angegeben. Er kommt zur Ansicht, dass in solchen eisen-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ermacora, Ein fundamentaler Punkt der elektrodynamischen und Inductionstheorie und die wahrscheinliche Existenz eines vierten elektrischen Feldes. (Rend. della Soc. Ital. di Elettricità pel progresso degli studi e delle applic. I. Mai 1891. Übersetzt in Zeitschr. für Elektrotechnik, Kareis, Wien, IX. S. 424, 1891.)

geschirmten Räumen die durch Schwingungen einer Magnetnadel und dergl. bestimmte Feldstärke für die durch das Schneiden derselben Kraftlinien hervorgebrachte Induction nicht massgebend sei. Ich werde auf diesen interessanten Fall am Schlusse der Arbeit noch einmal kurz zurückkommen.

### II. Elektrometrische Versuche.

Die bis jetzt geschilderten Überlegungen haben keine Entscheidung geliefert. Nach der Ansicht Faraday's muss ein unipolar gedrehter Magnet elektrische Spannungen aufweisen, und es liegt daher die Idee nahe, diese Spannungen elektrometrisch nachzuweisen, wie dies wohl zuerst Beer verlangt hat. Wiewohl ich auf diese Weise durchaus keine einwurfsfreien Resultate erhielt, möchte ich mir doch erlauben, einige Worte über meine diesbezüglichen, oft sehr complicirten Versuche zu sagen.

Die Schwierigkeit bei allen derlei Versuchen liegt natürlich darin, dass man an dem rotirenden Magneten keine Erdleitung anbringen kann und daher zu Tropfelektroden und ähnlichen Hilfsmitteln greifen muss.

Potentialverschiebung in einem ruhenden Leiter. Am einfachsten erschiene es, die eventuelle Ladung oder Nicht-

ladung eines dem rotirenden Magneten benachbarten feststehenden Leiters zu constatiren. Es sei NS (Fig. 11) ein um eine verticale Axe rotirender Magnet, der in der Axenrichtung SO zur Erde abgeleitet sei, ab sei ein Leiter, der nach der Theorie Preston's Spannungsdifferenzen zwischen a und b aufweisen muss. Der obere Theil des Leiters sei durch E zum Elektrometer abgeleitet. Wegen der grossen Capacität des Elektrometers würde der ganze Potentialanstieg an dem Punkte b sitzen. Wir können nun aber durch einen Draht, der vom Punkte b zur Erde

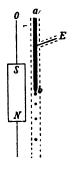


Fig. 11.

führt, keine Ableitung vornehmen, da ja dieser Draht durch dieselben Kraftlinien wie Eb, aber im entgegengesetzten Sinne

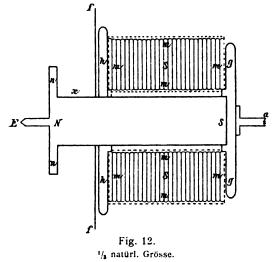
<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann. 94, S. 192, 1855.

geschnitten würde. Es liegt nun die Idee nahe, in b eine Tropfelektrode anzubringen. Die Potentialdifferenzen, mit welchen ich im günstigsten Falle arbeiten konnte, waren <sup>1</sup>/<sub>100</sub> Volt; es wäre daher nothwendig, um die Elektrisirung der Tropfelektrode durch Reibung der Luft, und um die Influencirung der Tropfelektrode, welche nach der Faraday'schen Theorie vom rotirenden Magneten ausströmen würde, zu vermeiden, die Tropfelektrode mit einer zur Erde abgeleiteten Röhre (in der Figur punktirt gezeichnet) zu umgeben. Diese Röhre unterliegt aber nach der Theorie Preston's gleichfalls durch das Schneiden der rotirenden Kraftlinien einer magnetischen Induction, die Tropfelektrode tropft von allem Anfange an in einem Gehäuse, welches genau jenes Potentiale im Innern erzeugt, das die Tropfelektrode von allem Anfange an gehabt hat. Eine Ableitung findet daher nicht statt. Ich weiss nicht, durch welche Art von Kunstgriffen man dieses Hinderniss umgehen könnte.

Potentialverschiebung im rotirenden Magneten. Ich habe in Folge dessen die Spannung des rotirenden Magneten selbst nachzuweisen versucht, wobei ich zunächst die Idee verfolgte, die Tropfelektroden mitrotiren zu lassen. Ein grosser, isolirter Elektromagnet rotirte um eine horizontale Axe, ein Draht führte in der Richtung der Axe zum Elektrometer. Nach der anderen Richtung war die Axe hohl und stand mit einem isolirten Wasserreservoir in Verbindung, der Wasserkanal ging bis in die Mitte des Magneten und bog dort senkrecht gegen den Äquator des Magneten ab, wo das Wasser bei einer raschen Rotation des Magneten in Form eines feinen Sprühregens herausgeschleudert wurde. Der ganze Magnet befand sich in einem Metallkasten von 1.5 m im Gevierte, der zur Erde abgeleitet war. Ich dachte so eine Ableitung jener Elektricitäten, die am Äquator sich anhäuften, bewerkstelligen zu können. Bei raschen Rotationen war aber die Reibung des ausströmenden Wassers viel zu gross, der Magnet wurde so stark negativ elektrisch, dass das Elektrometer weit über die Scala hinausging.

Ich liess nun an derselben Axe zwei in der eben geschilderten Art construirte Magnete rotiren, der magnetisirende

Strom wurde aber in beiden Magneten nach entgegengesetzter Richtung herumgeführt. Die Axe des einen Magneten war mit dem einen Quadrantenpaar, die Axe des zweiten Magneten mit dem zweiten Quadrantenpaar des Elektrometers verbunden. Ich hatte so gehofft, dass die Elektrisirung durch die Reibung des ausspritzenden Wassers sich compensiren würde, während durch die Anwendung der zwei Magnete die Wirkung der unipolaren Induction beim Commutiren sich verdoppeln würde. Das Elektrometer blieb zwar innerhalb des Gesichtsfeldes, war aber so unruhig, dass die grosse Mühe, die ich mir mit diesem Versuche gegeben, leider resultatlos blieb. Gleichwohl glaube



ich, dass diese Anordnung bei Anwendung besserer Hilfsmittel noch am ehesten Aussicht auf Erfolg hätte. Ich habe mich nicht weiter mit derselben bemüht, weil mir inzwischen die auf S. 976 zu schildernden Versuche entscheidend zu sein schienen.

Nur noch einen elektrometrischen Versuch will ich beschreiben, der unter einer gewissen Annahme zu Gunsten der Faraday'schen Hypothese spricht und bei dessen Schilderung ich einige der Fehlerquellen, die auf diesem Gebiete auftreten, erwähnen kann. NS (Fig. 12) ist der Eisenkern eines Elektromagneten. Dieser Eisenkern hat nach links eine Polscheibe nn; die Axe E führt zum Elektrometer. hh und gg sind zwei Hartgummischeiben. Die Axe a ist durch die Hartgummischeibe gg

vom Magneten isolirt; m...m ist eine zur Erde abgeleitete Metallhülle, in welcher die magnetisirende Spule s, s aufgewickelt ist. Diese Spule wird durch zwei nicht gezeichnete Schleifcontacte mit dem magnetisirenden Strom versehen. Die zur Erde abgeleitete Einhüllung m der Spule ist nothwendig, weil der magnetisirende Strom sonst durch statische Influenz auf den Eisenkern und das Elektrometer wirkt. Das Ganze befindet sich in einem grossen, zur Erde abgeleiteten Kasten von 1.5 m im Gevierte. Die Verlängerung der Axe a führt durch die Wand des Kastens hindurch, der Schnurlauf zum Antrieb des Magneten befindet sich so natürlich ausserhalb des Kastens, da die Reibung der Schnur viel zu viel Elektricität erzeugen würde. ff ist eine dünne Eisenplatte, um den Punkt x, wo die Ableitung der Elektricität stattfinden soll, vor dem Einflusse der Hartgummiplatte hh zu schützen. Dieses ganze, eben beschriebene und in der Figur dargestellte System rotirt circa 80 mal in der Secunde.

Lässt man bei x einen zur Erde abgeleiteten Draht schleifen, so zeigt das Elektrometer beim Commutiren Spannungsänderungen von circa  $^{1}/_{60}$  Volt. Die Frage ist jetzt natürlich, ob diese elektromotorische Kraft im Magneten oder in dem bei x schleifenden Drahte ihren Sitz hat. Um das zu entscheiden, muss an Stelle des schleifenden Drahtes eine andere discontinuirliche Ableitung ersonnen werden.

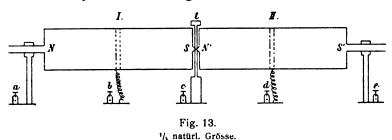
Auch hier versuchte ich es zunächst mit Tropfen, welche von oben her auf x auffielen; es waren aber die störenden Ursachen zu vorwiegend und selbst ein Doppelsystem mit Gegenschaltung (analog dem oben geschilderten) hatte keinen Erfolg. Nun wurde um x ein Papierstreifen so gewickelt, dass, mit Hilfe zweier unterlegter Drahtringe, zwischen dem Magneten und dem Papierstreifen etwa 1 mm Luftschichte war. Die Oberfläche des Papiers war berusst und stand in leitender Verbindung mit dem Magneten. Wurden nun die Strahlen einer kräftigen Wechselstrombogenlampe mit Hilfe eines vergoldeten Hohlspiegels so auf x concentrirt, dass x den Brennpunkt des Lichtkegels bildete, so trat beim Rotiren und Commutiren ein Ausschlag von derselben Grössenordnung auf, wie wenn auf x ein zur Erde abgeleiteter Draht schleifte. Ich verhehle mir aber

nicht, dass ich mit diesem Versuche keine einwurfsfreie Stütze der Anschauung Faraday's geschaffen. Abgesehen von der Elektrisirung durch die Bestrahlung, welche bald —, bald + war, der Unruhe des Elektrometers und sonstiger Fehlerquellen geschieht hier die Ableitung durch Wärmewirkung, und man könnte immerhin annehmen, dass nach Preston eine Induction in dem aufsteigenden warmen Luftstrom stattgefunden habe.

Ich habe die Ergebnisse dieses Capitels, in welchem eine fast zweijährige, angestrengte experimentelle Arbeit steckt, nur desswegen kurz mitgetheilt, um die Schwierigkeiten einer Entscheidung der aufgeworfenen Frage mittelst elektrometrischer Messung darzuthun.

#### III. Entscheidende Versuche.

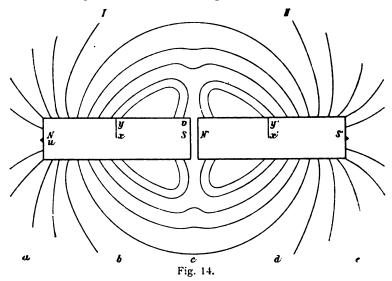
Folgende Versuche scheinen mir aber nur im Sinne einer Entscheidung der untersuchten Frage zu Gunsten der ursprünglich Faraday'schen Theorie gedeutet werden zu können. Ein



Magnet ist im Äquator durch einen zur Axe senkrechten Schnitt gleichsam in zwei Theile getheilt und es kann jetzt jeder dieser zwei Theile für sich allein gedreht werden. In Fig. 13 sind NS und N'S' zwei Elektromagnete, deren ungleichnamige Pole S und N' möglichst knapp aneinanderstossen. Die Entfernung der beiden Magnete betrug  $9 \, mm$ , weil ja die Stütze t zwischen denselben eine gewisse Festigkeit haben musste; die Länge jedes Magnetes war  $16 \, cm$ . Die (in der Figur nicht gezeichnete) Drahtwicklung war fest mit den Magneten verbunden und rotirte mit denselben. Jeder der Magnete besass zwei Schleifcontacte zur Zuführung des magnetisirenden Stromes, der aber von dem Eisenkerne selbst sehr sorgfältig isolirt war. Die beiden Magnete wurden stets in derselben Richtung erregt,

indem der magnetisirende Strom zuerst um I und dann in derselben Richtung um II herumfloss. Beim Commutiren kehrte sich die Richtung in beiden um, so dass immer zwei ungleichnamige Pole zusammenstiessen, das Ganze somit gleichsam einen einzigen Magneten darstellte. Fig. 14 gibt den experimentell gefundenen Verlauf der Kraftlinien in quantitativ richtiger Weise (willkürliches Masssystem).

Zur Untersuchung der Unipolar-Induction dienen die Klemmen *abcde* (Fig. 13); *b* und *d* führen zu zwei Schleifcontacten am Äquator der beiden Magnete, metallisch verbunden



mit den Eisenkernen und wohl isolirt von der magnetisirenden Spule; die Klemme c ist in Verbindung mit der Axe S und  $\Lambda'$ , a mit der Axe N, e mit der Axe S'.

Es sei nun zunächst c und d mit dem Galvanometer verbunden, Magnet I steht fest, II rotirt einmal per Sekunde (directer Antrieb ohne Übersetzung). Wir erhalten nach Anbringung aller Correctionen im Mittel einen Ausschlag von 38. Ist hingegen de mit dem Galvanometer verbunden, so haben

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Anmerk. S. 955. In der citirten Arbeit von Zuchristian ist auch die eigenthümliche Knickung der Kraftlinien in der Mitte begründet. In Fig. 14 sind die Kraftlinien zwischen S und N' weggelassen, weil der Raum SN' für eine Beobachtung zu schmal war.

wir einen Ausschlag von 39, in beiden Fällen sliesst der Strom vom Äquator gegen die Axe (oder bei Rotations- respective Stromwechsel umgekehrt). Diese beiden Zahlen sind gleich, da ja der Magnet II in beiden Fällen ganz symmetrisch abgeleitet wird.

Nach Faraday sitzt die elektromotorische Kraft in beiden Fällen in der Strecke x'y' (Fig. 14). Eine genaue Besichtigung dieser Zeichnung zeigt aber, dass diese beobachtete Gleichheit nach Preston schon schwer zu erklären wäre. Des Ferneren aber sollen die Kraftlinien an den Magneten festgebunden sein. Ich frage nun: an dem rotirenden Magneten II oder an den feststehendem I? Ja ich kann bei diesen beiden Versuchen, währenddem II gleichmässig fortrotirt, I in derselben oder in entgegengesetzter Richtung rotiren lassen, ohne dass das Resultat sich ändert.

Folgender Versuch ist nur eine Art von Wiederholung und Erweiterung des vorhergehenden. Es rotire I, Galvanometerleitung sei bc und II sei ruhig, so erhalte ich einen Strom von der Grösse 40. Diese Zahl ist etwas grösser als die oben gefundene analoge 38, weil die Schleifcontacte nicht absolut gleich aufsitzen u. s. w. Jetzt verbinde ich b und d mit dem Galvanometer. Rotire ich II, während I ruhig ist, erhalte ich einen Strom 38, rotirt hingegen I, und II ist ruhig, erhalte ich einen Strom von 40. Das ist wieder nur eine Wiederholung der bereits gemachten Versuche. Jetzt lasse ich aber beide Magnete entgegengesetzt rotiren und erhalte einen Ausschlag von 79 (fast gleich 38+40). Dieser merkwürdige Versuch erklärt sich nach Faraday sehr einfach. Alle Kraftlinien, die wir aussen haben, gehen durch das Innere der Magneten so ziemlich parallel der Axe, die Kraftlinien stehen aber fest; durch das Drehen des Magneten II werden die Kraftlinien in x'v' geschnitten, durch die entgegengesetzte Drehung des Magneten I die Kraftlinien in xy, und diese beiden gleichgerichteten Ströme können nun, wenn die beiden Magnete sich einzeln drehen, einzeln hervorgerufen werden; drehen sich jedoch beide Magnete gleichzeitig, aber entgegengesetzt, so summiren sie sich; drehen sich beide Magnete in gleichem Sinne, so heben sie sich auf.

Wollen wir diesen Versuch nach Preston erklären, so müssen wir zu einer ziemlich gezwungenen Annahme unsere Zuflucht nehmen. Sehen wir zunächst von der Zeichnung Fig. 14 ab, so wirken, nach den wirklichen Versuchsergebnissen beurtheilt, die Magnete I und II ungefähr so, wie wenn sie ganz weit von einander wären; die Kraftlinien des Magneten II drehen sich nach Preston mit diesem Magneten, ebenso sind die Kraftlinien des Magneten I an dem Magneten I fixirt. Nun sind aber in facto die Magnete ja nebeneinander; die in Fig. 14 wiedergegebenen experimentellen Resultate zeigen uns ja ein Ineinanderfliessen der Kraftlinien; wir müssen da folgerichtig, wollen wir die Preston'sche Anschauung beibehalten, dieses

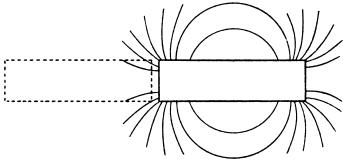


Fig. 15.

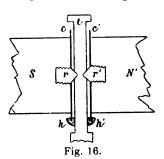
Ineinandersliessen als eine secundäre Erscheinung auffassen und müssen etwa folgendermassen schliessen: Es seien die wirklichen Kraftlinien, deren Rotation die unipolare Induction verursacht, einerseits und jene Kraftlinien, welche die gewöhnliche Induction und das Ausrichten der Eisenfeile bewirken, anderseits, etwas Verschiedenes. Wir hätten es im letzteren Falle bereits mit einer resultirenden Wirkung beider Systeme zu thun, welche die Einzelwirkung des einzelnen Magneten verdeckt, während bei der Unipolarinduction gerade diese Einzelwirkung in Thätigkeit tritt.

Trotz diesem etwas gezwungenen Erklärungsversuche bleibt aber noch immer eine Schwierigkeit übrig. Wenn wir den einen Magneten in grosser Entfernung vom zweiten untersuchen, so gibt er für sich allein das in Fig. 15 dargestellte Feld. Die Kraftlinien sind jetzt weniger geworden; es gibt auch die unipolare Induction dc statt 38 nur 33. Wenn wir nun auch annehmen, dass, was unipolare Wirkung anlangt, das Feld jedes Magneten so für sich bestünde, wie wenn der zweite Magnet nicht da wäre, so müssten wir auch noch ganz eigenthümliche Annahmen machen, weil durch Hinzufügen des zweiten Magneten ja die Anzahl der Kraftlinien vermehrt wurde und sich diese Vermehrung in der unipolaren Induction der nebeneinander rotirenden Magneten zeigte. Wir müssten also etwa so schliessen: Die Anwesenheit des zweiten Magneten vermehrt die Kraftlinien des ersten, welche Kraftlinien aber dann unabhängig vom zweiten Magneten mit dem ersten rotiren und vice versa.<sup>1</sup>

Aber selbst dieser Rattenschwanz von Ausflüchten scheint mir folgendem Experimentum crucis nicht Stand zu halten.

Es wurde an dem Apparat Fig. 13 folgende Änderung vor-

genommen. Fig. 16 stellt in  $\frac{1}{2}$  der natürl. Grösse (doppelter Massstab der Fig. 13) jene Stelle dar, wo die Magnete I und II einander gegenüberstehen, es sind in S und N' die Hartgummispitzen r und r' eingedreht und die Magnete liegen jetzt auf der mittleren Stütze t mit Hilfe dieser isolirenden Spitzen auf. Ferner ist an diese beiden



Endflächen S und N' der Magneten je eine Kupferplatte c, respective c' aufgelöthet, deren Durchmesser den des Eisencylinders und seiner Umwicklung um Weniges überragt, so dass die Platte c unten in eine Quecksilberrinne h eintauchen kann, respective c' in h'. Während also in den früheren Versuchen die Axen der beiden Magneten in leitender Verbindung waren, muss jetzt der inducirte Strom aus dem Magneten S durch c in das Quecksilbernäpfchen h gelangen; dies ist in

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Schaltet man die Magnete so, dass gleichnamige Pole einander gegenüberstehen, so lassen sich auch verschiedene interessante Combinationen der Ableitungen treffen, die aber dann, wo ja jedes Feld für sich existirt, zur Klärung obiger Frage nichts beitragen können.

metallischer Verbindung mit h' und von hier geht der Strom über c' nach N', sonst ist der Apparat und die Bezeichnung der einzelnen Theile dieselbe wie früher; h und h' stehen in leitender Verbindung mit der Klemme c der Figuren 13 und 14.

Zur einleitenden Orientirung zunächst folgende Versuche: ab ist mit dem Galvanometer verbunden, wir erhalten einen Ausschlag 40, ob nun II mitrotirt oder ruhig ist, cb gibt einen Ausschlag von 7 nach entgegengesetzter Richtung, wobei es wieder gleichgiltig ist, ob II mitrotirt oder nicht. ac gibt uns die Differenz dieser beiden Werthe 32. Dass diese Ergebnisse jetzt anders aussehen müssen wie früher, zeigt eine einfache Überlegung der in Fig. 16 dargelegten Verhältnisse, da jetzt die Kupferplatte cc mitrotirt. Nach Faraday stammen diese elektromotorischen Kräfte von dem Durchschneiden der Kraftlinien entlang der Mantelfläche uv. respective uv. Ob wir das Schneiden durch die Mantelflächen oder durch Linien, welche senkrecht auf den Axen stehen, uns bewerkstelligt denken, ist gleichgiltig, da es ja immer nur auf die Endpunkte des Leiters u und v, respective v und v ankommt. vv wirkt in entgegengesetztem Sinne, weil hier die Kraftlinien zum grössten Theil wieder zurückgehen, während u(y)v durch die Differenz dieser beiden Werthe bedingt ist. Selbst das Verhältniss 32: 7 lässt sich innerhalb der Fehlergrenzen (der Schleifcontact bei x war so breit, dass er etwa zwei Kraftlinien umfasste) aus den Kraftlinien mit 8:2 wiederfinden. Ich will die Schwierigkeit, welche die Anschauung Preston's bei Erklärung dieser Resultate mit sich bringt, nicht auseinander setzen, da folgender analoge Hauptversuch noch geeigneter zu diesem Zwecke erscheint.

Ich verbinde nämlich a und e mit dem Galvanometer, die Galvanometerleitungen sind so geführt, dass sie die Verlängerungen der magnetischen Axen bilden. Rotirt jetzt I allein (Versuch 1), erhalte ich einen Strom von 33, rotirt II allein und in entgegengesetzter Richtung (Versuch 2) erhalte ich wieder einen Strom 33·5 von derselben Richtung. Rotiren aber beide Magnete gleichzeitig und nach entgegengesetzten Richtungen (Versuch 3), erhalte ich die Summe der beiden Ausschläge, nämlich 66. Findet die Rotation nach gleichen Richtungen statt, so tritt kein Strom auf.

Nach Faraday ist die Erklärung sehr einfach. Die Kraftlinien stehen fest, die Mantelfläche des einen Magneten schneidet sie in der einen Richtung, die Mantelfläche des zweiten Magneten in entgegengesetzter Richtung, und wir können wieder nach Belieben jede dieser elektromotorischen Kräfte einzeln oder auch ihre Summe oder ihre Differenz in Thätigkeit treten lassen.

Stellen wir uns aber auf den Ständpunkt, dass jeder Magnet mit seinem eigenen Kräftesystem, trotz Fig. 14 rotire; es war dies das letzte Auskunftsmittel, unter dem wir die Preston'sche Theorie — und das nicht befriedigend — halten konnten. Die Kraftlinien des einen Magneten II ohne Anwesenheit von I stellt Fig. 15 dar. Denken wir uns nun, dass in Bezug auf die unipolare Wirkung die Anwesenheit von I das Feld II, wenigstens was die Richtung der Kraftlinien anbelangt, nicht ändere. Wenn nur II allein rotirt, haben wir einen Ausschlag von 33. Soll die Induction in einem feststehenden Leiter stattfinden, so steht uns nur die Mantelfläche ab zur Verfügung und die daselbst geschnittenen Kraftlinien sind viel zu wenig, um unsere Resultate erklären zu können. Statt 33 hätten wir etwa 5—10 bekommen müssen.

Um vollständig objectiv zu bleiben, wollen wir noch einen letzten Rettungsversuch der Theorien Preston's überlegen.

Aus den eben geschilderten Versuchen 1, 2 und 3 müssen wir folgern, dass die Kraftlinien trotz der Rotation der Magneten feststehen. Man könnte nun dieses Fixiren der Kraftlinien als ausnahmsweise und bedingt durch die Anwesenheit des zweiten Magneten hinstellen. In dem Falle z. B. wo beide Magnete mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Seite rotiren, erschien es ja ganz plausibel, anzunehmen, dass die Kraftlinien gleich grosse, aber entgegengesetzte Drehungsimpulse erführen und daher in Ruhe blieben. Da aber müsste, sowie wir den einen Magneten immer langsamer rotiren und schliesslich sogar stille stehen lassen, der Einfluss des rotirenden Magneten auf die Kraftlinien immer steigen, und dieselben, wenigstens theilweise, mit diesem rotiren. Dem widerspricht aber vollständig, dass Versuch 3 uns die Summe der Versuche 1 und 2 gibt.

#### Schlussbemerkung.

In consequenter Überlegung aller mitgetheilter Versuche erscheint mir die Thatsache kaum abzuweisen, dass bei unipolarer Induction das Kraftfeld eines rotirenden Magneten feststeht, dass die erste Anschauung Faraday's somit die richtige war.

Daraus ergeben sich aber einige Folgerungen, die ich noch kurz erwähnen will. Es muss, wie schon Plücker<sup>1</sup> behauptet, die Erde als ein Magnet, der durch die eigenen feststehenden Kraftlinien rotirt, am Nordpol positive und am Äquator negative Elektricität zeigen.

Ebenso hat jeder mit der Erde rotirende Leiter Potentialdifferenzen. Denken wir uns in irgend einem Punkte des mittleren Deutschland, senkrecht auf der Tangente der Erdrotation und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien der Erde einen 1 m langen Draht in (gegen die Erde relativer) Ruhe, so wird derselbe Potentialdifferenzen von 0.013 Volt haben. Der Nachweis dieser Potentialdifferenzen ist aber in Folge derselben Schwierigkeiten, mit denen ich in Abschnitt II kämpfte, fast kaum zu erbringen. Abgesehen von der Kleinheit ist weder eine directe galvanometrische, noch eine elektrometrische Messung möglich; erstere weil jeder geschlossene Leitungsdraht von jeder (geschlossenen) Kraftlinie zweimal in entgegengesetztem Sinne geschnitten wird, letztere weil eine Ableitung des einen Potentiales mittelst Tropfelektrode oder dergl. darum nicht zum Ziele führt, weil die Leiter, die gegen einen Punkt hingehen, alle an derselben Stelle dieselben Potentiale haben müssen, die Tropfelektrode also stets in einer Umgebung arbeitet, welche von allem Anfange an eben dasselbe Potentiale hat, welches sie ableiten soll.

Theoretisch möglich erschiene mir nur folgende Methode. Wir drehen einen Leiter um eine Axe, welche in der Richtung der Erdbewegung senkrecht steht auf den Kraftlinien. Dann werden an den beiden Drahtenden die Potentialdifferenzen bei jeder Umdrehung um 180° wechseln und wir haben in diesem ungeschlossenen Drahte einen minimalen Wechselstrom. Es ist

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pogg. Ann. 87, S. 357, 1852.

unmöglich, die Capacitäten der Drahtenden durch condensatorische Wirkung gegenüberstehender Leiter zu verstärken, weil in Folge der Ableitung dieser feststehenden Leiter, welche ja auch von den Kraftlinien geschnitten werden, dieselben von allem Anfange an gleichen Potentiale haben, wie die gegenüberstehenden Drahtenden.

Schliesslich möchte ich noch einen nebensächlichen Punkt erörtern, auf den bereits S.963 hingewiesen wurde. Es geschieht dies erst an dieser Stelle, weil kraft der gewonnenen Vorstellungen dieser Punkt jetzt rascher erörtert werden kann. Es sei d der Durchschnitt eines Leiters, der auf der Richtung der Erdbewegung e senkrecht steht. d ist auch senkrecht auf die

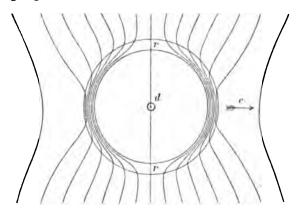


Fig. 17.

Richtung der Kraftlinien und muss bei seiner Rotation mit der Erde alle feststehenden Kraftlinien schneiden. Denken wir uns nun um d herum einen Eisencylinder r, so gehen die Kraftlinien, wie die Figur zeigt, zum grössten Theil durch den Eisenring. Da nun eine Kraftlinie nie reissen kann, sondern stets eine in sich selbst geschlossene Curve darstellt, so müssen wir uns bei der Bewegung von d und r gegen die Kraftlinien folgende Vorstellung bilden. Die Kraftlinien, die rechts durch den Ring gehen, werden, wenn Ring und Draht sich nach rechts bewegt, aus dem Ring herausspringen, d sehr rasch schneiden und dann auf der andern Seite links in r hineinspringen, so dass d, ob es nun im Eisencylinder ist oder ausserhalb desselben, immer von gleich viel Kraftlinien geschnitten werden muss;

nur werden im ersteren Falle die Kraftlinien d mit grösserer Geschwindigkeit, wenn auch in gleichen Zeitintervallen passiren. Durch diese raschere Bewegung innerhalb des Eisenringes wird aber bewirkt, dass in der inneren Lichte des Ringes de facto weniger Linien sind, als im homogenen Feld ausserhalb des Eisenringes. So erklärt sich die bereits erwähnte von Ermacora als Curiosum hingestellte Thatsache, dass die Inductionswirkung in derartigen Fällen von der durch magnetische Messungen (Schwingungen einer Magnetnadel und dergl.) bestimmten Feldstärke scheinbar unabhängig ist; nach obiger Auffassung ist aber auch in unserem Falle einerseits die Inductionswirkung abhängig von der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien und anderseits die Feldstärke von der Anzahl der wirklich vorhandenen Kraftlinien. Die von Ermacora vorgeschlagene Änderung elektromagnetischer Grundbegriffe erscheint somit überflüssig.

### XXI. SITZUNG VOM 18. OCTOBER 1894.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter übermittelt einen Abdruck der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1894, Capitel IX, Ministerium für Cultus und Unterricht, Abtheilung A, B, C und D, ferner ein Exemplar des Finanzgesetzes vom 29. Mai 1894, mit dem Beifügen, dass die ordentlichen, sowie die ausserordentlichen Ausgaben der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unverändert nach der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages genehmigt worden sind.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Wege des k. italienischen Ministeriums des Äussern für die kaiserl. Akademie eingelangtes Exemplar des IV. Bandes des Werkes: •Le Opere di Galileo Galilei«.

Herr Prof. Dr. V. Uhlig in Prag dankt für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Kreideflora Australiens«.

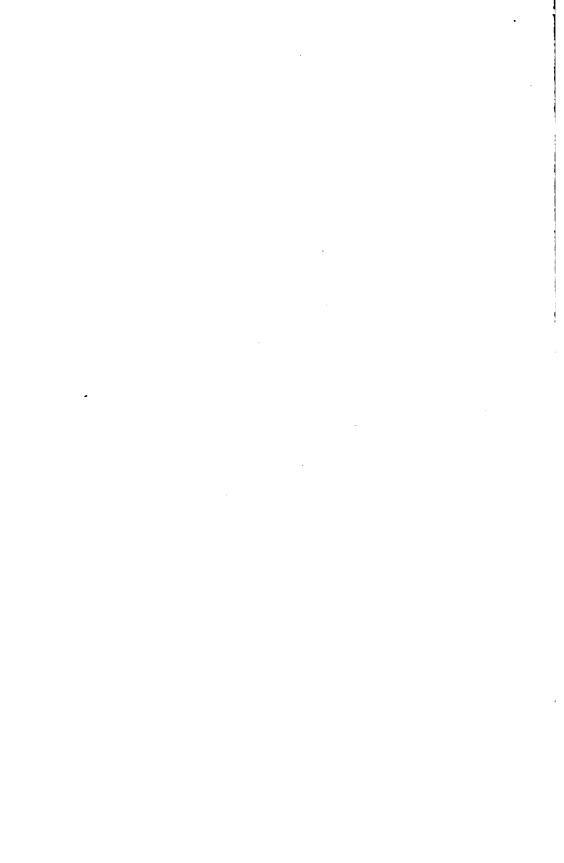
Herr Regierungsrath emerit. Prof. J. Luksch übersendet den in Gemeinschaft mit Prof. J. Wolf an der k. k. Marine-Akademie in Fiume verfassten Bericht über die auf der IV. Reise S. M. Schiffes »Pola« im Jahre 1893 ausgeführten physikalischen Untersuchungen im östlichen Mittelmeer und im Ägäischen Meer.

Herr Stefan v. Heinrich in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Über Kräfte im Raume«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine im mineralogischen Museum der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. P. Philipp Heberdey, Capitularpriester des Stiftes Schotten in Wien, unter dem Titel: \*Krystallmessungen«.

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. IV. Firenze 1894; 4°. Berard, E., Trois ans de séjour à la Clinique Ophthalmologique Universitaire de M. le Professeur Fuchs à Vienne. Rapport adressé à M. le Ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique. Bruxelles, 1892; 8°.





Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, IX... Wasagasse 12) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



Little page

## SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IX. UND X. HEFT.

JAHRGANG 1894. - NOVEMBER UND DECEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHALT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREL

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,

### INHALT

des 9. und 10. Heftes November und December 1894 des CIII. Ba	ndes
Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathemnaturw. C	lasse
	Seite
XXII. Sitzung vom 2. November 1894: Übersicht	985
XXIII. Sitzung vom 8. November 1894; Übersicht	986
Puschl C., Bemerkungen über Wärmeleitung. [Preis: 10 kr. =	
20 Píg.]	
Mertens F., Über die Äquivalenz der reducirten binären quadra-	
tischen Formen von positiver Determinante. [Preis: 15 kr.	
30 Pfg.]	
von Gauss. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	
Trabert W., Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer	
Atmosphäre. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	1023
Finger J., Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunkts-	
flächen zweiter Ordnung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	1061
XXIV. Sitzung vom 16. November 1894: Übersicht	1066
XXV. Sitzung vom 29. November 1894: Übersicht	1067
Voigt W., Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhand-	
lung »Das Potential der inneren Kräfte etc.» [Preis: 5 kr. =	
10 Pfg.],	
Finger J., Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aelo-	
tropen und isotropen Substanzen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	
XXVI. Sitzung vom 6. December 1894: Übersicht	
XXVII. Sitzung vom 13. December 1894: Übersicht	
Czermak P., Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen	
Drahtes, der von einem constanten Strom durchflossen wird.	
(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] .	1107
Bryan G. H. und Boltzmann L., Über die mechanische Analogie	
des Wärmegleichge wichtes zweier sich berührender Körper.	
(Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	
Herz N., Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 kr. =	
50 Pfg.]	
	THE RESERVE TO SERVE

Preis des ganzen Heftes; 1 fl. 50 kr. = 3 Mk.

### SITZUNGSBERICHTE

DER

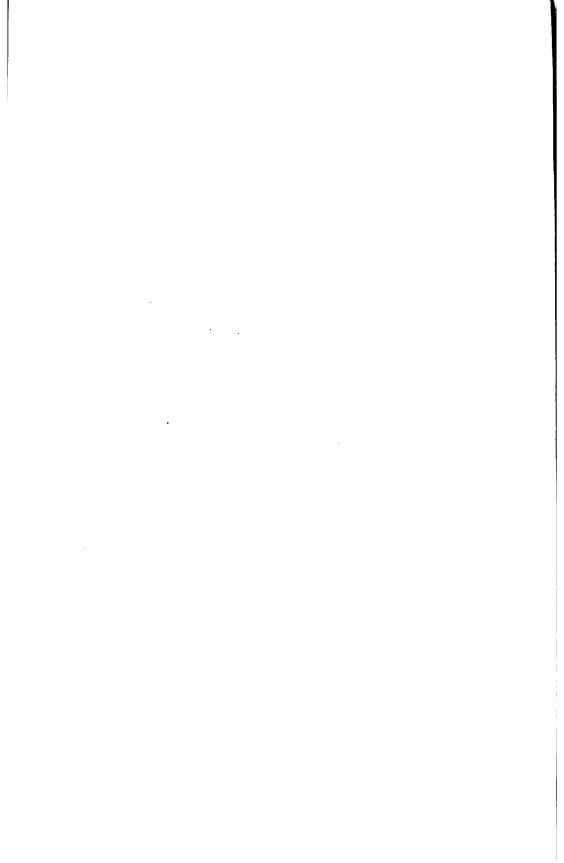
## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



### XXII. SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung I und das Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung II. b. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von den Herren J. Herzig und H. Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über den Nachweis und die Bestimmung des am Stickstoff gebundenen Alkyls«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht für die Publicationen der Tiefseeforschungen in den Denkschriften eine von Herrn Anton König in Wien ausgeführte Untersuchung, betitelt: \*Die Sergestiden des östlichen Mittelmeeres, gesammelt in den Jahren 1890, 1891, 1892 und 1893\*.

Herr Dr. Wilh. Trabert in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: \*Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre\*.

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Musco de la Plata, Anales, T. I (1890—1891); Seccion Geologica y Mineralogica. P. I (1892); Seccion de Arqueologia. P. II y III (1892); Seccion de Historia General (Fotografía). P. I (1892); Seccion Zoologica. P. I (1893); Paleontología Argentina (1893). La Plata; Folio. — Revista, T. I (1890—1891); T. II (1891); T. III (1892); T. IV (1893). La Plata; 8°.

### XXIII. SITZUNG VOM 8. NOVEMBER 1894.

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Graphische Versuche an den vier Abtheilungen des Säugethierherzens«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

- Beiträge zur Kenntniss der regenscheuen Blüthen, nebst Nachträgen zu meinen phytodynamischen Untersuchungen«, von Prof. Dr. Anton Hansgirg an der k. k. böhm. Universität in Prag.
- WÜber Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten«, von Dr. Jan de Vries, Docent an der polytechnischen Schule in Delft.

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodus gefundene astronomische Inschrift«.

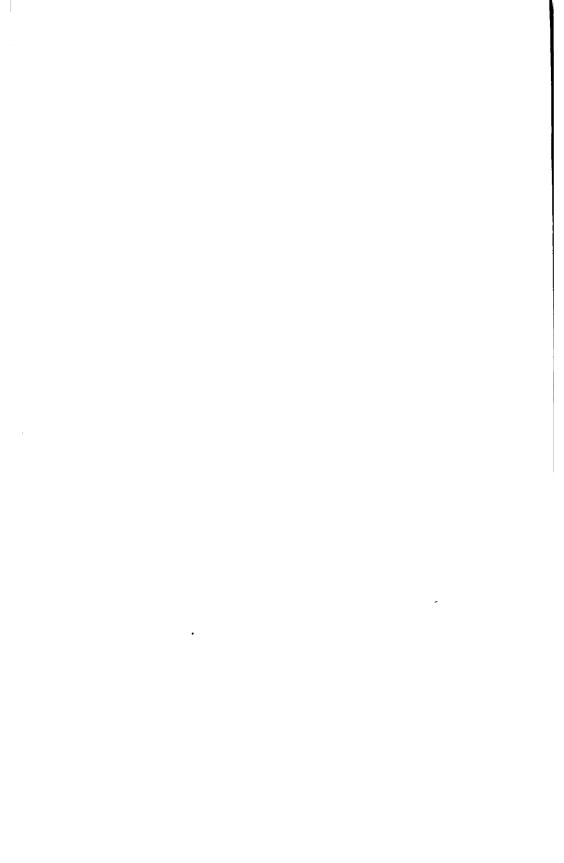
Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, überreicht einen vorläufigen Bericht von Prof. Dr. V. Hilber in Graz über seine im Auftrage der kaiserl. Akademie unternommene geologische Reise in Nordgriechenland und Makedonien 1894.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei Abhandlungen:

 "Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante«. 2. Ȇber den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Institut Botanico-Géologique Colonial de Marseille, Annales. Ière Série, Ière Année, Ier Vol. (1893). Publiées sous la direction de M. Le Professeur Ed. Heckel. Paris, 1893; 8°.



### Bemerkungen über Wärmeleitung

von

### C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Cc:ober 1894.)

Entgegen der gewöhnlichen Annahme, dass die Wärme der Körper in einer gegenseitigen Bewegung ihrer Atome bestehe, bei welcher man die Existenz des Äthers ganz ausser Betracht lassen könne, habe ich vor Kurzem¹ die Vermuthung ausgesprochen, die in einem Körper enthaltene Wärmemenge bestehe ihrem wesentlichen Theile nach aus einer zwischen seinen Atomen durch diffuse Reflexion angesammelten Strahlenmenge. Diese aktinische oder Strahlenwärme ist es dann, welche bei den festen Grundstoffen das Gesetz von Dulong und Petit bedingt; die hier zugleich obwaltende Atombewegung macht von der Gesammtwärme nur einen kleinen Theil aus, wodurch das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme um einen mehr oder weniger geringen Betrag grösser erscheint, als es sein müsste, wenn keine Atombewegung stattfände.

Die sogenannte Leitung der Wärme oder deren Fortbewegung im Inneren eines Körpers von Schichten höherer zu solchen von niedrigerer Temperatur wird nach dieser Anschauung durch zwei sehr verschiedene Vorgänge bewerkstelligt: erstens durch Übertragung von Ätherbewegung oder aktinischer Wärme, zweitens durch Übertragung von Atombewegung oder kinetischer Wärme. Es ist klar, dass die Gesetze der Wärmeleitung sich sehr verschieden gestalten können, je nachdem bei derselben entweder der eine oder der andere der zwei genannten Vorgänge sich überwiegend betheiligt. Dass es unzulässig sei, die Wärmeleitung ganz allgemein als eine ledig-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Berichte, Bd. CIII, Abth. II. a, S. 809-831.

lich durch Atombewegung bewirkte Erscheinung aufzufassen, wird durch die Thatsache bewiesen, dass zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und der inneren Reibung der Flüssigkeiten sich kein oder nur ein sehr schwacher Zusammenhang zeigt. In seiner diesbezüglich grundlegenden Arbeit spricht H. F. Weber, ohne sie näher zu erörtern, die Ansicht aus, die Wärmeleitung geschehe in durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten durch Atombewegung, in Metallen dagegen und namentlich im Quecksilber durch innere Strahlung. Bei dem auf diesem Gebiete noch herrschenden Dunkel könnte es aber immerhin sein, dass es sich gerade umgekehrt verhält.

Denken wir uns einen Körper, dessen Atome durch genügend starke Kräfte in Gleichgewichtslagen unbeweglich festgehalten seien. Nach der kinetischen Theorie würde ein solcher Körper keine Temperatur haben; nach meiner Hypothese ist seine Temperatur durch die zwischen seinen zahllosen Atomen hin- und hergeworfene Strahlenmenge bestimmt, vermöge welcher derselbe auch beständig durch seine Oberfläche Wärme ausstrahlt und deren Abgang daher, wenn seine Temperatur constant bleiben soll, durch gleichzeitige Einstrahlung von aussen ersetzt werden muss. Hat der Körper die Dichte ø und ist c seine specifische Strahlenwärme, so enthält er bei der absoluten Temperatur T in der Gewichtseinheit die Strahlenmenge cT und in der Volumeinheit die Strahlenmenge  $\rho cT$ , welche man als dessen Strahlendichte bezeichnen kann. Für eine in diesem Körper angenommene Schicht von unendlich kleiner Dicke dz herrsche auf einer Seite die Temperatur Tund auf der anderen die Temperatur T-dt; dann wird durch die Flächeneinheit derselben während einer bestimmten Zeit bei constant erhaltener Temperaturdifferenz dt um eine gewisse Strahlenmenge mehr von der wärmeren nach der kälteren Seite. als umgekehrt übergehen, und dieser Mehrabfluss wird die einzige im gedachten Körper mögliche Art der Wärmeleitung bilden.

Die durch diesen Wärmestrom in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geführte Wärmemenge kann man dem Unter-

<sup>1</sup> Wiedemann's Annalen, Bd. X, S. 103.

schiede der beiderseits der angenommenen Schicht herrschenden Strahlendichten, bezogen auf die Schichtdicke dz, proportional setzen und also durch den Ausdruck

$$\eta \rho c \frac{dt}{dz}$$
,

wo  $\eta$  eine von der chemischen Natur des Körpers unabhängige Constante ist, vorstellen, und somit hat man für das Wärmeleitungsvermögen k seiner Bedeutung gemäss die Gleichung:

$$k = \eta \rho c$$
,

unter c, wie erwähnt, die specifische Strahlenwärme verstanden, welche nach meiner Hypothese in festen oder flüssigen Körpern immer nur wenig von ihrer wirklichen specifischen Wärme verschieden ist und daher für solche Körper mit letzterer ohne besonderen Fehler identificirt werden kann.

Nach voriger Gleichung müsste der Quotient  $\frac{k}{\rho c}$  für Körper, in welchen die Wärmeleitung nur durch innere Strahlung vermittelt wäre, einen gleichen Werth haben. Man wird sonach, wenn für eine Classe von Körpern dieser Quotient sich thatsächlich nahe gleich ergibt, schliessen dürfen, dass die Wärmeleitung in denselben weit überwiegend durch innere Strahlung und nur zu einem geringen Theile durch Atombewegung vor sich geht. Eine solche Körperclasse scheinen nach den Versuchen von Weber die durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten zu bilden.

Für Körper, in welchen die Wärmeleitung mehr durch Atombewegung als durch innere Strahlung vermittelt wird, muss demnach der Werth von  $\frac{k}{\rho c}$  entsprechend grösser sein, als in durchsichtigen Flüssigkeiten. Derselbe ist in der That sowohl bei den Metallen, als auch bei den Gasen viel und sehr ungleich grösser; man muss daher annehmen, dass in diesen zwei Classen von Körpern die Wärmeleitung weit überwiegend durch Atombewegung vor sich geht, was bezüglich der Gase, wo die innere Strahlendichte verhältnissmässig klein ist, während die kinetische Wärme einen grossen Theil (bei der

Luft  $\frac{2}{5}$ ) der Gesammtwärme ausmacht, ohnehin keinem Zweifel unterliegt.

In den Metallen ist dem Gesetze von Dulong und Petit gemäss die lebendige Kraft der Atome, wie in festen oder flüssigen Körpern überhaupt, gegen die in ihrem Volumen diffundirte Strahlenmenge nur gering. Es scheint mir aber, dass, wenn die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen vom Körpervolumen blos einen kleinen Theil beträgt, die Übertragung kinetischer Wärme von Atom zu Atom viel ausgiebiger vor sich gehen muss, als wenn die Summe der leeren Zwischenräume gegen den von der Substanz der Atome erfüllten Raum gross ist. Wie ich glaube, ist letzteres in den gewöhnlichen Flüssigkeiten, ersteres aber in den Metallen der Fall und bedingt deren vergleichsweise gute Wärmeleitung.

Wenn dieser Grund der richtige ist, so muss man erwarten, dass bei den Metallen schon eine geringe Volumvergrösserung, wie sie durch Erwärmung eintritt, eine verhältnissmässig sehr starke Verminderung des Wärmeleitungsvermögens zur Folge habe. Dies trifft denn auch thatsächlich zu. Nach Stewart lässt sich für Eisen der Verlauf von k als Function der Temperatur t zwischen 15° und 220° durch die Formel

$$k = k_0(1 - 0.0011t)$$

ausdrücken; es nimmt also k für dieses Metall durch Erwärmung in einem 32 mal stärkeren Verhältnisse ab als die Dichte. Man kann diese Abnahme eine rapide nennen; sie wird sich weiterhin natürlich mehr und mehr verlangsamen. Bei Kupfer nimmt k nur halb so schnell als bei Eisen, aber immer noch 11 mal schneller als seine Dichte ab. Durch Ausdehnung bei constanter Temperatur würde für beide Metalle die Abnahme von k wahrscheinlich eine noch etwas stärkere sein.

Dass in Metallen die Atome einander mit ihren Oberflächen bereits nahe kommen, geht aus meiner Hypothese auch auf einem ganz anderen Erscheinungsgebiete hervor. Nach derselben wird nämlich ein Lichtstrahl in einem durchsichtigen

<sup>1</sup> Wiedemann's Beiblätter, Bd. 18, S. 742.

Körper nicht durch den Äther allein, sondern auch durch die Substanz der getroffenen Atome hindurch fortgepflanzt, und hieraus ergibt sich, wenn d die Dichte und n den Brechungsindex des Körpers, d die Dichte und n den Brechungsindex der Atomsubstanz bedeutet, die einfache Beziehung:

$$\frac{n-1}{d} = \frac{v-1}{\delta}.$$

Für gewöhnlich ist n > 1, wobei  $\nu > n$  sein muss. Bei einigen Metallen (Silber, Gold, Kupfer) fand aber Kundt<sup>2</sup> n < 1, woraus für dieselben  $\nu < n$ , daher

$$\frac{d}{\delta} > 1 - n$$

und als Verhältniss des für den Äther freibleibenden Theiles zum ganzen Körpervolumen

$$\frac{\delta - d}{\delta} < n$$

folgt. Bei Silber ist für weisses Licht im Mittel aus vielen Bestimmungen

n = 0.27:

man sieht also, dass bei diesem bestleitenden Metalle die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen jedenfalls weniger als 0·27 des Körpervolumens beträgt. Bei so geringer Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden Ätherschichten würde es begreiflich sein, dass eine locale Wärmedifferenz weit schneller durch Atombewegung als durch innere Strahlung sich ausgleicht.

Die oben abgeleitete, von Weber empirisch für durchsichtige Flüssigkeiten von gewöhnlicher Temperatur aufgestellte Formel betreffend, erlaube ich mir noch die folgende Bemerkung beizufügen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Die Schlüsse, welche sich aus dieser Gleichung ergeben, sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Ihr gemäss erklärt sich auf einfache Weise auch die Mitbewegung des Lichtes in einem bewegten durchsichtigen Mittel.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Wiedemann's Annalen, Bd. 34, S. 469.

Das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten scheint im Allgemeinen durch ihre Erstarrung sich nur wenig zu ändern. Wenn dem wirklich so ist, dann wird die genannte Formel mit einiger Annäherung auch für nichtmetallische feste Körper gelten, und es dürfte bei solchen, weil hier Strömungen absolut ausgeschlossen sind, die diesfalls noch offene Frage nach dem Einflusse der Temperatur auf das Wärmeleitungsvermögen, welcher nach Weber bei Flüssigkeiten auffallend gross wäre, am sichersten eine definitive Lösung finden. Da übrigens dieses Vermögen, es mag wie immer bedingt sein, durch Abnahme der Temperatur selbstverständlich in keinem Falle Null werden kann, so ist, wie ich glaube, eine erheblich starke Veränderlichkeit desselben mit der Temperatur bei nichtmetallischen festen Körpern und bei den entsprechenden Flüssigkeiten, wenn sie von ihrem Erstarrungspunkte nicht allzu weit entfernt sind, von vornherein unwahrscheinlich.

## Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante

von

#### F. Mertens,

w. M. k. Akad.

In dem Folgenden soll ein einfacher Beweis für den Hauptsatz der Lehre von den reducirten binären quadratischen Formen positiver Determinante — dass zwei reducirte Formen nur dann äquivalent sein können, wenn sie derselben Periode angehören — gegeben werden. Dieser Satz wird in den Disquisitiones arithmeticae von Gauss etwas umständlich bewiesen, so dass Dirichlet sich veranlasst sah, einen einfacheren Beweis zu suchen.

1.

Man kann eine reducirte Form von positiver nicht quadratischer Determinante D folgendermassen definiren. Bezeichnet d die grösste in  $\sqrt{D}$  enthaltene ganze Zahl und  $\bar{a}$  den Zahlenwerth von a, so wird die Form (a, b, c) reducirt genannt, wenn

$$0 \le d - b < \bar{a} \le d + b$$

ist.

Die äusseren Coëfficienten a, c einer reducirten Form (a, b, c) haben der Gleichung

$$a \cdot c = b^2 - D$$

zufolge immer entgegengesetzte Vorzeichen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Art. 193.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Vereinfachung der Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante (Berliner Akad. 1854).

Wenn (a, b, c) eine reducirte Form ist, so ist (c, b, a) ebenfalls eine solche. Denn man hat

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = D - b^2$$

und daher einerseits

$$\bar{a}.\bar{c} < (d+1)^2 - b^2 = (d-b+1)(d+b+1);$$

da aber  $d-b < \bar{a}$  ist, so folgt

$$d-b+1 \leq \bar{a}$$
$$\bar{a} \cdot \bar{c} < \bar{a}(d+b+1),$$

also

$$\bar{c} < d+b+1$$
 $\leq d+b$ .

Anderseits ist

$$\bar{a}\bar{c} > d^2 - b^2 = (d - b)(d + b);$$

da aber  $d+b \ge \bar{a}$  ist, so folgt

$$\vec{a} \cdot \hat{c} > (d-b)\vec{a}$$

also

$$\bar{c} > d - b$$
.

Es ist demnach

$$0 \le d - b < \bar{c} \le d + b$$
.

2.

Jede reducirte Form (a, b, c) besitzt eine und nur eine nach rechts benachbarte reducirte Form und ebenso eine einzige nach links benachbarte reducirte Form.

Soll nämlich (a', b', c') eine nach rechts benachbarte Form von (a, b, c) sein, so muss

$$a' \equiv c$$
  $b' + b \equiv 0 \pmod{c}$ 

sein. Soll überdies (a', b', c') reducirt sein, so muss

$$0 \le d - b' < \tilde{c}$$

sein. Da aber

$$l-b'=d+b \pmod{c}$$

ist, so muss d-b' der echte, d. h. nicht negative und den Zahlenwerth des Moduls nicht erreichende Rest von d+b in Bezug auf c sein. Diese Bedingung genügt aber auch, da die Form  $\left(c, b', \frac{b'^2-D}{c}\right)$  dann eine reducirte ist. Denn man hat zunächst

$$0 \le d - b' < \tilde{c}$$
.

Da ferner  $\bar{c} \leq d+b$  ist, so folgt

$$d+b-(d-b') = b+b' > 0$$

und b+b' muss als Vielfaches von c wenigstens  $= \bar{c}$  sein. Man hat also

$$\bar{c} \leq b + b' \leq d + b'$$
.

Da jede nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten in eine nach rechts benachbarte reducirte Form von (c, b, a) übergeht, so gibt es also auch nur eine nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) und dieselbe geht aus der nach rechts benachbarten reducirten Form von (c, b, a) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten hervor.

Geht man von irgend einer reducirten Form f aus, bestimmt ihre nach rechts benachbarte reducirte Form  $f_1$ , hierauf wieder die nach rechts benachbarte reducirte Form  $f_2$  von  $f_1$ , dann die nach rechts benachbarte reducirte Form  $f_3$  von  $f_2$  und fährt so fort, so ergibt sich eine beliebig weit fortsetzbare Reihe von Formen

$$f, f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

welche die Formenreihe der Form f genannt wird. Setzt man diese Reihe so weit fort, dass die Anzahl ihrer Glieder die Anzahl aller reducirten Formen übersteigt, so muss sich wenigstens eine Form wiederholt haben. Die erste sich wiederholende Form  $f_n$  kann nur f sein, da sich sonst  $f_{n-1}$  als nach links benachbarte reducirte Form von  $f_n$  auch schon wiederholt haben müsste. Von  $f_n$  an wiederholen sich dann alle Formen in derselben Reihenfolge, so dass allgemein  $f_k \equiv f_n$  ist, wenn  $g \equiv v \pmod{n}$ . Man nennt den Inbegriff der Formen

$$f, f_1, f_2, \dots f_{n-1},$$

welche alle unter einander verschieden sind, eine Periode, und zwar die Periode der Form f. Die Anzahl der Formen einer Periode ist immer gerade, da die ersten Coëfficienten der Formen f,  $f_1$ ,  $f_2$ ,... abwechselnde Vorzeichen haben. Jede der Formen f,  $f_1$ ,  $f_2$ ,... hat dieselbe Periode, wenn man von der Reihenfolge absieht.

Alle reducirten Formen einer positiven Determinante bilden eine oder mehrere getrennte Perioden.

Man gehe von irgend einer reducirten Form aus und stelle ihre Periode P auf. Umfasst dieselbe noch nicht alle reducirten Formen, so stelle man wieder die Periode Q irgend einer nicht in P enthaltenen reducirten Form auf. Die Perioden P, Q haben dann keine Form gemein und können entweder alle reducirten Formen umfassen oder nicht. Im zweiten Falle würde man eine dritte Periode aufstellen und so fortfahren, bis alle reducirten Formen erschöpft sind.

3.

Alle Formen einer Periode sind untereinander äquivalent, da je zwei benachbarte reducirte Formen es sind.

Umgekehrt gehören zwei äquivalente reducirte Formen immer derselben Periode an.

Der Beweis dieses Satzes soll hier mittelst folgender Hilfssätze geführt werden.

I. Wenn zwei Formen (a, b, -c) und (a', b', -c') mit positiven ersten und negativen dritten Coëfficienten äquivalent sind und die erste durch die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

in die zweite übergeht, so ist das Product ad immer positiv.

Multiplicirt man die zweite und dritte Transformationsgleichung

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - c\gamma\delta$$
$$-c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta - c\delta^2$$

beziehungsweise mit  $\beta$ ,  $-\alpha$  und addirt, so ergibt sich der Gleichung

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

zufolge

$$b'\beta + c'\alpha = c\delta - b\beta. \tag{1}$$

Anderseits lässt sich die dritte Transformationsgleichung in der Gestalt

$$2(c\delta - b\beta)\delta = c' + a\beta^2 + c\delta^2 \tag{2}$$

schreiben. Da aber auch (a', b', -c') durch die reciproke Substitution

$$x' = \delta x - \beta y, \qquad y' = -\gamma x + \alpha y$$

in (a, b, -c) übergeht, so lässt sich der auf diese Substitution sich beziehenden dritten Transformationsgleichung

$$-c = a'\beta^2 - 2b'\beta\alpha - c'\alpha^2$$

in ähnlicher Weise die Gestalt

$$2(c'\alpha + b'\beta)\alpha = c + a'\beta^2 + c'\alpha^2$$
 (3)

geben.

Durch Multiplication der Gleichungen (2), (3) ergibt sich

$$4(c\delta-b\beta)(b'\beta+c'\alpha)\alpha\delta=(c'+a\beta^2+c\delta^2)(c+a'\beta^2+c'\alpha^2)$$

und es wird nach (1)

$$4(c\delta-b\beta)^2\alpha\delta = (c'+a\beta^2+c\delta^2)(c+a'\beta^2+c'\alpha^2)$$
  
> 0.

Hieraus folgt aber

$$\alpha\delta > 0$$
.

II. Es sei

$$f_0 = (a_0, b_0, -a_1)$$

eine reducirte Form mit positivem ersten Coëfficienten,

$$f_{i-1} = ((-1)^{i-1}a_{i-1}, b_{i-1}, (-1)^{i}a_{i})$$

die  $i^{\text{te}}$  Form in der Formenreihe von  $f_0$ ,  $h_i$  die ganze positive Zahl

$$h_i = \frac{b_i + b_{i+1}}{a_{i+1}}$$

und  $A_i$ ,  $B_i$  Zähler und Nenner des  $i^{ten}$  Näherungswerthes des regelmässigen Kettenbruches

$$(h_0, h_1, h_2, \ldots).$$

Bezeichnet man die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
  $y = \gamma x' + \delta y'$ 

ohne Rücksicht auf die Unbestimmten x, y, x', y' mit  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$  und setzt zur Abkürzung

$$S_m = ((-1)^m B_{m-1}, B_m; (-1)^m A_{m-1}, A_m),$$

so haben die Substitutionen

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$$

folgende Eigenschaften.

Die Substitution  $S_m$  verwandelt  $f_0$  in  $f_m$  und hat die Determinante 1.

Jede Substitution

$$\mathfrak{S}=(\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta)$$

von der Determinante 1, welche keinen negativen Coëfficienten enthält und  $f_0$  in eine reducirte Form

$$F = (A, B, -A')$$

mit positivem ersten Coëfficienten verwandelt, muss mit einer der Substitutionen  $S_0$ ,  $S_2$ ,  $S_4$ ,... von geradem Stellenzeiger zusammenfallen.

Wird in üblicher Weise

$$A_{-1} = 0,$$
  $B_{-1} = 1,$   $A_0 = 1,$   $B_0 = 0$ 

gesetzt, so verwandelt die Substitution

$$S_0 = (1, 0; 0, 1)$$

in der That  $f_0$  in  $f_0$ . Es genügt daher noch darzuthun, dass  $S_{m+1}$  die Form  $f_0$  in  $f_{m+1}$  verwandelt, wenn  $S_m$  dieselbe in  $f_m$  überführt.

Da  $f_m$  in  $f_{m+1}$  durch die Substitution

$$(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m)$$

übergeht, so verwandelt die zusammengesetzte Substitution

$$S_m(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m) =$$

$$= ((-1)^{m+1}B_m, B_{m-1} + h_m B_m; (-1)^{m+1}A_m, A_{m-1} + h_m A_m)$$

 $f_0$  in  $f_{m+1}$ ; diese zusammengesetzte Substitution fällt aber den Gleichungen

$$A_{m+1} = h_m A_m + A_{m-1}$$
  
 $B_{m+1} = h_m B_m + B_{m-1}$ 

zufolge mit  $S_{m+1}$  zusammen.

Hieraus folgt zugleich, dass die Determinante von  $S_{m+1}$  mit der von  $S_m$  und daher die Determinanten aller Substitutionen  $S_1, S_2, S_3, \ldots$  mit der von  $S_0$  zusammenfallen, welche = 1 ist.

Versteht man unter  $S_m^{-1}$  die reciproke Substitution von  $S_m$ und setzt

$$S_m^{-1} \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_m$$
  
 $\mathfrak{S}_{2m} = (\mathfrak{a}_m, \, \beta_m; \, \gamma_m, \, \delta_m),$ 

so verwandelt  $\mathfrak{S}_m$  die Form  $f_m$  in F und es wird

$$\mathfrak{S}_{2m-1} = (-\gamma_m, -\delta_m; \alpha_{m-1}, \beta_{m-1})$$

$$\gamma_m = \gamma B_{2m-1} - \alpha A_{2m-1} \tag{4}$$

$$\alpha = \alpha A_2 - \alpha B_2 \tag{5}$$

$$\alpha_m = \alpha A_{2m} - \gamma B_{2m}. \tag{5}$$

Da  $\mathfrak{S}_{2m}$  die Form  $f_{2m}$  in F verwandelt und die ersten Coëfficienten dieser Formen positiv, die dritten negativ sind, so ist  $a_m \delta_m$  nach I positiv. Aus demselben Grunde ist  $a_m \delta_{m+1}$  positiv, weil  $\mathfrak{S}_{2m+1}$  die Form

$$f_{2m+1} = (-a_{2m+1}, b_{2m+1}, a_{2m+2})$$

in F, also die Substitution

$$(0, 1; -1, 0) \mathfrak{S}_{2m+1} = (\alpha_m, \beta_m; \gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$$

die Form  $(a_{2m+2}, -b_{2m+1}, -a_{2m+1})$  in F verwandelt. Die Zahlen

$$\alpha_0$$
,  $\delta_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\delta_2$ ,...

sind also alle von Null verschieden und besitzen dasselbe Vorzeichen, und zwar das positive, weil  $\alpha_0 = \alpha$  positiv ist.

Hieraus folgt, dass die Differenz  $\gamma_m - \gamma_{m+1}$ , welche nach (4), (5) die Gestalt

$$(A_{2m+1}-A_{2m-1})\alpha-(B_{2m+1}-B_{2m-1})\gamma =$$
  
=  $h_{2m}(A_{2m}\alpha-B_{2m}\gamma) = h_{2m}\alpha_m$ 

annimmt, positiv ist. Man hat also

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots$$

Da überdies  $\gamma_0 = \gamma$  nach der Annahme nicht negativ ist, so gibt es in der Zahlenreihe

eine letzte nicht negative Zahl γ.

Das Product  $\gamma_{\lambda+1}\beta_{\lambda}\gamma_{\lambda}$  ist dann sowohl in der Gestalt  $\gamma_{\lambda+1}(\alpha_{\lambda}\delta_{\lambda}-1)$ , als auch in der Gestalt  $\gamma_{\lambda}(\alpha_{\lambda}\delta_{\lambda+1}-1)$  darstellbar und kann daher weder positiv noch negativ sein, weil einerseits  $\gamma_{\lambda+1}$  negativ und  $\alpha_{\lambda}\delta_{\lambda}-1$  nicht negativ, und anderseits weder  $\gamma_{\lambda}$  noch  $\alpha_{\lambda}\delta_{\lambda+1}-1$  negativ ist. Es muss also  $\gamma_{\lambda+1}\beta_{\lambda}\gamma_{\lambda}$  und daher auch  $\beta_{\lambda}\gamma_{\lambda}=0$  sein.

Dann muss aber

$$\beta_{\lambda} = \gamma_{\lambda} = 0, \qquad \alpha_{\lambda} = \delta_{\lambda} = 1$$

sein. Denn es ist  $\alpha_{\lambda} \delta_{\lambda} = 1$ , also  $\alpha_{\lambda} = \delta_{\lambda} = 1$  und die zweite Transformationsgleichung, welche sich auf die Umwandlung von  $f_{2\lambda}$  durch  $\mathfrak{S}_{2\lambda}$  in F bezieht, lautet:

$$B = a_{2\lambda}a_{\lambda}\beta_{\lambda} + b_{2\lambda}(a_{\lambda}\delta_{\lambda} + \beta_{\lambda}\gamma_{\lambda}) - a_{2\lambda+1}\gamma_{\lambda}\delta_{\lambda}$$
  
=  $a_{2\lambda}\beta_{\lambda} + b_{2\lambda} - a_{2\lambda+1}\gamma_{\lambda}$ ,

oder

$$d-b_{2\lambda}-(d-B)=a_{2\lambda}\beta_{\lambda}-a_{2\lambda+1}\gamma_{\lambda}$$
.

Da nun  $\beta_{\lambda}\gamma_{\lambda}=0$  ist, so muss entweder  $\beta_{\lambda}=0$  oder  $\gamma_{\lambda}=0$  sein. Ist  $\beta_{\lambda}=0$ , so wird

$$A' = a_{2\lambda+1},$$

$$d-b_{2\lambda}-(d-B) = -a_{2\lambda+1}\gamma_{\lambda};$$

weil aber die Zahlen  $d-b_{2\lambda}$ , d-B beide nicht negativ und kleiner als  $a_{2\lambda+1}$  oder A' sind, so kann ihre Differenz nur durch  $a_{2\lambda+1}$  theilbar sein, wenn sie = 0 ist, und es muss also  $\gamma_{\lambda} = 0$  sein. Ist  $\gamma_{\lambda} = 0$ , so folgt ähnlich

$$A = a_{2\lambda}$$

$$d - b_{2\lambda} - (d - B) = a_{2\lambda} \beta_{\lambda} = 0,$$

weil die Zahlen  $d-b_{2\lambda}$ , d-B beide nicht negativ und kleiner als  $a_{2\lambda}$  oder A sind und ihre Differenz durch A theilbar ist, und es muss  $\beta_{\lambda} = 0$  sein.

Wenn aber die Substitution  $\mathfrak{S}_{2\lambda} = S_{2\lambda}^{-1}\mathfrak{S}$  mit (1,0;0,1) zusammenfällt, so ist

$$\mathfrak{S} = S_{\mathbf{2}\lambda}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$F = f_{2\lambda}$$

und die Form F ist also eine der Formen der Periode von  $f_0$ .

Insbesondere sind alle Substitutionen  $\mathfrak{S}$ , welche keinen negativen Coëfficienten enthalten und eine reducirte Form  $f_0$  mit positivem ersten Coëfficienten in sich selbst verwandeln, durch die Formel

$$\mathfrak{S} = S_{kn} = (B_{kn-1}, B_{kn}; A_{kn-1}, A_{kn})$$

gegeben, wo n die Anzahl der Formen der Periode von  $f_0$  bezeichnet und k alle Werthe  $0, 1, 2, 3, \ldots$  annehmen kann. Denn eine solche Substitution verwandelt  $f_0$  in eine reducirte Form  $f_0$  mit positivem ersten Coëfficienten und es muss daher  $\mathfrak{S} = S_{2\lambda}$  sein. Ist aber  $\rho$  der echte Rest von  $2\lambda$  in Bezug auf den Modul n, so verwandelt  $S_{2\lambda}$  die Form  $f_0$  in  $f_{2\lambda} = f_{\rho}$  und es muss also  $\rho = 0, 2\lambda = kn$  sein.

Dies vorausgeschickt, seien irgend zwei äquivalente reducirte Formen f und F gegeben und es gehe f in F durch die Substitution  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$  über. Um darzuthun, dass diese Formen derselben Periode angehören, darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass dieselben positive erste Coëfficienten besitzen, da man andernfalls, ohne an dem Inhalte des zu beweisenden Satzes etwas zu ändern, f oder F, oder f und F

durch ihre benachbarten reducirten Formen ersetzen könnte. Das Product  $\alpha\delta$  ist dann positiv und man darf  $\alpha$ ,  $\delta$  positiv annehmen, da im Falle eines negativen  $\alpha$  und  $\delta$  die Substitution  $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$  ebenfalls f in F verwandelt.

Ist nun keine der Zahlen  $\beta$ ,  $\gamma$  negativ, so enthält die Substitution  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$  keinen negativen Coëfficienten und es muss daher F nach II mit einer Form der Periode von f zusammenfallen.

Ist dagegen eine der Zahlen  $\beta$ ,  $\gamma$  negativ, so kann die andere, der Gleichung  $\beta\gamma = \alpha\delta - 1$  zufolge, nicht positiv sein und die reciproke Substitution  $(\delta, -\beta; -\gamma, \alpha)$  enthält keinen negativen Coëfficienten. Da dieselbe F in f verwandelt, so muss f nach II in der Periode von F vorkommen.

von

F. Mertens, w. M. k. Akad.

1.

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl, a eine nicht durch p theilbare Zahl und  $\mu$  die Anzahl derjenigen echten, d. h. nicht negativen und p nicht erreichenden Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \ldots \frac{p-1}{2}a$$

in Bezug auf den Modul p, welche  $> \frac{1}{2}p$  sind, so besteht der Hilfssatz, welchen Gauss<sup>1</sup> zum Beweise des quadratischen Reciprocitätssatzes aufgestellt hat, bekanntlich in der Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

Ein Hilfssatz von gleicher Verwendbarkeit ist der folgende. Sind

$$r_a, r_{2a}, r_{3a}, \ldots r_{(p-1)a}$$

die echten Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \dots (p-1)a$$

in Bezug auf den Modul p und  $\Pi(x_1, x_2, \dots x_{p-1})$  das Differenzenproduct

<sup>1</sup> Theorematis arithmetici demonstratio nova 1808.

$$(x_{2}-x_{1})(x_{3}-x_{1})\dots(x_{p-1}-x_{1})$$

$$(x_{3}-x_{2})\dots(x_{p-1}-x_{2})$$

$$\vdots$$

$$(x_{p-1}-x_{p-2})$$

so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \frac{\prod (r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a})}{\prod (1, 2, \dots p-1)}.$$
 (1)

Um diesen Satz zu beweisen, ist zunächst zu bemerken, dass die Zahlen  $r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a}$  bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen  $1, 2, \dots p-1$  zusammenfallen und die Producte

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a}), \quad \Pi(1, 2, \dots p-1)$$

demzufolge sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden können. Es ist also

$$\frac{\Pi(r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a})}{\Pi(1, 2, \dots p-1)} = \varepsilon, \qquad (2)$$

wo s den Werth +1 oder -1 hat.

Anderseits ist den Congruenzen

$$r_a \equiv a$$
 $r_{2a} \equiv 2 a$ 
 $\dots$ 
 $r_{(p-1)a} \equiv (p-1)a$  (mod.  $p$ )

zufolge

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \ldots r_{(n-1)a}) \equiv \Pi(a, 2a, \ldots (p-1)a) \quad (\text{mod. } p);$$

es ist aber

$$\Pi(a, 2a, \dots (p-1)a) = a^{\frac{1}{2}p(p-1)}\Pi(1, 2, \dots p-1)$$

$$a^{p} \equiv a \pmod{p}$$

also

$$a^{\frac{1}{2}p(p-1)} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$$

und

$$\Pi(a, 2a, \ldots (p-1)a) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \Pi(1, 2, \ldots p-1) \quad (\text{mod. } p).$$

Man hat demnach

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a}) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \Pi(1, 2, \dots p-1)$$
 (mod.  $p$ ).

Nach (2) folgt hieraus

$$\Pi(1,2,\ldots p-1)\left(\varepsilon-\left(\frac{a}{p}\right)\right)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Da aber  $\Pi(1, 2, ..., p-1)$  nicht durch p theilbar ist, so muss

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

und daher

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) = 0$$

sein, weil  $\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right)$  ohne Rücksicht auf das Vorzeichen < p ist.

Man kann die Gleichung (1) auch so aussprechen:

Ist  $\nu$  die Anzahl der negativen Factoren des Productes  $\Pi(r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a})$ , so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\nu}$$

Die Substitution (Permutation)  $\binom{r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a}}{1, 2, \dots p-1}$  ist positiv oder negativ, je nachdem  $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$  oder = 1 ist.

2.

Bezeichnet a eine positive Zahl und E(y) die grösste in y enthaltene ganze Zahl, so ist

$$r_{ma} = ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right)$$

Ist daher m > n, so wird

$$r_{ma} \equiv ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right)$$

$$r_{na} = na - pE\left(\frac{na}{p}\right)$$

$$r_{(m-n)a} = (m-n)a - pE\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

und man hat

$$r_{ma}-r_{na}=r_{(m-n)a}-p\left(E\left(\frac{ma}{p}\right)-E\left(\frac{na}{p}\right)-E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)\right)$$

Hienach hat der Ausdruck

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

den Werth 0 oder 1, je nachdem die Differenz  $r_{ma}-r_{na}$  positiv oder negativ ist, und die Anzahl v aller negativen Factoren des Productes  $\Pi(r_a, r_{2a}, \dots r_{(p-1)a})$  ist die Summe der Ausdrücke

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right),\tag{3}$$

welche allen Zahlenpaaren m, n entsprechen, die sich aus den Zahlen  $1, 2, \dots p-1$  bilden lassen und in denen m > n ist.

Da die Zahl  $E\left(\frac{ma}{p}\right)$  die Grenze a-1 nicht überschreitet, wenn m < p ist, so kann dieselbe in bekannter Weise als Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$(p-ma)(2p-ma)\dots((a-1)p-ma) = \Pi(sp-ma)$$

aufgefasst werden, wo s von 1 bis a-1 läuft. Ähnliches gilt von  $E\left(\frac{na}{p}\right)$  und  $E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$ . Der Ausdruck (3) ist demnach bis auf ein Vielfaches von 2 die Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp-ma).\Pi(sp-na).\Pi(sp-(m-n)a)$$

und v fällt demzufolge bis auf ein Vielfaches von 2 mit der Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp-2a)^{1} \cdot \Pi(sp-3a)^{2} \cdot ... \Pi(sp-(p-1)a)^{p-2} \times \Pi(sp-a)^{2(p-2)} \cdot \Pi(sp-2a)^{2(p-3)} \cdot ... \Pi(sp-(p-2)a)^{2}$$

zusammen.

Das Vorzeichen des Legendre'schen Symbols  $\left(\frac{a}{p}\right)$  stimmt also mit dem Vorzeichen des Productes

$$\Pi(sp-2a).\Pi(sp-4a)...\Pi(sp-(p-1)a)$$

oder des Productes

$$\Pi(sp-2ta)$$

überein, in welchem s von 1 bis a-1 und t von 1 bis  $\frac{p-1}{2}$  laufen.

Setzt man a=2, so fällt das Vorzeichen von  $\left(\frac{2}{p}\right)$  mit dem des Productes

$$(p-4)(p-8)\dots\left(p-4\cdot\frac{p-1}{2}\right)$$

zusammen. Dieses Product hat  $\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right)$  negative Factoren. Da aber

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p - (-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}$$

$$1 \equiv \frac{p + (-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2} \qquad (\text{mod. 2})$$

ist, so ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) \equiv \frac{1}{8} (p^2 - 1)$$
 (mod. 2)

und es wird

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Ist q eine von p verschiedene ungerade Primzahl und trennt man die Factoren des Productes  $\Pi(sp-2tq)$ , in welchen s gerade ist, von denen, in welchen s ungerade ist, indem man, einmal s=2u, einmal s=q-2u, setzt, so ergibt sich

$$\Pi(sp-2tq) = \Pi(2up-2tq) \cdot \Pi(pq-2up-2tq),$$

wo t die Werthe  $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$  und u die Werthe  $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(q-1)$  durchläuft, und das Vorzeichen von  $\left(\frac{q}{p}\right)$  fällt mit dem des Productes

$$\Pi(2up-2tq).\Pi(pq-2up-2tq)$$

zusammen.

Vertauscht man p mit q, so stimmt das Vorzeichen von  $\left(\frac{p}{q}\right)$  mit dem des Productes

$$\Pi(2tq-2up).\Pi(pq-2tq-2up)$$

überein, in welchem t und u dieselben Werthe durchlaufen, Das Product  $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$  hat daher das Vorzeichen des Productes

$$\Pi(2np-2tq).\Pi(2tq-2np).\Pi(pq-2tq-2np)^2$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \cdot \Pi(2up-2tq)^{2} \Pi(pq-2tq-2up)^{2},$$

und es wird

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{q-1}{2}.$$

3.

Es seien x, z Veränderliche und man setze

$$(z-x)(z-x^{2})\dots(z-x^{p-1})-(1+z+z^{2}+\dots+z^{p-1})=F(x)$$

$$1+x+x^{2}+\dots+x^{p-1}=X.$$

Wird der Rest, welcher bei der Division einer ganzen Function  $\varphi$  von x durch eine andere, f, bleibt und den Grad von f in x nicht erreicht, als echter Rest von  $\varphi$  in Bezug auf f

und eine durch f theilbare ganze Function von x kurz mit [f) bezeichnet, so ist der echte Rest von F(x) in Bezug auf X bekanntlich = 0.

Ist nämlich m eine der Zahlen  $1, 2, \dots p-1$ , so stimmen die echten Reste

$$\alpha, \beta, \ldots \epsilon$$

der Zahlen

$$m, 2m, \ldots (p-1)m$$

bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen 1,  $2, \dots p-1$  überein und es ist

$$x^{m} = x^{\alpha} + [x^{p} - 1)$$

$$x^{2m} = x^{\beta} + [x^{p} - 1)$$

$$\vdots$$

$$x^{(p-1)m} = x^{\alpha} + [x^{p-1} - 1).$$
(4)

Hieraus folgt

$$F(x^m) = F(x) + [x^p - 1) \tag{5}$$

Ist nun

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}$$

der echte Rest von F(x) in Bezug auf  $x^p-1$ , so hat man

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + [x^p - 1]$$
 (6)

und daher

$$F(x^m) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots + a_{p-1} x^{(p-1)m} + \lceil x^{mp} - 1 \rceil.$$

Nach (4), (5) ist also auch

$$F(x) = a_0 + a_1 x^{\alpha} + a_2 x^{\beta} + \dots + a_n x^n + [x^p - 1]. \tag{7}$$

Zieht man die Identität (7) von (6) ab, so ergibt sich

$$(a_{\alpha}-a_{1})x^{\alpha}+(a_{3}-a_{2})x^{\beta}+\ldots+(a_{n}-a_{n-1})x^{n}=[x^{n}-1)$$

und hieraus

$$a_{\alpha}-a_1=a_{\beta}-a_2=\ldots=a_{\epsilon}-a_{p-1}=0.$$

Insbesondere ist also für jedes m

$$a_n = a_m = a_1$$

und demzufolge

$$F(x) = a_0 + a_1(x + x^2 + \dots + x^{p-1}) + [x^p - 1]$$
  
=  $a_0 - a_1 + [X]$ .

Da  $a_0$ — $a_1$  eine ganze Function von z ist, welche den Grad p-1 nicht erreicht, so kann man

$$a_0 - a_1 = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{p-2} z^{p-2}$$

setzen und erhält für z = x

$$-X = b_0 + b_1 x + \dots + b_{p-2} x^{p-2} + [X]$$

oder

$$b_0+b_1x+\ldots+b_{p-2}x^{p-2}=[X).$$

Hieraus folgt aber

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{p-2} = 0$$

und

$$F(x) = [X).$$

Für z = 1 wird insbesondere

$$p = (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{p-1})+[X).$$
 (8)

4.

Es sei

$$f(x) = \Pi(x, x^{2}, \dots x^{p-1})$$

$$= (x^{2} - x)(x^{3} - x) \dots (x^{p-1} - x)$$

$$(x^{3} - x^{2}) \dots (x^{p-1} - x^{2})$$

$$\vdots$$

$$(x^{p-1} - x^{p-2})$$

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)=P_m$$

Da

$$x^a - x^b = -x^b (1 - x^{a-b})$$

und

$$p-2+2(p-3)+3(p-4)+...+(p-2)1=\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)$$
 ist, so ergibt sich

$$f(x) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-2)(p-1)} x^{\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)} P_1 P_2 \dots P_{p-2}.$$

Da ferner

$$P_{m} = (-x)(1-x^{p-1})(-x^{2})(1-x^{p-2})\dots(-x^{m})(1-x^{p-m})+[X]$$

$$= (-1)^{m}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}(1-x^{p-1})(1-x^{p-2})\dots(1-x^{p-m})+[X]$$

ist, so wird nach (8)

$$P_{m}P_{p-1-m} = (-1)^{m} x^{\frac{1}{2}m(m+1)} P_{p-1} + [X]$$

$$= (-1)^{m} p x^{\frac{1}{2}m(m+1)} + [X]$$
(9)

und man hat

$$\begin{split} P_1 P_2 \dots P_{p-2} &= P_1 P_{p-2} \cdot P_2 P_{p-3} \dots P_{\frac{p-3}{2}} P_{\frac{p+1}{2}} \cdot P_{\frac{p-1}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} p^{\frac{p-3}{2}} x^{\frac{1}{48}(p^2-1)(p-3)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X). \end{split}$$

Überdies ist

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2) + \frac{1}{8}(p-1)(p-3) \equiv \frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{8}(p-1)(p-3) \pmod{2}$$

$$= \frac{1}{8}(p^2-1) \pmod{2}$$

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2) + \frac{1}{48}(p^2-1)(p-3) = \frac{(p-1)(p^2-1)}{16} + \frac{(p-1)(p-3)}{8} \cdot p$$

$$= \frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{8}(p^2-1) \pmod{p}.$$

Es wird also

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} x^{\frac{1}{2}(p-1)\cdot \frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X].$$
 (10)

Aus (9) folgt dann

$$f(x)^{2} = p^{p-3}x^{(p-1)\cdot\frac{1}{8}(p^{2}-1)}P^{2}_{\frac{p-1}{2}} + [X)$$

$$= (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}p^{p-2} + [X).$$
(11)

Ferner ist, wenn m eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet,

$$f(x^m) = \prod (x^m, x^{2m}, \dots x^{p-1)m})$$
  
=  $\prod (x^2, x^2, \dots x^e) + \lceil X \rceil$ ,

wo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,...s die echten Reste von m, 2m,...(p-1)m in Bezug auf p bedeuten.

Es ist aber nach 1

$$\Pi(x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots x^{a}) = \left(\frac{m}{p}\right) \Pi(x, x^{2}, \ldots x^{p-1})$$

und sonach

$$f(x^m) = \left(\frac{m}{p}\right) f(x) + [X). \tag{12}$$

5.

Mit Hilfe der Function f(x) lässt sich der quadratische Reciprocitätssatz ähnlich wie bei Gauss beweisen.

Man hat

$$f(x)^q - f(x^q) = qG,$$

wo G in x ganz und ganzzahlig ist. Nach (12) folgt hieraus

$$f(x)^q - \left(\frac{q}{p}\right)f(x) = qG + [X].$$

Wird mit  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} f(x)$  multiplicit, so ergibt sich

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} f^{2}(x) \left( f(x)^{2 \cdot \frac{q-1}{2}} - \left( \frac{q}{p} \right) \right) = \pm q f G + [X],$$

welche Identität nach (11) die Form

$$p^{p-2}\Big((-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{1}{2}(q-1)(p-2)}-\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big)=\pm qfG+[X)$$

annimmt. Da hienach der echte Rest der Zahl

$$p^{p-2}\left((-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{1}{2}(q-1)+p-2)}-\left(\frac{q}{p}\right)\right)$$

in Bezug auf X durch q theilbar ist, so gilt dasselbe von dieser Zahl selbst. Dann ist aber auch

$$(-1)^{\frac{r-1}{2} \frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2} (q-1)(r-2)} - \left(\frac{q}{p}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q).$$

Da ferner

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{q},$$

also

$$p^{\frac{1}{2}\frac{(q-1)(p-2)}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{p-2} - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{q}$$

ist, so wird

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} - \frac{q-1}{2}} \left( \frac{p}{q} \right) - \left( \frac{q}{p} \right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q)$$

und daher auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left( \frac{p}{q} \right) - \left( \frac{q}{p} \right) = 0.$$

6.

Man kann aber auch die Summen von Gauss mit Hilfe der Function f(x) ermitteln.

Ist

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

der echte Rest der Function

$$x^{\frac{1}{2}(p+1)\frac{1}{8}(p^2-1)}P_{\frac{p-1}{2}}$$

in Bezug auf X, so wird

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = (b_1 + b_0) x \div (b_2 - b_0) x^2 + \ldots + b_0 X$$
  
Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl.; CHI. Bd., Abth. II. a. 68

und f(x) nimmt nach (10) die Gestalt

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{p-1} x^{p-1}) + [X]$$

an. Ersetzt man x durch  $x^m$ , wo m eine der Zahlen  $1, 2, \dots p-1$  ist, und bezeichnet die echten Reste der Zahlen

$$m, 2m, \ldots (p-1)m$$

in Bezug auf den Modul p mit

$$\alpha, \beta, \ldots \varepsilon,$$

so ergibt sich

$$1 + x^{m} + x^{2m} + \dots + x^{(p-1)m} = 1 + x^{\alpha} + x^{\beta} + \dots + x^{s} + [X]$$
$$= [X]$$

$$c_1 x^m + c_2 x^{2m} + \dots + c_{p-1} x^{(p-1)m} = c_1 x^{\alpha} + c_2 x^{\beta} + \dots + c_{p-1} x^{s} + [X]$$

und demzufolge

$$f(x^m) = (-1)^{\frac{p^2+1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x^{\alpha} + c_2 x^3 + \dots + c_{p-1} x^p) + [X].$$

Zieht man von dieser Identität die Identität

$$\left(\frac{m}{p}\right)f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left(\left(\frac{m}{p}\right)c_{\alpha}x^{\alpha} + \left(\frac{m}{p}\right)c_{\beta}x^{\beta} + \ldots\right) + \lfloor X\rfloor$$

ab, so ergibt sich nach (12)

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left( \left( c_1 - \left( \frac{m}{p} \right) c_{\alpha} \right) x^{\alpha} + \left( c_2 - \left( \frac{m}{p} \right) c_{\beta} \right) x^{\beta} + \ldots \right) = [X]$$

$$= [X].$$

Es ist also auch

$$\left(c_1-\left(\frac{m}{p}\right)c_{\alpha}\right)x^{\alpha-1}+\left(c_2-\left(\frac{m}{p}\right)c_{\beta}\right)x^{\beta-1}+\ldots=[X].$$

Hieraus folgt aber

$$c_1 - \left(\frac{m}{p}\right)c_{\alpha} = c_2 - \left(\frac{m}{p}\right)c_{\beta} = \ldots = 0,$$

Insbesondere ist

$$\left(\frac{m}{p}\right)c_{\alpha}=\left(\frac{m}{p}\right)c_{m}=c_{1}$$

oder für jedes m

$$c_m = \left(\frac{m}{p}\right)c_1.$$

Setzt man also

$$\left(\frac{1}{p}\right)x+\left(\frac{2}{p}\right)x^2+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)x^{p-1}=\omega(x),$$

so wird

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2 - 1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} c_1 \omega(x) + [X]. \tag{13}$$

Um  $c_1$  zu bestimmen, entwickele man  $\omega(x)$  nach Potenzen von x-1. Man hat

$$\omega(x) = \omega(1) + \frac{\omega'(1)}{1!}(x-1) + \frac{\omega''(1)}{2!}(x-1)^{2} + \dots + \frac{\omega^{(p-1)}(1)}{(p-1)!}(x-1)^{p-1}.$$

Nun ist, wenn m von 1 bis p-1 läuft,

$$\omega(x) \equiv \sum_{m} \frac{p-1}{2} x^{m} \qquad (\text{mod. } p)$$

also

$$\omega'(x) = \sum m^{\frac{p-1}{2}} m x^{m-1}$$

$$\omega''(x) = \sum m^{\frac{p-1}{2}} m (m-1) x^{m-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\omega^{(\mu)}(x) = \sum m^{\frac{p-1}{2}} m (m-1) \dots (m-\mu+1) x^{m-\mu} \qquad (\text{mod. } p)$$

Man hat daher, wenn

$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k = s_k$$

gesetzt wird,

$$\omega (1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\omega'(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\omega''(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+2} - s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Allgemein wird

$$\omega^{(\mu)}(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu} + \lambda_1 s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu} s_{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p},$$

wo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  ganze Zahlen bezeichnen. Ist also  $\mu < \frac{1}{2} (p-1)$ , so ergibt sich

$$\boldsymbol{\omega}^{(\mu)}(1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \boldsymbol{p}),$$

also auch

$$\frac{\mathbf{\omega}^{(\mu)}(1)}{\mu!} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Für  $\mu = \frac{1}{2}(p-1)$  dagegen wird

$$\omega^{\frac{(p-1)}{2}}(1) \equiv s_{p-1} \equiv -1 \quad (\text{mod. } p).$$

Multiplicirt man dann die Congruenz

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \frac{\omega\left(\frac{p-1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv -1 \pmod{p}$$

mit  $-(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!$  und beachtet, dass nach dem Wilson'schen Satze

$$-(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \left(\frac{p-1}{2}\right)! - -(p-1)! \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p)$$

ist, so ergibt sich

$$-\frac{\omega^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \quad (\text{mod. } p).$$

Es wird also

$$\omega(x) = \left(\frac{p-1}{2}\right)! (1-x)^{\frac{p-1}{2}} + a_1(1-x)^{\frac{1}{2}(p+1)} + a_2(1-x)^{\frac{1}{2}(p+3)} + \dots \pmod{p},$$

wo  $a_1, a_2, \ldots$  ganze Zahlen bezeichnen.

Setzt man

$$P_{\nu-1} = (1-x)^{\nu-1} \varphi$$

so nimmt  $(1-x)^{\frac{1}{2}(p-1)} \varphi \cdot \omega(x)$  die Gestalt

$$P_{p-1}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \ldots\right) + p(1-x)^{\frac{p-1}{2}}G$$

an, wo G ganzzahlige Coëfficienten besitzt, und man kann nach (8)

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}}\varphi.\omega(x) = p\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + Q(1-x)\right) + [X] \quad (14)$$

setzen, wo Q ebenfalls ganzzahlig ist.

Da ferner

$$P_{\frac{p-1}{3}} = (1-x)^{\frac{p-1}{2}} (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+\dots+x^{\frac{p-3}{2}})$$

ist und der Ausdruck

$$x^{\frac{1}{2}-p-1}\frac{1}{8}(p^{2}-1)(1+x)(1+x+x^{2})...(1+x+...+x^{\frac{p-3}{2}})-\left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

für x = 1 verschwindet, so nimmt

$$x^{rac{1}{2}(p-1)rac{1}{8}(p^2-1)}P_{rac{p-1}{5}}$$

die Gestalt

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!+Q'(1-x)\right)$$

an, wo Q' eine ganze ganzzahlige Function von x bezeichnet, und man hat

$$(1-x)^{\frac{1}{2} \cdot (p-1)} \varphi f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2} \cdot (p-1)} \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)! + Q'(1-x) \right) + [X]$$
 (15)

Aus den Identitäten (13), (14), (15) folgt nun

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-1)} \left( \left( \frac{p-1}{2} \right)! (c_1-1) + (c_1 Q - Q')(1-x) \right) = [X].$$

Es muss also auch die Function

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)+(c_1Q-Q')(1-x)$$

durch X theilbar sein und man hat

$$\binom{p-1}{2}!(c_1-1)+(c_1Q-Q')(1-x)=LX,$$

wo L ganzzahlig ist. Für x = 1 wird dann

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

und daher

$$c_1 - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{16}$$

Anderseits kann  $c_1$  aber nur den Werth  $\pm 1$  haben. Denn aus (13) folgt

$$f(x)^{2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2} + [X]$$
$$= p^{p-3} c_{1}^{2} \omega^{2}(x) + [X].$$

Bezeichnet daher  $a+a_1 x+\ldots$  den echten Rest von  $\omega^2(x)$  in Bezug auf X, so wird

$$a_0 p^{p-3} c_1^{\nu} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$$

oder

$$a_0 c_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

 $c_1^2$  kann also als quadratischer Theiler von p nur den Werth 1 haben, und  $c_1$  muss  $= \pm 1$  sein. Dann folgt aber aus (16)  $c_1 = 1$  und man hat

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \omega(x) + [X],$$

$$\omega(x) = x^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X].$$
(17)

Für  $x = e^{\frac{\pi}{p}}$  ergibt sich hieraus die Gauss'sche Formel. Man hat

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} (1-e^{\frac{2\pi i}{p}})(1-e^{\frac{4\pi i}{p}}) \dots (1-e^{\frac{(p-1)\pi i}{p}})$$

$$= e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} \left(-2ie^{\frac{\pi i}{p}}\sin\frac{\pi}{p}\right) \cdot \left(-2ie^{\frac{2\pi i}{p}}\sin\frac{2\pi}{p}\right) \dots$$

$$\cdots \left(-2ie^{\frac{(p-1)\pi i}{p}}\sin\frac{(p-1)\pi}{2p}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{\frac{p-1}{2}}{2^2} \frac{\frac{p-1}{2}}{\sin \frac{\pi}{p}} \sin \frac{2\pi}{p} \cdots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p};$$

es ist aber

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}(-i)^{\frac{p-1}{2}} = i^{\frac{p^2-1}{4}}i^{-\frac{p-1}{2}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

und daher

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = i^{\frac{(p-1)^2}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \dots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p}.$$

Anderseits folgt aus (17), (11)

$$f(c^{\frac{2\pi i}{p}})^{2} = p^{p-3}\omega^{2}(c^{\frac{2\pi i}{p}})$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}$$

Hienach wird

$$\omega^{2}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^{2}} \left(2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \cdots \sin \frac{(p-1\pi)^{2}}{2p}\right)^{2}$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

und es ergibt sich

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \cdots \sin \frac{(p-1)\pi}{2p} = \sqrt{p}$$

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{2}}) = i^{\binom{p-1}{2}} \sqrt{p}.$$

## Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre

von

## Dr. Wilhelm Trabert.

Docent an der Universität und Assistent der k. k. Centralanstalt für Meteorologie in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

## I. Allgemeinster Ausdruck für die Abhängigkeit des Potentialgefälles von den äusseren Massen.

So viele \*Theorien« zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre auch aufgestellt worden sind, so vermochten wir bisher doch nur zu sehr wenigen sicheren Ergebnissen der Forschung zu gelangen. Es hat dies einerseits seinen Grund darin, dass überhaupt erst in neuerer Zeit — und da nur spärlich — in systematischer Weise und nach absolutem Masse Messungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche angestellt worden sind, anderseits liegt aber doch wohl auch vielfach die Ursache darin, dass man sich zur Lösung des hier vorliegenden Problems nur sehr selten und öfters auf wenig exacter Grundlage des mathematischen Calcüls bediente. Gerade dieser letztere bietet aber das Mittel, das Problem vollkommen klar und präcis zu formuliren und dadurch die Fragestellung für den Physiker zu erleichtern.

In dem Vorliegenden soll der Versuch gemacht werden, die allgemeinste Darstellung einer Theorie der »Schönwetterelektricität« zu geben, soweit dies ohne specielle Annahmen geschehen kann, und damit in Form einer allgemeinen Gleichung einen Rahmen zu entwerfen, in welchen

sich jede specielle Theorie einordnen muss, solange sie den Anspruch erheben will, nicht mit den Thatsachen in Widerspruch zu stehen.

Die Beobachtungen lehren, dass wir unsere Atmosphäre jedenfalls als ein elektrisches Feld anzusehen haben. Wir messen dasselbe durch die Änderung des Potentials und speciell an der Erdoberfläche durch den Unterschied des Potentials in ein Meter Höhe gegen das überall constante Potential des Erdkörpers selbst.

Wenn wir uns erinnern, dass für jede Oberfläche eines Leiters ganz allgemein die Gleichung

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\sigma$$

gilt, in welcher  $\frac{dV}{dn}$  das Potentialgefälle längs der Normalen auf die Oberfläche und  $\sigma$  die elektrische Dichte in dem betreffenden Punkte bedeutet, so können wir auch sagen, wir messen durch das Potentialgefälle die Dichte, welche die elektrische Ladung der Erdoberfläche in dem betreffenden Punkte besitzt. Wir brauchen nur das Potentialgefälle in den entsprechenden Einheiten auszudrücken und durch —  $4\pi$  zu dividiren.

Hätten wir es nur mit einer Ladung des festen Erdkörpers zu thun, so wäre die Dichte allein von der Gestalt der Erdoberfläche abhängig, wobei wir aber unter »Erdoberfläche auch die in die Atmosphäre ragenden Theile der Oberfläche jedes mit der Erde leitend verbundenen Körpers zu verstehen haben. Es wäre dann — und die Beobachtungen bestätigen dies ja auch — die Dichte in hohem Grade abhängig von den zufälligen Erhebungen und Krümmungen, und es versteht sich ganz von selbst, dass wir, wenn wir das Problem in seiner Wesenheit auffassen wollen, von diesen Zufälligkeiten absehen müssen.

Es hat deshalb auch F. Exner die selbst heute noch leider so wenig berücksichtigte und doch so wesentliche Forderung erhoben, alle Beobachtungen über Luftelektricität entweder auf einer vollkommenen Ebene anzustellen oder doch — da dies

ja selten möglich oder doch höchst umständlich wäre — auf die Ebene durch einmalige Feststellung des Reductionsfactors zu beziehen. Ist bei dem Beobachtungsmaterial diese Bedingung erfüllt, so haben wir es mit der Gestalt der Erdoberfläche im grossen Ganzen zu thun, und da auch die Abplattung der Erde so gering ist, dass dadurch, wie die Rechnung lehrt, die Dichtenvertheilung nicht wesentlich beeinflusst wird, so können wir bei allen unseren Betrachtungen, wenn, wie gesagt, das Beobachtungsmaterial, auf welches wir uns stützen können, auf die Ebene reducirt ist, die Erdoberfläche als eine Kugeloberfläche auffassen.

Auf einer Kugel aber wäre, wenn wir es nur mit einer Ladung derselben zu thun hätten, die Dichte überall dieselbe. Die Beobachtungen beweisen, dass dies nicht der Fall ist, dass vielmehr die Dichte der elektrischen Ladung der Erdoberfläche sowohl örtlich als auch zeitlich höchst veränderlich und von der Witterung abhängig ist.

Eine systematische Bearbeitung setzt deshalb voraus — auch diese Forderung wurde zuerst von Exner erhoben — dass die Beobachtungen bei schönem Wetter zunächst von den durch Wolken gestörten Beobachtungen getrennt werden. Es versteht sich von selbst, dass zuerst die ungestörte Erscheinung, die »Schönwetter-Elektricität«, studirt werden muss.

Auch die Schönwetter-Elektricität zeigt nun aber eine örtliche und zeitliche Veränderlichkeit. Die Dichte der Ladung nimmt von den höheren Breiten gegen den Äquator hin ab, sie zeigt eine Schwankung im Laufe des Tages, sowie auch im Laufe des Jahres, und vor Allem — hierin hat ja die Abnahme gegen den Äquator ihren Grund — sie nimmt ab mit dem zunehmenden Dampfgehalte der Luft und, wie Elster und Geitel neuerdings gezeigt haben, mit der Zunahme der ultravioletten Strahlung.

Es folgt aus dieser örtlichen und zeitlichen Verschiedenheit des Potentialgefälles an der Erdoberfläche oder, wie wir ja auch sagen können, der elektrischen Dichtigkeit, dass wir es ausser der Erdladung noch mit anderen Ladungen zu thun haben, welche influenzirend auf den Erdkörper wirken und dadurch die örtliche und zeitliche Verschiedenheit der Dichte

an der Erdoberfläche hervorbringen, und es ist die Hauptfrage in dem Problem, das die atmosphärische Elektricität darbietet, welches ist der Sitz dieser die jeweilige elektrische Dichte eines Punktes der Erdoberfläche bestimmenden Massen?

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, dass die Beantwortung dieser Frage wesentlich erleichtert oder doch ein Anhaltspunkt für die weitere Fragestellung gewonnen wird, wenn man den Einfluss äusserer elektrischer Massen in seiner allgemeinsten Form ermittelt, d. h. durch eine ganz allgemeine Formel den Zusammenhang zwischen der Dichte in jedem Punkte der Erdoberfläche und dem Potential der äusseren, influenzirend wirkenden Massen aufstellt. Da thatsächlich die Dichte durch das Potential dieser Massen eindeutig bestimmt ist, so bietet die Aufstellung einer solchen Formel keine Schwierigkeit.

Die allgemeinste Annahme, welche wir machen können, ist offenbar die, dass erstlich die Erde selbst mit einer gewissen Elektricität E geladen sei und dass sie zweitens unter dem Einflusse irgendwelcher elektrischer Massen stehe, deren Potential in irgend einem Punkte wir ganz allgemein mit W bezeichnen wollen, von welchen wir es aber vorläufig unentschieden lassen wollen, ob sie ihren Sitz im Weltraum oder im Innern der Atmosphäre haben. Es wird, wenn wir die allgemeinste Formel entwickelt haben und wenn wir dieselbe den Beobachtungsthatsachen gegenüberstellen, sich dann schon von selbst ergeben, inwieweit die allgemeine Annahme modificirt werden muss, wenn sie nicht den Beobachtungen widerstreiten soll.

Wir bezeichnen die Dichte, welche in einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche, die wir als Kugel auffassen, herrscht, mit  $\sigma$  und stellen uns die Aufgabe, diese Grösse auszudrücken durch die Ladung E der Erde und das Potential der äusseren elektrischen Massen. Auch die auf der Erdoberfläche ausgebreiteten elektrischen Massen werden für sich ein Potential haben, und wir nennen dieses U.

Ist dO ein Oberflächenelement der Erde an der Stelle, an welcher die Dichte  $\sigma$  herrscht, und ist u die Distanz des Oberflächenelementes von einem Punkte, für welchen wir das

Potential der Erdladung für sich berechnen wollen, so ist für diesen Punkt:

$$U=\int \frac{\sigma dO}{u},$$

wobei das Integral über die ganze Erdoberfläche auszudehnen ist.

Wenn für eben diesen Punkt das Potential der äusseren elektrischen Massen W heisst, dann ist das Gesammtpotential V, das hier herrscht, das sich also zusammensetzt aus dem Potential der Erdladung für sich (U) und dem Potential der äusseren Massen für sich (W), gegeben durch den Ausdruck

$$V = U + W$$
.

Wir nennen für einen Punkt im Innern der Erdkugel diese Grössen  $V_i$ ,  $U_i$  und  $W_i$ ; für einen äusseren Punkt  $V_c$ ,  $U_c$  und  $W_c$ ; für einen Punkt der Erdoberfläche, deren Radius wir a nennen wollen,  $V_a$ ,  $U_a$  und  $W_a$  und endlich für den Erdmittelpunkt  $V_0$ ,  $U_0$  und  $W_0$ .

Nachdem wir diese Bezeichnungen ein für allemal festgesetzt haben, können wir darangehen, einen geeigneten Ausdruck für o zu gewinnen.

Für eine Kugeloberfläche gilt ganz allgemein, welches auch das Potential der äusseren wirkenden Massen sein möge,

$$4\pi\sigma = \frac{U_a}{a} + 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a}$$
 1)

(Es möge, da diese Gleichung auch dem Physiker nicht immer geläufig sein wird, gestattet sein, ihre Ableitung hier kurz anzudeuten.

Wenn wir den Radius der Erdkugel mit a bezeichnen und die Distanz des Punktes, für welchen wir das Potential ins Auge gefasst haben, vom Erdmittelpunkte r nennen, und wenn der Winkel, welchen die beiden Radien a und r einschliessen,  $\theta$  heisst, dann ist

$$u = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für U ein, so haben wir

$$U = \int \frac{\sigma dO}{a\sqrt{1 - \frac{2r}{a}\cos\theta + \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{oder} \quad = \int \frac{\sigma dO}{r\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a}{r^2}}}$$

Den ersten Ausdruck werden wir anwenden für innere Punkte (r < a), den zweiten Ausdruck für äussere Punkte (r > a).

Wir können beide Ausdrücke nach Kugelfunctionen entwickeln und erhalten dann für den ersten Ausdruck

$$\frac{1}{a} \int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{r}{a} P_1 + \frac{r^2}{a^2} P_2 + \dots \right\}$$

und für den zweiten Ausdruck

$$\frac{1}{r}\int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{a}{r}P_1 + \frac{a^2}{r^2}P_2 + \ldots \right\}.$$

Nennen wir ganz allgemein den Ausdruck

$$\int \sigma dO \{P_0 + xP_1 + x^2P_2 + \dots \}$$

kurz f(x), dann können wir auch schreiben

$$U_i = \frac{1}{a} f\left(\frac{r}{a}\right)$$
 und  $U_c = \frac{1}{r} f\left(\frac{a}{r}\right)$ .

Für r = a gehen beide Ausdrücke in einander über

$$U_a = \frac{1}{a} f(1).$$

Nun gilt bekanntlich ganz allgemein für die Oberstäche eines Leiters (Theorem von Poisson):

$$\left(\frac{dU_c}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -4\pi\sigma.$$

Differenziren wir nun aber die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke für  $U_c$  und  $U_i$  nach r und setzen wir zum Schlusse r=a, so haben

$$\left(\frac{dU_{i}}{dr}\right)_{r=a} - \left(\frac{dU_{i}}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{1}{a^{2}}f(1) - \frac{2}{a^{2}}f'(1);$$

statt dessen können wir aber auch schreiben:

$$\left(\frac{dU_c}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\frac{U_a}{a} - 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a$$

Führen wir 4 m z ein, so folgt die obige Gleichung 1).

Es ist nun offenbar unsere Aufgabe,  $U_a$  und  $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a$  durch Werthe von W auszudrücken.

Im Innern eines Leiters ist das Potential constant, d. h.

$$V_i = U_i + W_i = U_0 + W_0 =$$
constans.

Dieser Satz gilt aber auch noch für die Oberfläche, es ist somit auch

 $U_a + W_a = U_0 + W_0,$ 

also, da

$$U_0 = \frac{E}{a},$$

$$U_a = \frac{E}{a} + W_0 - W_a.$$
2)

Wir hätten somit einen Theil unserer Aufgabe gelöst.  $U_a$  ist ausgedrückt durch die Ladung der Erde, den Werth des Potentials der äusseren Massen in dem Punkte, für welchen wir  $\sigma$  kennen wollen, und endlich durch den Werth des Potentials der äusseren Massen im Erdmittelpunkte.

Es bleibt uns noch übrig,  $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a}$  durch das Potential der äusseren Massen auszudrücken. Da  $U_i+W_i$  eine Constante, folgt sofort:

$$\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\left(\frac{dW_i}{dr}\right)_a.$$
 3)

Also, wenn wir die Werthe aus Gleichung 2) und 3) in die Gleichung 1) einsetzen:

$$4\pi\sigma = \frac{E}{a^2} - \frac{W_a - W_o}{a} - 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a}.$$

Wir brauchen somit nur die auf der Erdoberfläche aufgespeicherte Elektricitätsmenge und von den äusseren influenzirend wirkenden Massen nur das Potential im Erdmittelpunkt und jenem Punkte der Erdoberfläche, für welchen wir die Dichte  $\sigma$  bestimmen wollen, sowie die Änderung des Potentials längs der Normalen in diesem Punkte zu kennen, um die Dichte zu berechnen.

Da wir gewöhnlich nicht die Dichte, sondern  $-4\pi\sigma$ , d. h. das Potentialgefälle  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$  für die Erdoberfläche unmittelbar

messen, so werden wir besser thun, auch in die Gleichung 4) das Potentialgefälle einzuführen und können dann schreiben:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a.$$

Da, wie die Beobachtungen gelehrt haben, bei schönem Wetter die Potentialniveauslächen der Erdobersläche parallel sind, so ist es leicht auch für einen Punkt, in einer beliebigen Höhe h über der Erdobersläche, das Potentialgefälle  $\frac{dV}{dh}$  zu ermitteln. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur zu wissen, welche Elektricitätsmenge in der verticalen Lustschichte vom Querschnitte eins und der Höhe h unterhalb des Punktes, für welchen wir  $\frac{dV}{dh}$  rechnen wollen, zu kennen.

Nennen wir diese Elektricitätsmenge  $\eta$ , so wissen wir, dass bei Parallellagerung der Potentialniveaux der Unterschied des Potentialgefälles in zwei beliebigen Niveaux bestimmt ist durch die eingeschlossenen Massen, multiplicirt mit  $-4\pi$ .

Wir haben also

$$\frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\eta^{1}$$

somit

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a - 4\pi\eta. \quad II)$$

Wir haben hiemit für einen beliebigen Punkt unserer Atmosphäre das in ihm herrschende Potentialgefälle ausgedrückt

$$\int \frac{dV}{dn} dO = -4\pi\eta$$

ist, so hat man streng genommen, weil die obere Grenzsläche nicht gleich eins, sondern  $\left(\frac{a+h}{a}\right)^2$  zu setzen ist,

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2 \frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi r_i.$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> In dieser Formel ist nur die Höhe h gegenüber dem Erdradius a vernachlässigt. Da die Formel nur eine specielle Anwendung des Gauss'schen Satzes

durch die schon oben näher bezeichneten Grössen E,  $W_a$ ,  $W_o$  und  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$ , sowie die noch neu hinzugekommene Grösse  $\eta$ .

Diese Formel ist, woferne in der Lagerung der Potentialniveauflächen am Beobachtungsorte keine Störungen vorkommen, d. h. bei schönem Wetter, vollkommen exact. Sie wurde ohne Voraussetzungen und ohne Vernachlässigungen abgeleitet und stellt die Grundgleichung dar, von welcher man bei jeder Theorie, wenn dieselbe exact begründet werden soll, ausgehen muss. Es ist übrigens bemerkenswerth, dass für die Gleichung I, welche den Specialfall der Gleichung II für h=0, d. h. für die Erdoberfläche darstellt, auch die beschränkende Bedingung, dass die Potentialniveaux der Atmosphäre parallel seien, nicht nöthig ist, dass dieselbe vielmehr ganz allgemein und vollkommen streng das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit von den äusseren Massen ausdrückt, somit auch für die "Störungen" des "normalen" Potentialgefälles gilt.

Da wir, wenn wir uns auf den Boden einer speciellen Theorie stellen, die Werthe von  $W_a$ ,  $W_0$  und  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$  auf Grund der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme leicht werden berechnen können, so wird es uns leicht sein, alle speciellen Theorien an der Hand dieser allgemeinen Gleichung zu discutiren und zu untersuchen, ob und inwieferne nicht vielleicht ihre Annahme zu Consequenzen führen würde, welche den Beobachtungsthatsachen widerstreiten.

## II. Discussion der allgemeinen Gleichung.

1. Die Grösse E. Wir beschränken uns vorläufig darauf, die als (I) bezeichnete Gleichung für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, also die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_d - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

einer näheren Discussion zu unterziehen und beschäftigen uns vor Allem mit der Grösse E.

E bedeutete die Ladung des leitenden Erdkörpers, d. h. die auf der Erdoberfläche vorhandene freie Elektricität. Da, wie die Beobachtungen nicht bloss in unseren Breiten, sondern auch in den Tropen und auf dem Ocean gezeigt haben, auf der ganzen Erde das Potentialgefälle bei normalem Wetter einen positiven Werth besitzt, so folgt mit Sicherheit, dass die Erde überall (bei normalem Wetter) mit negativer Elektricität belegt ist, dass also die jeweilig an einem Orte beobachtete elektrische Dichte der Erdoberfläche nicht allein auf Rechnung der Influenz äusserer Massen zu setzen ist, sondern dass wirklich freie negative Elektricität auf der Erde vorhanden ist, dass also E einen bestimmten negativen Werth hat.

Diese Annahme, welche zuerst von Ermann und Peltier aufgestellt wurde, ist heute keine Hypothese mehr, sie ist eine Thatsache, welche sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt.

Es fragt sich nun: Sind wir etwa im Stande, die Änderungen des Potentialgefälles, wenigstens zum Theile, durch die Annahme einer Änderung dieser Grösse E zu erklären? Da nicht bloss Exner annimmt, dass mit dem Wasserdampfe ein Theil der Ladung der Erdoberfläche in die Atmosphäre entweiche, sondern auch Elster und Geitel durch ihre Versuche nachgewiesen haben, dass die Erdrinde Bestandtheile enthalte, welche negativ geladen, unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung einen Theil ihrer Ladung an die Atmosphäre abgeben, so wird local gewiss ein Theil der Erdladung von der Oberfläche in die Atmosphäre entweichen, gerade so wie anderwärts theils durch Blitzentladungen, theils durch den Niederschlag diese negative Elektricität dem Erdkörper wieder zugeführt werden wird.

Ist es möglich, wenn wir die gesammte Erdladung ins Auge fassen, eine Änderung dieser Grösse anzunehmen? Wenn wir beachten, dass sowohl die Verdampfung, als auch die Insolation nur local sehr verschieden sind, dass aber, wenn wir das Mittel für die ganze Erde ins Auge fassen, dieses gewiss für eine grössere Epoche constant ist, sicher aber keine tägliche Schwankung von nennenswerthem Betrage zeigt, so kann wohl nicht davon die Rede sein, die tägliche Periode oder die

Schwankungen des Potentialgefälles mit dem Dampfdruck oder der Insolation durch Veränderungen von E erklären zu wollen. Die localen Elektricitätsübergänge von der Erde zur Atmosphäre und umgekehrt, verschwinden gewiss für die gesammte Erdoberfläche.

Wohl aber wäre es möglich, eine jährliche Schwankung von E anzunehmen, da sich Sommer und Winter der beiden Hemisphären bekanntlich nicht ausgleichen, vielmehr die Jahreszeit der Nordhemisphäre ausschlaggebend ist, so dass die gesammte Erde im Laufe eines Jahres einen Sommer und einen Winter hat, welcher mit jenem der Nordhemisphäre gleichzeitig ist. Da somit auch die Verdampfungs- und Insolationsverhältnisse der gesammten Erde einen jährlichen Gang zeigen müssen, welcher ein Maximum im Sommer der Nordhemisphäre, ein Minimum im Winter derselben hat, so wäre es allerdings gar nicht ausgeschlossen, dass auch E, die Ladung der Erde, eine jährliche Periode besässe, welche ein Minimum im Sommer und ein Maximum im Winter der Nordhemisphäre aufweist.

Diese Möglichkeit müssen wir jedenfalls zugestehen und im Auge behalten. Ebenso gewiss ist es aber, dass wir durch eine derartige Schwankung von E alle in den jährlichen Gang der Luftelektricität nicht erklären können, da sonst die Südhemisphäre nicht, wie dies Melbourne zeigt, einen umgekehrten jährlichen Gang aufweisen dürfte, wie die Nordhemisphäre. Jede Änderung von E müssten ja alle Erdpunkte streng gleichzeitig zeigen. Wir werden übrigens später sehen (das möge hier nur nebenbei bemerkt werden), dass wir gar nicht im Stande sind, an einem einzelnen Beobachtungsorte Änderungen von E zu constatiren.

Fassen wir diese Erwägungen kurz zusammen, so müssen wir sagen, dass die Ladung der Erde E im Allgemeinen als eine Constante angesehen werden muss und dass sie höchstens einen kleinen jährlichen Gang mit einem Maximum in unserem Winter und einem Minimum in unserem Sommer aufweisen könnte, dass also gewiss alle nicht periodischen zeitlichen Schwankungen des Potentialgefälles und dessen tägliche Periode, dann aber auch die jährliche Periode zum grösseren Theile durch Veränderungen der Grössen W, d. h. durch den

influenzirenden Einfluss äusserer Massen auf die Erdoberfläche zu erklären seien.

2. Einfluss elektrischer Massen im Weltraume. Nachdem wir gesehen haben, dass in erster Linie die Änderungen des Potentialgefälles an einem Punkte der Erdoberfläche oder, wie wir auch sagen können, der elektrischen Dichte daselbst eine Influenzwirkung ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen sind, können wir einen Schritt weiter gehen und die Frage aufstellen: Wo sind diese Massen?

Hier gibt es nun offenbar nur zwei Möglichkeiten, entweder diese Massen liegen ausserhalb unserer Atmosphäre irgendwo im Weltraume oder aber in unserer Atmosphäre selbst. Wir discutiren zunächst die erstere Möglichkeit.

Wenn die Erde, wie die Beobachtungen lehren, eine negative Ladung besitzt, dann ist es mehr als wahrscheinlich, dass auch die anderen Himmelskörper als elektrisch geladene Körper aufzufassen sind. In diesem Falle würde natürlich in erster Linie unsere Sonne in Betracht kommen, und es wäre die Möglichkeit zu erwägen, ob nicht ein Theil der Erscheinungen luftelektrischer Natur durch die Influenzwirkung der Sonne seine Erkärung fände. Wir untersuchen desshalb zunächst den Einfluss einer ausserhalb der Atmosphäre im Weltraume befindlichen elektrischen Masse, ohne zunächst anzunehmen, dass diese auf der Sonne ihren Sitz habe.

Wo immer aber auch diese elektrischen Massen ihren Sitz haben mögen, das eine ist klar, dass bei der Kleinheit des Erdkörpers im Vergleich zu cosmischen Verhältnissen für den Raum, welchen die Erde einnimmt, die Potentialniveaux dieser äusseren Massen als Ebenen und einander parallel angesehen werden dürfen. Wir wollen das Gefälle dieses Potentials C nennen.

In nebenstehender Figur repräsentire MN jenes Potentialniveau, welches die Erdoberfläche in M tangirt. Wenn das Potentialniveau pro Längeneinheit in der Richtung von M gegen O (Erdmittelpunkt) um den Betrag C wächst, und wenn wir das Potential der in Frage stehenden äusseren Massen in O, O, O, O, O, also das durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende Potentialniveau mit O0 bezeichnen, dann hat die Tangential-

ebene M.V offenbar das Potential  $W_0 - Ca$ , wobei unter a der Erdradius MO zu verstehen ist. Wir nennen die Declination der Richtung, in welcher die elektrischen Massen ihren Sitz haben,  $\delta$ .

Unsere Aufgabe ist nun die, das jeweilig durch den Punkt A, welcher die geographische Breite  $AD = \varphi$  haben möge, hindurchgehende Potentialniveau zu berechnen.

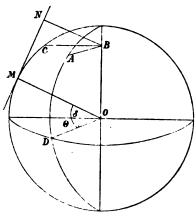


Fig. 1.

Wenn wir den senkrechten Abstand des Punktes A von der Tangentialebene MN mit p bezeichnen, dann ist offenbar dieses Niveau

$$W_a = W_0 - Ca + Cp$$
.

Nun ist weiter

p = BN—Projection von AB auf BN;

da nun, wie man leicht findet,

$$BN \equiv a - a \sin \varphi \sin \delta$$

und die Projection von AB auf BN gleich ist

$$a \cos \varphi \cos \theta \cos \delta$$
,

wenn  $\theta$  den Stundenwinkel des Punktes A, von dem Meridian MC aus gezählt bedeutet, so ist

$$W_a = W_0 - Ca(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \theta).$$

Da bekanntlich der Klammerausdruck nichts anderes ist als sin h, wenn wir unter h die Höhe jenes Punktes verstehen, in welchem die elektrischen Massen ihren Sitz haben, also die Sonnenhöhe, wenn wir die specielle Annahme machen, dass die äusseren Massen auf der Sonne gelegen seien, so könner wir auch schreiben

$$W_a = W_0 - Ca \sin h$$
.

Würden wir statt des Punktes A auf der Erdoberfläche einen Punkt in der Distanz r vom Erdmittelpunkt betrachtet haben, so hätten wir für diesen erhalten

$$W = W_0 - Cr \sin h$$
,

somit

$$\frac{dW}{dr} = -C\sin h.$$

Wir kennen nunmehr  $W_0$ ,  $W_a$  und  $\left(\frac{dW}{dr}\right)$ , sind also in der Lage, den influenzirenden Einfluss einer im Weltraume befindlichen Elektricitätsmenge allein durch das von ihr im Gebiete der Erde hervorgebrachte Potentialgefälle C und als Function ihrer Zenithdistanz oder ihrer Höhe auszudrücken.

Wir erhalten

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_0 = -3C\sin h.$$

Wären somit andere äussere Massen nicht vorhanden und kämen nur die eben besprochenen in Betracht, also etwa nur die Ladung der Sonne, dann wäre das Potentialgefälle auszudrücken durch

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_{0} = -\frac{E}{a^2} - 3C\sin h.$$

Wir würden durch diese Annahme z. B. den jährlichen Gang recht gut erklären können. Hätte die Sonne auch eine negative Ladung, so wäre das Potentialgefälle, das letztere hervorbringt, positiv, also C positiv; wir würden also im Sommer (h gross) einen kleinen Werth für  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ , im Winter (h klein)

dagegen einen grossen Werth für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche erhalten.

Trotzdem muss diese Annahme entschieden verworfen werden, denn wäre sie richtig, so müsste das Potentialgefälle an der Erdoberfläche eine einfache tägliche Schwankung zeigen, welche viel beträchtlicher wäre, als die jährliche. Diese tägliche Periode würde durch das Glied  $3 C \cos \varphi \cos \delta \cos \theta$  bestimmt werden, also eine Amplitude

$$6 C \cos \varphi \cos \delta$$

zeigen. Für die Tropen würde sich zur Zeit der Äquinoctien 6 C ergeben!

Wenn also die Sonne eine elektrische Ladung besitzen sollte, so ist dieselbe gewiss nur so gross, dass das Gefälle *C*, welches sie hervorbringt, eine kleine Grösse ist, welche gegen den jährlichen Gang gewiss verschwindet, aber möglicherweise zur Erklärung des täglichen Ganges des Potentialgefälles beitragen könnte, bei welchem ja bekanntlich die Schwankung nur sehr gering ist.

Es ist unter diesen Umständen wohl sehr unwahrscheinlich, dass noch etwa eine Ladung des Mondes in Frage kommen sollte. Trotzdem ist erst jüngst von N. Ekholm und Sv. Arrhenius der Versuch gemacht worden, den influenzirenden Einfluss einer Mondladung nachzuweisen.

Da der Mond bereits der Erde so nahe ist, dass die Potentialniveaux nicht mehr als parallele Ebenen angesehen werden dürfen, muss zu dem Gliede  $-3C \sin h$ , welches die Influenzwirkung ausdrückt, mindestens noch ein Glied

$$-\frac{5}{2}pC(3\sin^2 h-1)$$

hinzutreten (man vergl. die unten citirte Abhandlung), worin p die Parallaxe des Mondes bedeutet.

Es gilt selbstverständlich auch hier, dass vor Allem die mondtägliche Periode sich zeigen müsste. Das von den beiden

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Über den Einfluss des Mondes auf den elektrischen Zustand der Erde. Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar, Bd. 19, Afd. I, Nr. 8.

Verfassern discutirte Material zeigt aber, dass die monatliche Periode viel deutlicher ausgesprochen sei; woraus wohl unbedingt folgt, dass der aus diesen Beobachtungen folgende Mondeinfluss keine Influenzwirkung sein kann, sondern wohl als ein indirecter Einfluss aufgefasst werden muss, der erst einer weiteren Klarstellung bedarf.

Für diese Annahme spricht wohl auch das Resultat, zu welchem Ekholm und Arrhenius kommen, dass die untersuchte Erscheinung recht bedeutende Zeit zu ihrer Entwicklung nöthig hat. Wenn dies der Fall ist, kann wohl von einem Influenzvorgang nicht die Rede sein.

Zur Erklärung der grösseren Schwankungen ist also auch die Annahme von elektrischen Massen im Weltraume ausserhalb unserer Atmosphäre ungeeignet; es bleibt somit nur die eine Annahme übrig, dass die Schwankungen im Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch den influenzirenden Einfluss von elektrischen Massen in der Atmosphäre selbst hervorgebracht werden.

3. Einfluss elektrischer Massen in der Atmosphäre. Wir haben somit das Gebiet, in welchem jene elektrischen Massen zu suchen sind, durch deren Influenzwirkung die wesentlicheren Schwankungen des Potentialgefälles hervorgerufen werden, ziemlich eng umgrenzt. Sie können ihren Sitz nur in unserer Atmosphäre haben.

Es gibt auch bekanntlich eine ganze Reihe von Theorien, welche den Sitz der wirkenden elektrischen Massen in der Atmosphäre suchen. Auch Thomson nimmt in den oberen Schichten der Atmosphäre eine positive Ladung an. Mag dieselbe nun vorhanden sein oder nicht, gewiss ist, dass, wenn sie auch vorhanden ist, im Innern des Raumes, welchen diese oberen Schichten einschliessen, das Potential einer derartigen gleichförmig elektrisirten Kugelschichte ein constantes ist, d. h.

$$W_a=W_0$$
 und  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a=0$ . Eine solche Ladung vermag somit nicht das Potentialgefälle  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$  zu beeinflussen.

Andere Theorien, wie die von Sohncke und Luvini, nehmen desshalb ein Heben und Senken einer positiv geladenen

Fläche (Isothermenfläche Null) und wohl auch einen wechselnden Betrag ihrer Ladung an. Und noch andere Theorien verlegen den Sitz der äusseren elektrischen Massen nicht in eine Fläche, sondern lassen dieselben sich über die ganze Atmosphäre ausbreiten, sei es nun, dass sie, wie Exner, annehmen, die elektrischen Massen hätten ihren Sitz auf den Wasserdampfmolekülen, sei es, dass sie, wie Elster und Geitel in ihrer Umgestaltung der Arrhenius'schen Theorie, annehmen, es werde die Elektricität von der Erdoberfläche unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung weggeführt, und den eigentlichen Sitz vorläufig unerörtert lassen. Sicher befindet sich derselbe ja auf Theilchen der Atmosphäre.

Auch diese Theorien, wie alle, welche den Sitz der influenzirenden Elektricität in der Atmosphäre suchen, müssen sich in den Rahmen einer allgemeinen Formel einordnen, welche wir auf sehr einfache Weise ableiten können und welche es gestattet, die einzelnen Theorien an den Beobachtungsthatsachen zu prüfen.

Nennen wir die gesammte in der Atmosphäre befindliche Elektricität e und bezeichnen wir die Summe aus dieser letzteren und der Ladung E der Erdoberfläche kurz mit  $E_0$ , also

$$E_0 = E + e$$

dann sind in einer genügend grossen Entfernung h von der Erdobersläche die Potentialniveaux unter allen Umständen ja gewiss wieder Kugelslächen und das dort herrschende Potential ist

$$V = \frac{E_0}{a+h}.$$

Das Potentialgefälle in dieser Entfernung ist dann

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{(a+h)^2}.$$

Wir können nun wieder auf das Potentialniveau, welches die Erdoberfläche repräsentirt, und das Niveau mit dem Potentiale V den schon einmal verwendeten Satz anwenden, welcher das Gefälle in beiden Niveaux und die Elektricitätsmenge in

Beziehung bringt, welche in der zwischen beiden Niveaux über dem Querschnitt Eins errichteten verticalen Luftsäule enthalten ist. Nennen wir letztere, also die in der ganzen über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthaltene Elektricität  $\varepsilon_0$ , so haben wir demnach <sup>1</sup>

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2\frac{dV}{dh}-\left(\frac{dV}{dh}\right)_0=-4\,\pi\epsilon_0$$

oder, wenn wir für  $\frac{dV}{dh}$  den obigen Werth einführen,

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0.$$
 III)

Wir ersehen aus dieser Gleichung, dass, wenn lediglich die in der Atmosphäre enthaltenen Massen in Betracht kommen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche allein abhängt von der gewiss constanten gesammten Elektricitätsmenge unseres Erdballes (Ladung der Oberfläche+Ladung der Atmosphäre) und jenen elektrischen Massen, welche unmittelbar über dem Beobachtungsort in der über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthalten sind.<sup>2</sup>

Wäre die in der Atmosphäre vorhandene Elektricität nach Breite und Länge gleichförmig vertheilt, dann wäre  $e=4\pi a^2 \epsilon_0$ , also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} - 4\pi\varepsilon_0 + 4\pi\varepsilon_0 = -\frac{E}{a^2}.$$

 $^2$  Wir hätten auch wieder  $W_a$ ,  $W_0$  und  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$  für die in der Atmosphäre befindlichen Massen rechnen können und hätten dann gesehen, dass sich

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a \text{ auf } - \frac{e}{a^2} + 4\pi\epsilon_0$$

reducirt, womit wir gleichfalls zur Gleichung III) geführt worden wären. Dieser Weg wäre aber ein umständlicherer gewesen und darum schien es gestattet, jene Gleichung auf einem anderen, einfacheren Wege abzuleiten. Der letztere ist ja auch bei Parallellagerung der Potentialniveaux über dem Beobachtungsort — und das ist ja bei schönem Wetter der Fall — vollkommen streng.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Man vergl. die Anmerkung auf S. 8.

Es würde dann, was ja auch selbstverständlich ist, und was wir schon bei der Thomson'schen Theorie ersahen, die in der Atmosphäre enthaltene Elektricität auf das Potentialgefälle gar keinen Einfluss haben. Schwankungen des letzteren können wir somit allein durch die Annahme erklären, dass die in der Atmosphäre enthaltenen elektrischen Massen ungleichförmig vertheilt sind, wobei speciell die über dem Beobachtungsort befindlichen Massen allein massgebend sind.

Halten wir dieses Ergebniss mit der früher besprochenen Möglichkeit einer Veränderlichkeit der Erdoberflächenladung zusammen, so zeigt sich, dass, wenn auch eine solche vorhanden sein sollte, dieselbe jedenfalls von uns an einem einzelnen Beobachtungsort nie bemerkt oder nachgewiesen werden könnte, da eben allein die Gesammtmenge der Elektricität unserer Erde und die Massen über dem Beobachtungsort für den Werth seines Potentialgefälles bestimmend sind.

Auch für einen beliebigen Punkt in der Atmosphäre können wir nun sehr einfach das Potentialgefälle ausdrücken. Nennen wir die über dem Punkte, welchen wir uns in der Höhe h denken, in der gesammten darüber befindlichen Luftsäule (vom Querschnitte Eins) enthaltene Elektricitätsmenge  $\epsilon$ , dann ist die früher (auf S. 8)  $\eta$  bezeichnete Grösse

$$\eta = \epsilon_0 - \epsilon$$
,

also ist für einen Punkt in der Höhe h

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi \varepsilon_0 - 4\pi \eta$$

oder

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi s. IV)$$

Für das Potentialgefälle in beliebiger Höhe entscheidet somit allein die in der Luftsäule (vom Querschnitte Eins) über dem betreffenden Punkte enthaltene Elektricitätsmenge.

#### III. Der Sitz der elektrischen Massen.

Fassen wir die Ergebnisse des vorigen Kapitels kurz zusammen, so hat sich als vollkommen sicher herausgestellt, dass eine freie elektrische Ladung der Erdoberfläche vorhanden ist. Aus einzelnen Beobachtungen vermögen wir dieselbe indessen niemals abzuleiten; wohl aber könnten wir ihren Betrag angeben, wenn uns ein über die ganze Erde sich erstreckendes Beobachtungsmateriale zur Verfügung stünde. Würden wir für jede geographische Breite den Betrag von  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$  kennen, dann würden wir auch einen Mittelwerth dieses Potentialgefälles ableiten können. Es ist aber

$$\frac{1}{O} \int \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 dO = -\frac{1}{O} \int \frac{E+e}{a^2} dO + \frac{1}{O} \int 4\pi\epsilon dO$$
$$= -\frac{E+e}{a^2} + \frac{4\pi e}{O} = -\frac{E}{a^2}.$$

Das heisst, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles für die Erdoberfläche  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$  nennen, so ist die Ladung der Erdoberfläche

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_{m}.a^{2}.$$

Exner hat den Versuch gemacht,<sup>1</sup> das Potentialgefälle für verschiedene Breiten auf Grund seines umfangreichen Beobachtungsmateriales zu berechnen.

Acceptirt man seine Zahlen und berechnet mit Berücksichtigung der Grösse der einzelnen Kugelzonen den Mittelwerth, so ergibt sich

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_m = 130 \text{ Volt/Meter.}$$

Als einen ersten Näherungswerth wird man diesen Werth gewiss ansehen dürfen; dann ergibt sich für die Erdoberflächenladung

$$E = -21 \cdot 10^{14}$$
 statische Einheiten.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wiener Sitzungsber., Bd. 96, IIa. [1887], S. 459. (Auch Exner's Repertorium für Physik, Bd. XXIV, S. 276).

Eine jährliche Schwankung von E wäre, wie wir sahen, möglich, aber sie liesse sich nur dann nachweisen, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles aus einem über die ganze Erde sich erstreckenden Beobachtungsmateriale von Monat zu Monat berechnen könnten.

Zur Erklärung von Schwankungen des Potentialgefälles an einzelnen Orten (das war ein weiteres Resultat) können wir Änderungen von E jedenfalls nicht herbeiziehen.

Wir sind somit zu der Annahme gezwungen, dass die Schwankungen des Potentialgefälles in erster Linie durch den influenzirenden Einfluss äusserer Massen hervorgerufen werden. Als wir nun aber wieder die Möglichkeit ins Auge fassten, dass diese Massen im Weltraume, also etwa auf der Sonne, zu suchen seien, zeigte sich, dass dann vor Allem der tägliche Gang diesen Einfluss verrathen müsse.

Wenn die Sonne eine elektrische Ladung L besitzen würde, so wäre in der Distanz der Erde R das Potential dieser Ladung  $V=\frac{L}{R}$ , also das Potentialgefälle, welches wir mit C bezeichneten,

$$C = \frac{dV}{dR} = -\frac{L}{R^2}.$$

Bei einer Declinationsstellung  $\delta$  würde nun ein Ort in der geographischen Breite  $\phi$  eine tägliche Amplitude des Potentialgefälles

$$6C\cos\varphi\cos\delta$$

aufweisen.

Über den täglichen Gang liegen nur sehr wenige Messungen vor, und von den vorliegenden beziehen sich nur wenige auf die freie Ebene; so viel ist aber gewiss, dass die tägliche Schwankung überhaupt gering ist. Wenn wir als Beispiel den Gang von Perpignan<sup>1</sup> verwenden dürsten, so hätten wir im Mittel aus Frühjahr und Herbst überhaupt nur eine Schwankung zwischen 39 und 73 Volt. Das Hauptminimum um 3<sup>h</sup> a., das Hauptmaximum um 7<sup>h</sup> p.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Meteorolog, Zeitschrift, Bd. 26 (1891), S. 113.

Da die Sonne die extremen Werthe zu Mittag und Mitternacht verursachen würde, so hätten wir eigentlich nur die Beobachtungsdaten dieser Stunden in Betracht zu ziehen. Es beträgt nun um Mitternacht das Potentialgefälle 45, zu Mittag 52 Volt. Das sind wenig verschiedene Werthe, die wohl zeigen. dass, wenn eine Ladung der Sonne vorhanden ist, dieselbe sehr klein ist.

Wenn wir auch

$$6C\cos\varphi\cos\delta = 20 \text{ Volt (für } \delta = 0)$$

annehmen würden, hätten wir, da  $\varphi = 42^{1}/, \circ$ ,

$$C = 4.5$$
 Volt pro Meter,

somit das Potentialgefälle an der Sonnenoberfläche

$$C_0 = 208000 \text{ Volt/Meter.}$$

Ein so hoher Werth des Potentialgefälles an der Sonnenoberfläche ist auch gewiss nicht zu erwarten, denn er würde besagen. dass die elektrische Dichte an der Sonnenoberfläche 1600 mal so gross wäre, wie die an der Erdoberfläche. Exner hat auch schon gezeigt, dass selbst dann, wenn die Sonnenladung zur Erdladung wie ihre Massen zu einander sich verhielten, das Gefälle im Gebiete der Erde, also unsere Grösse C nur 0.4 Volt pro Meter betragen würde.

Es ist also wohl zweifellos, dass der Einfluss der Sonne, wenn er vorhanden ist, ein nur sehr kleiner ist.

Ausschlaggebend für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche sind somit gewiss nur die in der Atmosphäre enthaltenen Massen, und da wurde gezeigt, dass sich das Potentialgefälle stets darstellen lasse durch die Formel

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon.$$

Diese Formel schliesst die Grösse E und somit auch deren eventuelle Schwankungen bereits ein. Die Grösse  $E_0$ , welche sich aus E und der Gesammtladung e der Atmosphäre zu-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, Bd. 93, II. a. S. 284.

sammensetzt, ist gewiss eine Constante; die einzig variable Grösse ist somit nur die Grösse e.

Wenn nun aber durch diese Formel das Potentialgefälle bis auf die geringen, eventuell vorhandenen Schwankungen. welche ihren Grund in einer Sonnenladung hätten, vollkommen genau dargestellt wird, dann ist ein Heben oder Senken der in der Atmosphäre vorhandenen elektrischen Massen vollkommen gleichgiltig, nur die Menge, welche sich über dem Beobachtungsorte besindet, ist massgebend; wo sie sich besindet, ist gleichgiltig.

Es ist hiermit aber auch der unwiderlegliche Beweis erbracht, dass elektrische Massen sich jederzeit, auch bei schönem Wetter, in der Atmosphäre befinden müssen, und es erübrigt dann nur noch die eine Frage: An welche Bestandtheile unserer Atmosphäre sind diese elektrischen Massen gebunden? Sind es Wassertröpfchen, Eiskrystalle, der Wasserdampf, der Staub oder vielleicht die Luft selbst?

Sowohl Wassertröpfchen, als auch Eisnadeln sind gewiss Träger von Elektricität. Das beweisen nicht nur die directen Beobachtungen dieser Thatsache, sondern auch der störende Einfluss, den Wolken auf den normalen Verlauf des Potentialgefälles ausüben. Für die Verschiedenheiten dieser letzteren Grösse bei schönem Wetter, wo gewiss Wassertröpfchen und Eisnadeln, wenn sie schon unsichtbar vorhanden sein sollten, gewiss nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen würden, müssen jedenfalls anderswo vorhandene Massen herbeigezogen werden.

Die Exner'sche Theorie, nach welcher der Wasserdampf der Sitz der elektrischen Massen wäre, schien bis in die neueste Zeit wohl als die am besten begründete. War auch die physikalische Grundlage, ob von einer geladenen Wasserfläche der Wasserdampf Elektricität mitführe, bisher noch eine Streitfrage, so konnte Exner doch auf den thatsächlich bestehenden Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Dampfgehalt der Luft hinweisen, ein Zusammenhang, welcher sich sogar durch eine empirische Formel darstellen liess:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k p_0},$$

wobei A und k Constanten,  $p_0$  aber den Wasserdampfgehalt an dem Beobachtungsorte bedeutet.

Diese Formel würde sich sehr wohl in den Rahmen der Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

einordnen, wir brauchten nur anzunehmen, es wäre  $\epsilon_0$  die übet dem Beobachtungsorte befindliche Elektricitätsmenge proportional dem Dampfgehalte  $p_0$  und der Dichte der Erdladung am

Beobachtungsorte, d. h. dem  $-\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ . Dann wäre

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_{0} = -\frac{E_{0}}{d^{2}} - 4\pi k p_{0} \left(\frac{dV}{dh}\right)_{0},$$

woraus sich die Exner'sche Formel ergibt, wenn wir die Constante  $-\frac{E_0}{a^2}=A$  setzen.

In jüngster Zeit zeigten nun Elster und Geitel,¹ dass sich eine ganz ebenso gut begründete Beziehung zwischen dem Potentialgefälle und dem Betrage der ultravioletten Strahlung nachweisen lasse, und dass auch diese sich durch eine, ebenso vortrefflich stimmende empirische Formel darstellen lasse, welche dieselbe Gestalt hat

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi KJ}$$

wobei unter J die Intensität der ultravioletten Strahlung zu verstehen ist. Selbstverständlich ordnet sich auch diese Formel in den Rahmen unserer Formel III) ein unter der Annahme

$$\varepsilon_0 = -KJ \cdot \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

Physikalisch ist diese Annahme sehr gut begründet. Die Erdoberfläche besitzt wirklich Substanzen, welche unter dem Einflusse ultravioletter Strahlung ihre negative Ladung abgeben.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, II. a. (1893).

Dann aber ist es auch sehr plausibel, dass die Menge der über dem Beobachtungsorte befindlichen Elektricität proportional ist erstlich der Intensität der Strahlung und zweitens der Dichte der Ladung.

Höchst merkwürdig bleibt übrigens das Nebeneinanderbestehen dieser beiden Beziehungen. Elster und Geitel legten sich desshalb auch in der citirten Arbeit die Frage vor, ob nicht etwa ein Zusammenhang zwischen Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung bestehe. Die diesbezüglichen Beobachtungen zeigten denn auch in der That einen derartigen Zusammenhang, und Elster und Geitel versuchten auch eine Erklärung für denselben zu geben.

Die Untersuchungen Aitken's haben gezeigt, dass dem Staube eine grosse Wichtigkeit bei der Wolkenbildung zukomme. Zur Wolkenbildung sind somit zwei Elemente nöthig: ein beträchtlicher Wasserdampfgehalt der Luft und ein gewisser Staubgehalt. Wenn nun bei grösserem Wasserdampfgehalt doch eine Condensation nicht eintritt, so liegt dies offenbar am Fehlen des zweiten Factors. Bei wolkenlosem Wetter wird somit der Staubgehalt umso geringer sein, je grösser die absolute Feuchtigkeit ist. Da nun besonders der Staub die ultraviolette Strahlung aufhält, so wird auch die ultraviolette Strahlung umso grösser sein, je grösser die Feuchtigkeit ist.

Wenn übrigens auch die von Elster und Geitel festgestellte Beziehung zwischen Potentialgefälle und ultravioletter Strahlung die ursprüngliche sein sollte, so bleibt damit doch noch die Frage offen, ob die von der Erdoberfläche weggeführte Elektricität auf die Luft oder etwa den Staub übergehe.

Da zwischen Wasserdampfgehalt, Staubgehalt und ultravioletter Strahlung eine so enge Beziehung besteht, ist diese Frage schwer zu entscheiden, doch wäre es unter verschiedenen klimatischen Verhältnissen wohl möglich festzustellen, von welcher Grösse eigentlich der Betrag von so unmittelbar abhängt.

Übrigens versprechen auch Beobachtungen in den höheren Schichten der Atmosphäre hier vielleicht einige Aufklärung zu geben. Die Beobachtungen auf Berggipfeln leiden an dem Übelstande, dass sie nicht in absolutem Maasse angestellt werden können; doch bieten mitunter auch nur relative Messungen schon einiges Interesse.

Elster und Geitel haben bei ihrer Bearbeitung der luftelektrischen Messungen auf dem Sonnblick gezeigt, dass der jährliche Gang in dieser Höhe fast verschwindet. Sie fanden<sup>1</sup>

Oct. Nov. Dec. Jänner Februar März April Mai Juni 0.87 0.841.05 0.981.13 1.00 1.06 1.07 1.01

Ein ausgesprochener Gang wie an den Stationen der Niederung ist hier nicht mehr zu ersehen. Da allgemein

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon,$$

so würde aus diesen Daten folgen, dass sich über der Höhe des Sonnblicks fast keine elektrischen Massen mehr befinden, durch deren wechselnden Betrag noch ein jährlicher Gang hervorgebracht werden könnte. Es würden somit nach diesen Beobachtungen die den jährlichen Gang des Potentialgefälles hervorrufenden Massen zum grössten Theile in der unterhalb 3000 m liegenden Luftschichte zu suchen sein.

Interessante Ergebnisse würden auch systematische Beobachtungen im Ballon versprechen. Man wäre wohl geneigt anzunehmen, dass bei heiterem Wetter derartige Beobachtungen in grösseren Höhen  $\frac{dV}{dh}$  constant ergeben dürften.

Das so ermittelte  $\frac{dV}{dh}$  wäre dann, wenn  $\epsilon$  verschwindet, der Betrag von

$$-\frac{E_0}{a^2}$$
.

Wir würden so den Betrag von  $E_0$  leicht ermitteln können. Wären wir sicher, dass wirklich der Betrag von  $\epsilon_0$  durch den Ausdruck  $-kp_0\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$  dargestellt würde, so wäre die Constante A in der Exner'schen Formel, wie wir bereits sahen,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, II. a. (1893), S. 1311.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Vergl. S. 1046.

gleich  $-\frac{E_0}{a^2}$ . Diese Voraussetzung ist aber, wenn wir auch an der Geltung der Exner'schen Gleichung festhalten, keineswegs selbstverständlich.

Auch dann, wenn & durch die Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - k p_0 \left( \frac{dV}{dh} \right)_0$$

dargestellt wäre, worin  $C_0$  eine Constante bedeutet, würden wir zu der Exner'schen Formel gelangen, nur dass dann A eben eine andere physikalische Bedeutung hätte, nämlich durch den Ausdruck

$$A = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0$$

gegeben wäre. Wir hätten dann, um  $E_0$  zu finden, von der Constanten A erst den Betrag  $4\pi C_0$  abzuziehen. Da wir nun nicht angeben können, wie gross die Constante  $C_0$  in der Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - k p_0 \left( \frac{dV}{dh} \right)_0$$

oder, wenn wir auf dem Standpunkte der Theorie von Elster und Geitel stehen, wie gross  $C'_0$  in der Gleichung

$$\varepsilon = C_0' - KJ \left( \frac{dV}{dh} \right)_0$$

ist, und nicht a priori annehmen können, dass sie Null sei, so ist es nicht gestattet, die Exner'sche Constante A (oder die entsprechende in der Gleichung von Elster und Geitel) als jene Ladung anzusehen, welche die Erdobersläche besitzen würde, wenn alle Elektricität auf derselben niedergeschlagen wäre.

Die Grösse  $E_0$  können wir somit allein durch Ballonfahrten ermitteln, und zwar durch Messungen in grossen Höhen. Da übrigens sowohl die Formel von Exner, als auch die von Elster und Geitel nur aus Beobachtungen an der Erdoberfläche abgeleitet wurde, so können wir nicht einmal sagen, ob die Constante  $C_0$  oder  $C_0'$  nicht etwa eine Function der Höhe sei.

Es ist ja auch das noch eine Streitfrage, ob die Luft selbst elektrisirbar sei oder nicht. Wenn der Luft selbst eine gewisse Ladung zukäme, würde ja sicher ein für dasselbe Niveau constanter, aber mit der Höhe abnehmender Betrag in dem Ausdrucke für e enthalten sein müssen.

Über all' diese Fragen versprechen Messungen im Ballon bei schönem Wetter interessante Ergebnisse. Vor Allem ist aber zu beachten, dass unter allen Umständen

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon$$

und es handelt sich nun darum, den Betrag von  $E_0$  und jenen von  $\varepsilon$  in seiner Abhängigkeit von Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung festzustellen.

Dr. Less hat kürzlich in der Zeitschrift für Luftschifffahrt eine kleine Zusammenstellung der luftelektrischen Messungen im Ballon aus der jüngsten Zeit zusammengestellt. Wie sich aus diesen mit ziemlicher Übereinstimmung ergibt, besitzt das Potentialgefälle in den unteren Schichten ziemlich wechselnde Werthe. Nach einigen Beobachtungsreihen nimmt es in den unteren Schichten mit der Höhe zu, nach anderen ab; übereinstimmend aber zeigt sich in den höheren Schichten eine Abnahme des Potentialgefälles. In den Schichten 2500 – 3000 m fanden Börnstein, Le Cadet und Baschin Werthe von rund 15 Volt pro Meter!

Derartige Ergebnisse zeigen bereits, dass die Exner'sche Theorie mit den Thatsachen nicht ohne Weiteres in Einklang zu bringen ist. Nach der Theorie von Exner würden wir, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, ein Potentialgefälle von etwa 1400 Volt pro Meter beobachten, und zwar nicht bloss an der Erdoberfläche, sondern auch in den höheren Schichten. Ebenso würden wir bei Erhebung über die Wasserdampfatmosphäre nothwendigerweise zu immer grösseren Werthen gelangen und in solchen Atmosphärenhöhen, in welchen der Wasserdampfgehalt der Luft nur mehr sehr gering ist, würden wir diesem Potentialgefälle von etwa 1400 Volt sehr nahe kommen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zeitschrift für Luftschifffahrt, XIII (1894), S. 190.

Da thatsächlich in den höheren Schichten kleinere Werthe beobachtet werden, als an der Erdoberfläche, müssen ausser den Elektricitätsmengen, welche eventuell ja auf dem Wasserdampfgehalt ihren Sitz haben könnten, sicherlich noch andere, und zwar sehr beträchtliche Elektricitätsmengen vorhanden sein, welche vom Wasserdampfgehalt unabhängig sind.

Wenn wir also auch noch den Wasserdampf als Träger der Elektricität anerkennen wollten, so ist doch nach den Ergebnissen dieser Ballonfahrten gewiss, dass in der Grösse & noch ein anderes vom Wasserdampf unabhängiges Glied wirklich vorkommt. Es wäre in der That

$$\varepsilon = C_0 - k p_0 \left( \frac{dV}{dh} \right)_0$$

und  $C_0$  hätte einen positiven, mit der Höhe abnehmenden Werth.

Es folgt zugleich aber auch aus diesen Betrachtungen, dass aus der Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe nicht gefolgert werden darf, dass die Exner'sche Theorie ganz und gar unrichtig ist. Es wäre, wie wir sahen, noch immer möglich, eine Ladung des Wasserdampfes anzunehmen, aber insoferne ist Exner's Theorie gewiss unrichtig, als sie den Wasserdampf zum alleinigen Träger der atmosphärischen Elektricität macht. Es müssen ausser den möglicherweise vorhandenen negativen Massen auf dem Wasserdampf noch viel beträchtlichere positive Massen in der Atmosphäre vorhanden sein, die, wie es scheint, einen sehr constanten Betrag ausmachen und desshalb wohl einer Ladung der Luft selbst zugeschrieben werden müssen.

Wäre aller Wasserdampf aus der Luft ausgeschieden, so würden wir nach Exner an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle von etwa 1410 Volt beobachten. Nach unserer Formel wäre also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0 = 1410 \text{ Volt,}$$

worin C die Elektricitätsmenge in der über der Flächeneinheit aufruhenden verticalen Luftsäule bedeuten würde, wenn aller

Wasserdampf ausgeschieden wäre. Da nun in Höhen von 3000 m der Wasserdampfgehalt der Luft ohnehin sehr gering ist, so dass auf dem Wasserdampfe in der Luftsäule über dem Niveau von 3000 m auch nur mehr sehr wenig Elektricität sitzen kann, so würden wir in grossen Höhen, auch wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, nicht viel andere Werthe beobachten.

Wenn wir aber in 3000 m

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C = 15 \text{ Volt}$$

beobachten, wobei unter C die Elektricitätsmenge in der Luftsäule über dem Niveau von  $3000 \, m$  zu verstehen wäre, so hätten wir offenbar rund

$$4\pi(C_0-C) = 1400 \text{ Volt/Meter.}$$

 $C_0-C$  ist aber nichts anderes, als die nicht an den Wasserdampf gebundene, sondern sonst wo sitzende Elektricität, welche in einer nur 3000 m hohen verticalen Luftsäule vom Querschnitte Eins enthalten ist, d. h. es ist in dieser Luftsäule beinahe ebensoviel positive Elektricität vorhanden, als nach Exner (bei Abwesenheit des Wasserdampfes) auf der Flächeneinheit der Erdoberfläche negative Elektricität sitzen würde. Exner nimmt ja an

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} = -4\pi\sigma = 1410 \text{ Volt/Meter,}$$

wobei unter 3 die Dichte der Erdoberflächenladung zu verstehen ist.

Wenn sich in grösseren Höhen noch eine weitere Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe zeigen sollte, dann wäre es höchst wahrscheinlich, dass wir an der Grenze der Atmosphäre einen Werth Null beobachten würden, was besagen würde, dass, wie dies von Lord Kelvin ja auch behauptet wurde, die negative Ladung der Erdoberfläche und eventuelle negative elektrische Massen in den unteren Schichten der Atmosphäre vollkommen ausgeglichen würden durch eine entsprechende positive Ladung der Luft. In unserer Gleichung IV) würde in

diesem Falle  $E_0$  verschwinden, d. h. es wäre das Potentialgefälle allein abhängig von der Elektricitätsmenge  $\epsilon$  über dem Beobachtungspunkt. Es wäre

$$\frac{dV}{dh} = 4\pi\varepsilon$$

und für die Erdoberfläche

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = 4\pi\epsilon_0$$

Würden wir mit Exner dem Wasserdampfe eine negative Ladung zuschreiben, so würde sich  $\varepsilon_0$  zusammensetzen aus einer wohl ziemlich constanten positiven Ladung  $C_0$  der Luft (wir wollen diese Menge, um im Einklang mit der Exner'schen Formel zu bleiben,  $C_0 = \frac{A}{4\pi}$  nennen), und einer negativen, vom Potentialgefälle und dem Dampfdrucke  $p_0$  abhängigen Ladung  $-kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ . Das heisst, es wäre

$$\varepsilon_{0} = \frac{A}{4\pi} - k p_{0} \left(\frac{dV}{dh}\right)_{0}$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k p_0}.$$

Würden wir dagegen auf dem Standpunkte von Elster und Geitel stehen, dann würden wir wohl die Versuche, nach welchen gewisse negativ geladene Conductoren unter dem Einflusse ultravioletter Strahlen ihre Ladung verlieren, so deuten, dass wir annehmen, es finde unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung ein Ausgleich statt zwischen den negativ geladenen Conductoren und den positiv geladenen Luftmolekülen, so dass von der Luftladung ein, der ultravioletten Strahlung und der Dichte der Ladung des Conductors proportionaler Antheil ausgeglichen würde.

Wir hätten wieder

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{4\pi} - KJ \left( \frac{dV}{dh} \right)_0$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi KJ}.$$

Letzteres wäre aber die Formel, durch welche Elster und Geitel ihre Beobachtungen darstellen konnten.

Zu beantworten wäre dann nur noch die Frage: Wie erlangt die Luft wieder ihre normale Ladung? Steht man auf dem Standpunkt der Exner'schen Theorie, erledigt sich diese Frage wohl leicht, die von der Erde im Wasserdampfe weggeführte negative Elektricität würde im Niederschlag wieder herabkommen.

Nimmt man dagegen eine theilweise Entladung der positiv geladenen Luft unter dem Einfluss ultravioletter Strahlen an, dann können wir vorläufig auf die Frage: Wie ladet sich die Luft neu? Wieso kommt es, dass neuerliche Scheidung der Elektricität (die negative zur Erde, die positive zur Luft) eintritt?, keine Antwort geben.

#### IV. Störungen des normalen Potentialgefälles.

Die mit I bezeichnete Gleichung gilt für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche ganz allgemein. Wir können sie somit auch auf Störungen anwenden und den influenzirenden Einfluss einer Wolke oder Staubschichte durch den Ausdruck

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2 \left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

leicht berechnen.

Da, wie wir sahen, das ungestörte Potentialgefälle durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi \epsilon_0$$

dargestellt ist, so erhalten wir ganz allgemein für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, unter dem Einfluss störender Massen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a.$$

Unsere Aufgabe ist somit allein die, wiederum für die störenden Massen das Potential W und  $W_{\mathbf{0}}$  zu berechnen. Wir wollen dies nur ganz allgemein für das Vo-

lumselement einer Wolke, welches die elektri-

sche Dichte p haben möge, ausführen.

M sei jener Punkt der Atmosphäre, in welchem sich das Volumenelement dv befindet, A sei der Punkt der Erdoberfläche, für welchen wir den influenzirenden Einfluss berechnen wollen, h sei die Höhe des Punktes M über der Erdoberfläche, z sei seine Zenithdistanz.

Dann ist im Punkte A das Potential  $W_a = \frac{\rho dv}{u}$ .

Fig. 2.

In einem Punkte B in der Distanz r vom Erdmittelpunkte allgemein:

$$W = \frac{\rho dv}{\sqrt{r^2 + (a+h)^2 - 2r(a+h)\cos\vartheta}},$$

somit

$$\frac{dW}{dr} \text{ für } r = a$$

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = -\frac{\rho dv}{u^3} \left\{ a - (a+h)\cos\vartheta \right\}$$

und, da  $(a+h)\cos\vartheta-a=u\cos z$ ,

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_{a} = \frac{\cos z}{u^{2}} \rho \, dv$$

also

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = \left(\frac{1}{au} - \frac{1}{a^2} + \frac{2\cos z}{u^2}\right)\rho dv.$$

Da im Allgemeinen u gegen a sehr klein ist, so kann das zweite Glied unberücksichtigt bleiben und wir erhalten somit

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi s_0 + \left(\frac{2\cos z}{u} + \frac{1}{a}\right) \frac{\rho dv}{u}.$$

Solange der betreffende Punkt nahe dem Zenith ist, kann das Glied  $\frac{1}{a}$  unbedingt vernachlässigt werden, wenn der Punkt nahe dem Horizont liegt, dann wird  $\frac{2\cos z}{u}$  von derselben Grössenordnung sein, wie  $\frac{1}{a}$ .

Wollen wir den Einfluss einer Wolke haben, brauchen wir bloss über ihre ganze Ausdehnung zu integriren, erhalten also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 + \int \left(2\frac{\cos z}{u} + \frac{1}{a}\right) \frac{\rho dv}{u}.$$
 V)

Diese Gleichung kann unter Umständen gestatten, den Werth der Ladung einer Wolke zu ermitteln.

#### V. Zusammenfassung.

Die mathematische Behandlung eines Problems bietet den grossen Vortheil, dass sie die Consequenzen irgend einer Annahme mit absoluter Sicherheit festzustellen gestattet. Aus diesem Grunde war es wohl auch erwünscht, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche in seiner Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Massen mathematisch zu behandeln, um so eine sichere Entscheidung darüber zu ermöglichen, was bei dem Problem, welches die luftelektrischen Erscheinungen darbieten, als unbedingt sicher anzunehmen sei, was dagegen nur möglich ist, und was endlich unbedingt verworfen werden muss, weil es zu Consequenzen führt, die nicht mit den Erfahrungen in Einklang zu bringen sind.

Unzweifelhaft fest steht, wie wir sahen, die Thatsache, dass unsere Erdoberfläche eine negative Ladung besitzt. Aus dem Mittelwerthe des Potentialgefälles  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$  können wir sie berechnen nach der Formel

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_{m} \cdot a^{2}$$
 (a Erdradius).

(Wir dürfen das mittlere Potentialgefälle zu etwa 130 Volt-Meter annehmen, also E auf  $-21.10^{14}$  st. Einh. schätzen.)

Diese Ladung der Erdoberfläche ist als eine gewiss ziemlich unveränderliche Grösse anzusehen; doch ist es möglich, dass sie eine kleine jährliche Schwankung zeigt. Jedenfalls dürfen wir die Schwankungen des Potentialgefälles in ihren wesentlichsten Punkten nicht Änderungen in der Erdoberflächenladung zuschreiben.

Die Schwankungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche sind vielmehr, auch das ist sicher, auf den influenzirenden Einfluss ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen zurückzuführen. Wenn wir von diesen äusseren Massen das Potential im Erdmittelpunkt  $(W_0)$  und am Beobachtungspunkt  $(W_a)$ , sowie das Gefälle im letzteren  $\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=0}^{\infty}$  kennen, dann

ist, wo immer die äusseren Massen ihren Sitz haben mögen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche gegeben durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_{\alpha}.$$
 I)

Bei ungestörtem Potentialgefälle (Potentialniveaux parallel der Erdoberfläche) ist in einer beliebigen Höhe das Potentialgefälle

$$\frac{dV}{dh} = \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 - 4\pi\eta, \qquad \qquad \text{II)}$$

wenn  $\eta$  die Elektricitätsmenge darstellt, welche in der zwischen beiden Niveaux liegenden Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten ist.

Aus dieser Formel I folgt, dass die äusseren Massen nicht im Kosmos ihren Sitz haben können, sonst müssten sie sich vor allem in der täglichen Periode äussern, was aber nicht der Fall ist, nachdem letztere überhaupt nur einen sehr kleinen Gang aufweist.

Die elektrischen Massen, durch deren Influenzwirkung die Änderungen des Potentialgefälles zustande kommen, sind somit sicher in der Atmosphäre enthalten. Wenn dies aber der Fall ist, dann lässt sich der Influenzeinfluss sehr einfach darstellen, dann ist unter allen Umständen (bei normalem Wetter):

$$\frac{W_a-W_0}{a}+2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a=-\frac{e}{a^2}+4\pi\epsilon_0,$$

worin e die gesammte, in der Atmosphäre vorhandene Elektricität,  $\epsilon_0$  aber nur jener Theil ist, welcher in der über der Flächeneinheit (am Beobachtungsort) aufruhenden Luftsäule enthalten ist.

Es ist dann, wenn man E+e, also die Gesammtelektricität des Erdballs  $E_0$  nennt, ganz allgemein das Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch die viel einfachere Gleichung dargestellt

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\epsilon_0$$
 III)

und das Potentialgefälle in einer beliebigen Höhe

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon, \qquad IV)$$

wenn e die Elektricitätsmenge in der entsprechenden Luftsäule über dem Niveau, in welchem sich der Beobachtungsort befindet, bedeutet.

Die Änderungen des Potentialgefälles werden somit allein hervorgebracht durch die influenzirenden Elektricitätsmengen, welche in der über dem Beobachtungsort befindlichen Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten sind.

Hiernach vermögen sowohl die Theorie von F. Exner, welche den Sitz dieser Elektricität auf dem Wasserdampf sucht, als auch die Theorie von Elster und Geitel, nach welcher ein Theil der negativen Erdoberflächenladung in die Atmosphäre zerstreut wird, den Thatsachen gerecht zu werden.

Es darf aber nicht a priori angenommen werden, dass ausser der auf dem Wasserdampf eventuell vorhandenen Elektricität (nach Exner), oder ausser der vom Erdboden unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlen entwichenen Elektricität (nach Elster und Geitel), keine anderen Elektricitätsmengen in der Atmosphäre enthalten seien.

Nach Exner würde, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle 1410 Volt/Meter herrschen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0' = 1410.$$

ε' wäre die Elektricitätsmenge in der Luftsäule über dem Beobachtungsort, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre.

Da nun nach Ballonbeobachtungen in einer Höhe von nur 3000 m ein Potentialgefälle von nur etwa 15 Volt/Meter herrscht, so hätte man

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi s' = 15.$$

Es ist also  $\varepsilon_0'$ — $\varepsilon$  ein ziemlich beträchtlicher positiver Werth, d. h. wenn auch aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, hätten wir noch eine beträchtliche positive Elektricitätsmenge in der Atmosphäre anzunehmen, vermuthlich auf der Luft selbst.

Es ist somit wahrscheinlich, dass eine der negativen Erdoberflächenladung entsprechende positive Luftladung vorhanden ist, derart, dass die Gesammt-Elektricität  $E_0$  gleich Null wäre.

Auch nach der Theorie von Elster und Geitel müssten wir, um den Beobachtungen im Ballon gerecht zu werden, neben der von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektricität eine positive Ladung der Luft annehmen, würden also wohl die Thatsache der lichtelektrischen Zerstreuung so deuten, dass die positiv geladene Luft unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung befähigt werde, sich gegen gewisse negativ geladene Conductoren zu entladen und dadurch diesen ihre Elektricität zu entziehen. Sollte diese Auffassung durch das Experiment als richtig bewiesen werden, dann könnte wohl nur mehr die Theorie von Elster und Geitel zur Erklärung der luftelektrischen Erscheinungen herangezogen werden und die schöne Übereinstimmung der Exner'schen Formel mit den Beobachtungen, wäre allein durch den - man möchte fast sagen - zufälligen Zusammenhang zwischen ultravioletter Strahlung und Wasserdampfgehalt der Atmosphäre zu erklären.

Vorläufig steht wohl nur fest, dass wir es mit einer positiven, überall, wie es scheint, constanten Ladung der Atmosphäre zu thun haben, welche entweder superponirt ist von einer nega-

tiven Ladung, die auf dem Wasserdampf ihren Sitz hätte (proportional der Dichte der Erdoberflächenladung und dem Dampfgehalte der Luft); oder superponirt, beziehungsweise ausgeglichen wird, durch die unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektricität (proportional gleichfalls der Dichte der Erdoberflächenladung und der Intensität der ultravioletten Strahlung).

Beide Annahmen ergeben die gleiche Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi k p_0}$$
, beziehungsweise  $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi K J}$ ,

deren jede auch den Thatsachen der Beobachtung entspricht.

Hier vermag nur eine Erweiterung unseres Erfahrungswissens zu entscheiden; aber eine, den Umfang einer Annahme genau abgrenzende Formel kann hiebei sehr wesentliche Dienste thun.

Es liegt in der Natur der Sache, dass eine theoretische Erörterung sachlich wenig Neues bietet; ihre Hauptaufgabe ist die klare und präcise Zusammenfassung unseres bisherigen Erfahrungswissens und dessen, was mit Nothwendigkeit aus ihm folgt.

# Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung

von

#### Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei Gelegenheit meiner theoretischen Untersuchungen der Elasticitätsverhältnisse aëolotroper Substanzen 1 ergab sich behufs Entscheidung der wichtigen Frage, wann in krystallinischen Substanzen die Deformationshauptaxen mit den Hauptdruckaxen übereinstimmen, die Nothwendigkeit, für zwei Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, deren allgemeine Gleichungen gegeben sind, jene Beziehungen zwischen den Coëfficienten dieser Gleichung aufzustellen, die in dem Falle nothwendig und hinreichend sind, wenn die Hauptaxen der einen Fläche mit jenen der anderen gleichgerichtet sind. Da nun, soweit dies mir bekannt ist, dieses Problem in den Handbüchern der analytischen Geometrie nicht behandelt ist, so erlaube ich mir, das von mir gefundene Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen, deren auf irgend ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Mittelpunktsgleichungen

$$a_{x}x^{2} + a_{y}y^{2} + a_{z}z^{2} + 2b_{x}yz + 2b_{y}zx + 2b_{z}xy = d$$

$$a'_{x}x^{2} + a'_{y}y^{2} + a'_{z}z^{2} + 2b'_{x}yz + 2b'_{y}zx + 2b'_{z}xy = d'$$
(1)

sind, hier bekannt zu machen.

Dieses Kriterion findet seinen Ausdruck in den drei Gleichungen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> • Über die allgemeinsten Beziehungen endlicher Deformationen zu den zugehörigen Spannungen in anisotropen und isotropen Substanzen«. Diese Sitzungsber., 1894 (Octoberheft).

$$u = \begin{vmatrix} a_{y} - a_{z}, b_{x} \\ a'_{y} - a'_{z}, b'_{x} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{y}, b_{z} \\ b'_{y}, b'_{z} \end{vmatrix} = 0$$

$$v = \begin{vmatrix} a_{z} - a_{x}, b_{y} \\ a'_{z} - a'_{x}, b'_{y} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{z}, b_{x} \\ b'_{z}, b'_{x} \end{vmatrix} = 0$$

$$w = \begin{vmatrix} a_{x} - a_{y}, b_{z} \\ a'_{x} - a'_{y}, b'_{z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{x}, b_{y} \\ b'_{x}, b'_{y} \end{vmatrix} = 0$$

$$(2)$$

Um zunächst nachzuweisen, dass diese drei Gleichungen für die Coaxialität der beiden Flächen (1) nothwendig sind, hat man nur etwa auszugehen von den auf die Hauptaxen ξης dieser Flächen bezogenen Gleichungen derselben, welche auf die Form

$$a\xi^{2} + b\eta^{2} + c\zeta^{2} = d$$

$$a'\xi^{2} + b'\eta^{2} + c'\zeta^{2} = d'$$
(3)

gebracht werden können, wo, wenn  $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ ,  $(\beta_x \beta_y \beta_z)$ ,  $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$  die Richtungscosinus der der Annahme zufolge beiden Flächen gemeinsamen Axenrichtungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  bezeichnen,

$$a_{x} = a\alpha_{x}^{2} + b\beta_{x}^{2} + c\gamma_{x}^{2}, \qquad b_{x} = a\alpha_{y}\alpha_{z} + b\beta_{y}\beta_{z} + c\gamma_{y}\gamma_{z}$$

$$a_{y} = a\alpha_{y}^{2} + b\beta_{y}^{2} + c\gamma_{y}^{2}, \qquad b_{y} = a\alpha_{z}\alpha_{x} + b\beta_{z}\beta_{x} + c\gamma_{z}\gamma_{x}$$

$$a_{z} = a\alpha_{z}^{2} + b\beta_{z}^{2} + c\gamma_{z}^{2}, \qquad b_{z} = a\alpha_{x}\alpha_{y} + b\beta_{x}\beta_{y} + c\gamma_{x}\gamma_{y}$$

$$(4)$$

ferner

$$a'_{x} = a'\alpha_{x}^{2} + b'\beta_{x}^{2} + c'\gamma_{x}^{2}, \quad b'_{x} = a'\alpha_{y}\alpha_{z} + b'\beta_{y}\beta_{z} + c'\gamma_{y}\gamma_{z}$$

$$a'_{y} = a'\alpha_{y}^{2} + b'\beta_{y}^{2} + c'\gamma_{y}^{2}, \quad b'_{y} = a'\alpha_{z}\alpha_{x} + b'\beta_{z}\beta_{x} + c'\gamma_{z}\gamma_{x}$$

$$a'_{z} = a'\alpha_{z}^{2} + b'\beta_{z}^{2} + c'\gamma_{z}^{2}, \quad b'_{z} = a'\alpha_{x}\alpha_{y} + b'\beta_{x}\beta_{y} + c'\gamma_{x}\gamma_{y}$$

$$(5)$$

ist.

Aus diesen Werthen (4) und (5) ergibt sich nach einer einfachen Reduction, dass, wenn durch s die Summe

$$s = a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)$$

bezeichnet wird,

$$(a_y-a_z) \cdot b'_x-b_x(a'_y-a'_z) = s \cdot a_x \beta_x \gamma_x = b_y b'_z-b_z b'_y$$
  
 $(a_z-a_x) \cdot b'_y-b_y(a'_z-a'_x) = s \cdot a_y \beta_y \gamma_y = b_z b'_x-b_x b'_z$   
 $(a_x-a_y) \cdot b'_z-b_z(a'_x-a'_y) = s \cdot a_z \beta_z \gamma_z = b_x b'_y-b_y b'_x$ 

ist, wodurch die Nothwendigkeit der Gleichungen (2) nachgewiesen ist.

Um auch nachzuweisen, dass die Voraussetzung der Bedingungsgleichungen (2) für die Coaxialität der Flächen (1) hinreichend ist, benütze man die Gleichungen (4), welche ausdrücken, dass  $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ ,  $(\beta_x \beta_y \beta_z)$ ,  $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$  die Richtungscosinus der Axenrichtungen  $\xi \eta \zeta$  der ersten der beiden Flächen (1) sind, wofern die erste der Gleichungen (3) die auf diese Axen  $\xi \eta \zeta$  bezogene Gleichung dieser Fläche ist.

Aus diesen Gleichungen (4) folgt zunächst

$$A_{x} = a_{y}a_{z} - b_{x}^{2} = bc \cdot \alpha_{x}^{2} + ca \cdot \beta_{x}^{2} + ab \cdot \gamma_{x}^{2}$$

$$A_{y} = a_{z}a_{x} - b_{y}^{2} = bc \cdot \alpha_{y}^{2} + ca \cdot \beta_{y}^{2} + ab \cdot \gamma_{y}^{2}$$

$$A_{z} = a_{x}a_{y} - b_{z}^{2} = bc \cdot \alpha_{z}^{2} + ca \cdot \beta_{z}^{2} + ab \cdot \gamma_{z}^{2}$$

$$B_{x} = b_{y}b_{z} - a_{x}b_{x} = bc \cdot \alpha_{y}\alpha_{z} + ca \cdot \beta_{y}\beta_{z} + ab \cdot \gamma_{y}\gamma_{z}$$

$$B_{y} = b_{z}b_{x} - a_{y}b_{y} = bc \cdot \alpha_{z}\alpha_{x} + ca \cdot \beta_{z}\beta_{x} + ab \cdot \gamma_{z}\gamma_{x}$$

$$B_{z} = b_{x}b_{y} - a_{z}b_{z} = bc \cdot \alpha_{x}\alpha_{y} + ca \cdot \beta_{x}\beta_{y} + ab \cdot \gamma_{x}\gamma_{y}$$

$$(6)$$

Bildet man mit Zuhilfenahme der Gleichungen (2) die Summen  $a_xu+b_zv+b_y.w$ ,  $b_zu+a_yv+b_xw$ ,  $b_yu+b_xv+a_zw$ , so gelangt man, da  $A_x=a_ya_z-b_x^2$ ,  $A_y=a_za_x-b_y^2$ ,... ist, zu den mit (2) ähnlich lautenden Gleichungen

$$U = \begin{vmatrix} A_y - A_z, B_x \\ a'_y - a'_z, b'_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_y B_z \\ b'_y b'_z \end{vmatrix} = 0$$

$$V = \begin{vmatrix} A_z - A_x, B_y \\ a'_z - a'_x, b'_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_z B_x \\ b'_z b'_x \end{vmatrix} = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} A_x - A_y, B_z \\ a'_y - a'_y, b'_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_x B_y \\ b'_y b'_y \end{vmatrix} = 0$$

$$(7)$$

Werden nun durch  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $u_c$ ,  $v_a$ ... kürzehalber die Ausdrücke

$$u_{a} = -a_{y} \alpha_{z} (a'_{y} - a'_{z}) + (\alpha^{2}_{y} - \alpha^{2}_{z}) b'_{x} + \alpha_{x} \alpha_{y} b'_{y} - \alpha_{z} \alpha_{x} b'_{z}$$

$$u_{F} = -\beta_{y} \beta_{z} (a'_{y} - a'_{z}) + (\beta^{2}_{y} - \beta^{2}_{z}) b'_{x} + \beta_{x} \beta_{y} b'_{y} - \beta_{z} \beta_{x} b'_{z}$$

$$u_{c} = -\gamma_{y} \gamma_{z} (a'_{y} - a'_{z}) + (\gamma^{2}_{y} - \gamma^{2}_{z}) b'_{x} + \gamma_{x} \gamma_{y} b'_{y} - \gamma_{z} \gamma_{x} b'_{z}$$

$$v_{a} = -\alpha_{z} \alpha_{x} (a'_{z} - a'_{x}) + (\alpha^{2}_{z} - \alpha^{2}_{x}) b'_{y} + \alpha_{y} \alpha_{z} b'_{z} - \alpha_{x} \alpha_{y} b'_{x}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
(8)

bezeichnet, welche ähnlich gebildet sind, wie die Ausdrücke (2) und (7), so ersieht man aus denselben und aus den Werthen (4) und (6), dass

$$u = au_a + bu_b + cu_c, \qquad v = av_a + bv_b + cv_c,$$

$$w = aw_a + bw_b + cw_c;$$

$$U = bcu_a + cau_b + abu_c, \qquad V = bcv_a + cav_b + abv_c.$$

$$W = bcw_a + caw_b + abw_c.$$

ist. Demgemäss ist den Gleichungen (8), (7) und (2) zufolge

und dieselben Gleichungen (9) bestehen auch, wenn  $u_r$  durch  $v_r$  oder durch  $w_r$  ersetzt wird.

Sind nun *abc* von einander verschieden, so folgt aus diesen Gleichungen, dass nothwendigerweise alle  $u_r$ ,  $v_r$  und  $w_r$  verschwinden müssen, also z. B.  $u_a = 0$ ,  $v_a = 0$  und  $w_a = 0$ , daher nach (8)

$$\frac{\alpha_x a_x' + \alpha_y b_z' + \alpha_z b_y'}{\alpha_x} = \frac{\alpha_x b_z' + \alpha_z a_y' + \alpha_z \cdot b_x'}{\alpha_y} = \frac{\alpha_x b_y' + \alpha_y \cdot b_x' + \alpha_z \cdot a_z'}{\alpha_z}$$

$$= \frac{\alpha_x b_y' + \alpha_y \cdot b_x' + \alpha_z \cdot a_z'}{\alpha_z}$$
(10)

ist, welche bekannte Beziehung sofort erkennen lässt, dass die Axe  $\xi$ , deren Richtungscosinus  $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$  sind, auch eine Axe der zweiten Fläche (1) ist — und in gleicher Weise folgt aus  $u_b = v_b = w_b = 0$ , beziehungsweise aus  $u_c = v_c = w_c = 0$ , dass auch  $\eta$ , beziehungsweise  $\xi$  eine Hauptaxe derselben Fläche ist.

Sind dagegen zwei von den Grössen abc einander gleich, etwa b=c, also die erste der Flächen (1) eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe  $\xi$  ist, so folgt aus den Gleichungen (9) unmittelbar, dass entweder a=b=c, also die letztere Fläche eine Kugelfläche ist, in welchem Falle jedenfalls eine Co-

axialität der beiden Flächen (1) besteht, oder dass  $u_a = 0$  und in gleicher Weise  $v_a = 0$ ,  $w_a = 0$  ist, demnach die Doppelgleichung (10) statthat, aus welcher Doppelgleichung zu folgern ist, dass diese Rotationsaxe  $\xi$  mit einer Axe der zweiten Fläche (1) gleichgerichtet ist und daher die beiden anderen Axen dieser letzteren Fläche in die Richtung zweier Äquatorialdurchmesser der ersteren Rotationsfläche fallen, so dass auch in diesem Falle die beiden Flächen (1) coaxial sind.

#### XXIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1894.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag begonnene, im Universitätslaboratorium in Göttingen zu Ende geführte Arbeit des seither verstorbenen Dr. Heinrich Mach, betitelt: »Untersuchungen über Abietinsäure« (II. Mittheilung).

Herr Ingenieur H. Guzmann, Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung und zugehörige Skizzen eines neuen Grundprincipes der Construction von Schiffsrädern und Schiffsschrauben«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht den fünften Theil seiner Pflanzenphysiologischen Mittheilungen aus Buitenzorg unter dem Titel: »Studien über die Anisophyllie tropischer Gewächse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Lartschneider, em. Assistent der II. anatomischen Lehrkanzel an der k. k. Universität in Wien, betitelt: \*Die Steissbeinmuskeln des Menschen und ihre Beziehungen zum M. Levator ani und zur Beckenfascie (eine vergleichend anatomische Studie) «.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Paul Cohn: »Über einige Derivate des Phenylindoxazens«.

#### XXV. SITZUNG VOM 29. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvators, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übermittelte Druckwerk: \*Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil\* vor.

Ferner legt der Secretär den 44. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Akademie für das Jahr 1894 und das erschienene Heft VIII (October 1894), Abtheilung II. a. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner geologischen Forschungen in der südlichen europäischen Türkei aus den Erträgnissen der Boué-Stiftung bewilligte Reisesubvention; desgleichen dankt Herr Prof. Dr. Ed. Richter in Graz für eine ihm zum Zwecke des Studiums der Terrainformen in der Hochregion des scandinavischen Gebirges von der Akademie gewährte Reisesubvention.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Alexander Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz von Dr. G. v. Georgievics: »Über das Wesen des Färbeprocesses.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

 \*Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora des Hochgebirgstheiles der Sierra Nevada in Spanien«, von Prof. Dr. F. v. Höhnel an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

- Die Wirkungsweise der Condensatoren im Wechselstromkreise«, von Dr. Gustav Benischke in Innsbruck.
- Einige Bemerkungen zu J. Finger's Abhandlung: »Das Potential der inneren Kräfte etc. (I.)«, von Prof. Dr. Waldemar Voigt in Göttingen.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende zwei im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

- 1. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (X. Abhandlung), von Dr. J. Herzig.
- "Über die Einwirkung von Alkalien auf bromirte Phloroglucinderivate«, von J. Herzig und J. Pollak.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Ernst Roithner: »Zur Kenntniss des Äthylenoxydes«.

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil. Prag, 1894; Folio.

- Le Musée Bohême, Systême silurien du centre de la Bohême par Joachim Barrande. Ière Partie: Recherches Paléontologiques. Continuation éditée par le Musée Bohême. Vol. VIII. Tome Ier. Bryozoaires, Hydrozoaires et partie des Anthozoaires par Ph. Počta. (Text et 21 Planches.) (De la part du Musée Bohême conformément au désir exprimé par Joachim Barrande dans son testament.) Prague, 1894; 4°.
- Haeckel, E., Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. I. Theil des Entwurfs einer systematischen Phylogenie. Berlin, 1894; 8°.

### Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhandlung "Das Potential der inneren Kräfte etc."

von

#### W. Voigt.

Die von Herrn J. O. Thompson im Jahre 1891 veröffentlichten Beobachtungen i über die elastischen Dehnungen von Drähten haben mehrfache Aufmerksamkeit dadurch erregt, dass der Verfasser schon bei sehr kleinen Dehnungen — sie betrugen im Maximum noch nicht 67 mm bei einer Gesammtlänge der Drähte von 22700 mm - bedeutende Abweichungen von der Proportionalität zwischen der Grösse der Dehnung und derjenigen des streckenden Gewichtes erhielt. Da ich bei zahlreichen elastischen Messungen, die sich auf Biegung und Torsion von Prismen - auch von Metallen - bezogen, der Frage der Proportionalität grosse Aufmerksamkeit zugewandt, aber Abweichungen von irgend welchem Belang nicht erhalten hatte, so bot sich mir naturgemäss die Frage nach der Ursache der Abweichungen zwischen den von Herrn Thompson und den von mir erhaltenen Beobachtungsresultaten. Die Behandlung dieser Aufgabe habe ich in zwei im Juli 1893<sup>2</sup> und Januar 1894<sup>3</sup> verfassten Arbeiten geliefert und den Inhalt dieser Abhandlungen später zusammengefasst an einer anderen Stelle publicirt.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wied, Ann. Bd. 44, S. 555, 1891.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Götting. Nachr. 1893, Nr. 13.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Götting. Nachr. 1894, Nr. 1.

<sup>4</sup> Wied. Ann. Bd. 52, S. 536, 1894.

Gegen den Inhalt der ersten dieser Arbeiten hat Herr Jos. Finger, der etwa gleichzeitig mit mir dieselbe Frage in Angriff genommen hat, schwere Bedenken erhoben, und ich sehe mich genöthigt, auf dieselben kurz einzugehen. Ein Theil der gemachten Einwände ist allerdings durch meine oben genannte zweite Abhandlung, die Herr Finger nicht kennen konnte, da sie fast genau zu derselben Zeit publicirt ist, wie die seinige, im Voraus erledigt worden; andere beruhen auf leicht erkennbarem Missverstehen meiner Worte; immerhin bleibt bestehen, dass Herr Finger für die Componenten der elastischen Drucke wesentlich complicirtere Ausdrücke erhält, als ich, und die seinigen als richtig, die meinigen als falsch bezeichnet.

Eine einfache Überlegung zeigt nun aber, dass die Aufgabe, die sich Herr Finger gestellt hat, überhaupt eine andere ist, als die, um deren Lösung ich mich bemüht habe.

Die ältere Elasticitätstheorie setzt Deformationen von solcher Kleinheit voraus, dass die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten — welche reine Zahlen sind – neben Eins vernachlässigt werden können. Es versteht sich als o von selbst, dass bei Beobachtungen, deren Genauigkeit grösser ist, als der Werth der Deformationsgrössen, die Resultate der Theorie, vor allem die Proportionalität zwischen den wirkenden Kräften und den erzielten Deformationsgrössen, durch die Beobachtung nicht bestätigt werden können. Die se Abweichungen will ich daher die nothwendigen nennen.

Was mich an den Thompson'schen Resultaten besonders interessirte, weil es scheinbar im Widerspruch mit den Erwartungen und mit den Resultaten meiner zahlreichen und mühsamen Beobachtungen stand, war indessen etwas anderes: die Abweichungen von der Proportionalität zwischen Deformationen und Kräften unter Umständen, wo die Deformationsgrössen neben Eins vernachlässigt werden durften. Auf solche Verhältnisse bezogen sich nämlich alle meine Beobachtungen, die — schon unter dem Zwang der Zerbrechlichkeit der Krystallstäbchen — Deformationen unterhalb 1/1000 und eine Genauigkeit von etwa demselben Betrag benutzten. Diese

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Wiener Ber. Bd. 103, Abth. II a, S. 163, 1894.

Abweichungen könnte man als unerwartete bezeichnen, und auf ihre Untersuchung beziehen sich ersichtlicher Weise ganz allein meine Abhandlungen. So sage ich in der Einleitung: »Nachdem durch neuere Beobachtungen gezeigt ist, dass man unter Umständen, wo man früher die Giltigkeit der alten Formeln für selbstverständlich hielt, bereits erhebliche Abweichungen von der Proportionalität.... findet, scheint es angemessen, die Erweiterungen zu untersuchen, welche die ältere Theorie erfahren muss, um mit jenen Resultaten in Einklang zu kommen.« Die (erst hier) gesperrt gedruckten Worte charakterisiren vielleicht zu kurz, aber doch ziemlich deutlich das gestellte Problem, womit übereinstimmt, dass bei der Entwickelung desselben Resultate benutzt werden, in denen die Deformationsgrössen selbst neben Eins vernachlässigt sind.

Hiermit steht aber keineswegs im Widerspruch, dass ich in dem elastischen Potential die Glieder dritten Grades neben denen zweiten Grades eingeführt habe; denn die ersteren sind mit Constanten multiplicirt, welche von den Factoren der letzteren unabhängig sind und jedenfalls bei den Thompsonschen Beobachtungen eine solche Grösse gehabt haben, dass jene Glieder eine merkliche Wirkung äussern konnten.

Um dies hervortreten zu lassen, will ich aus den auf Messing bezüglichen Beobachtungsreihen, die übrigens den andern völlig gleichwerthig sind, einige Resultate zusammenstellen. Die erste Columne enthielt die angewandten Belastungen, die zweite die Mittelwerthe der beobachteten Dehnungen, die dritte die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe der letzteren, d. h. also, die bei den verschiedenen Anfangsbelastungen bei  $0.2\ kg$  Übergewicht eintretenden Dehnungen.

0.2 kg	7·111 mm	7·111 mm
0.4	14.269	7 · 158
0.6	21.489	$7 \cdot 220$
0.8	$28 \cdot 772$	$7 \cdot 283$
1.0	36.124	7:352 u. s. f.

Beachtet man, dass die Gesammtlänge des benutzten Drahtes 22700 mm war, so erkennt man, dass bei den vor-

stehenden Beobachtungen die Abweichungen von der Proportionalität um das Vielfache grösser waren, als die Beträge der Dilatationen, woraus die Berechtigung der von mir gewählten Fragestellung offenbar folgt.

Nachdem somit die specielle, aber in sich völlig abgeschlossene Aufgabe charakterisirt ist, die ich mir gestellt hatte, ist der Unterschied gegenüber der von Herrn Finger in Angriff genommenen leicht auszusprechen; am kürzesten in der Form. dass Herr Finger die Gesetze nicht nur jener unerwarteten, sondern auch der oben als nothwendig bezeichneten Abweichungen zum Ziel seiner Entwickelung gewählt hat. In der That geht er von der Annahme von Deformationen aus, die neben der Einheit nicht zu vernachlässigen sind.

Dass diese umfassendere Aufgabe zu complicirteren Resultaten führen muss, als die von mir behandelte speciellere, ist klar; jedenfalls müssen die von Herrn Finger abgeleiteten Werthe der Druckkräfte in die meinigen übergehen, wenn man die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten neben Eins vernachlässigt. Dies findet wirklich statt, und damit ist die Vereinbarkeit unserer beiderseitigen Resultate jedenfalls erwiesen.

Göttingen im November 1894.

Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen

von

#### Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei einer jeden homogenen Deformation irgend eines Punktsystems ist, wenn man von dessen translatorischer Bewegung absieht.

$$\begin{cases}
 x_t = a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_{31}z_0 \\
 y_t = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{32}z_0 \\
 z_t = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0
 \end{cases}$$
(1)

wofern durch  $(x_0 y_0 z_0)$  die anfänglichen und durch  $(x_t y_t z_t)$  die zur beliebigen Zeit t bestehenden, auf ein an der translatorischen Bewegung des Punktsystems theilnehmendes Axensystem bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes dieses Punktsystems bezeichnet sind und wofern die Coëfficienten

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Da sich in dieser Abhandlung öfter die Nothwendigkeit ergibt, auf zwei frühere Abhandlungen desselben Verfassers, nämlich

Finger, Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbarer Flächen zweiter Ordnung (diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a, Mai 1892, S. 1105—1142) und

Finger, Das Potential der inneren Kräfte u. s. w., I. und II. Theil (diese Sitzungsber., Bd. CIII, Abth. II. a, Februar 1894, S. 163-200 und April 1894, S. 231-250),

hinzuweisen, so soll kürzehalber für die erste dieser Abhandlungen stets das Citat W. S. 1892, für die letztere W. S. 1894 zur Anwendung kommen.

 $a_{11}a_{21}...$  irgend welche Functionen der Zeit sind, die jedoch von  $x_0 y_0 z_0$  nicht abhängen.

Bekanntlich kann nun eine jede Deformation eines beliebigen unendlich kleinen Körperelementes, dessen anfängliches Volum durch dv bezeichnet sei, als eine homogene angesehen werden, wofern die anfänglichen — auf ein an der Bewegung des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem sich beziehenden — Coordinaten (xyz) irgend eines Punktes m dieses Körperelementes durch diese Deformation, durch welche m zur Zeit t nach M gelangen möge, stets nur solche Werthe  $X = x + \xi$ ,  $Y = y + \eta$ ,  $Z = z + \xi$  erlangen, für welche die Componenten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  der stattgefundenen Verschiebung mM dauernd stetige Functionen der anfänglichen Lage (xyz) und der Zeit t sind — und zwar ist dann, wie bekannt, in (1)  $(x_0, y_0z_0)$  durch (dx, dy, dz), ferner  $(x_1y_1z_1)$  durch (dX, dY, dZ) zu ersetzen und die Coëfficienten  $a_{11}a_{21}$ ... haben dann die Werthe:

$$a_{11} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \lambda_{x}, \quad a_{21} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu_{z}, \quad a_{31} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \mu_{y}$$

$$a_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu_{z}, \quad a_{22} = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 + \lambda_{y}, \quad a_{32} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu_{x}$$

$$a_{13} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \nu_{y}, \quad a_{23} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mu_{x}, \quad a_{33} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 1 + \lambda_{z}$$

$$(2)$$

wo durch  $\lambda_x \mu_x \nu_x \dots$  kürzehalber die entsprechenden Verschiebungsderivationen, d. i. die partiellen Differentialquotienten der Componenten  $\xi \eta \zeta$  der Verschiebung bezeichnet sind.

In der allgemeinen Elasticitätstheorie sind von ganz hervorragender Bedeutung sechs Functionen  $(a_x a_y a_z b_x b_y b_z)$ , beziehungsweise  $(a_x a_y a_z b_x b_y b_z)$  der eben betrachteten neun Coëfficienten  $a_{11} cdots a_{33}$  der Grundgleichungen (1), nämlich:

$$a_{x} = a_{11}^{2} + a_{12}^{2} + a_{13}^{2} = 1 + 2 a_{x}$$

$$a_{y} = a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1 + 2 a_{y}$$

$$a_{z} = a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1 + 2 a_{z}$$

$$b_{x} = a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33}$$

$$b_{y} = a_{31} a_{11} + a_{32} a_{12} + a_{33} a_{13}$$

$$b_{z} = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23}$$
(3)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, W. S. 1894, S. 165 und 166.

George Green war der erste, der diese sechs Functionen  $a_x \dots b_z$  in Betracht gezogen und nicht nur gezeigt hat, dass die Deformation eines Körperelementes (abgesehen von dessen Drehung) in jedem Falle durch diese sechs Grössen (die Green durch  $a^2b^2c^2\alpha'\beta'\gamma'$  bezeichnet) vollständig bestimmt ist, sondern der auch klar erkannt hat, dass das Potential dU der inneren Kräfte (das \*elastische Potential\*) bei einer jeden Deformation irgend eines Körperelementes dv durch

$$dU = f.dv \tag{4}$$

ausgedrückt ist, wobei die Potentialfunction<sup>2</sup> f (von Green durch  $\varphi$  bezeichnet), mag die Deformation und das Körperelement welcher Art auch immer sein, stets nur eine Function dieser sechs Grössen  $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$  ist.

In Kürze sei auch auf die ferneren Untersuchungen über denselben Gegenstand, welche von Saint Vénant  $^3$ — dessen Behauptung, dass durch  $a_x=\frac{1}{2}$   $(a_x-1)$ ,  $a_y=\frac{1}{2}$   $(a_y-1)$ ,  $a_z=\frac{1}{2}$   $(a_z-1)$  die linearen Dilatationen in den zu den Coordinatenaxen parallelen Richtungen und durch  $b_xb_yb_z$  die entsprechenden Masse der Schiebungen (fr. glissements, engl.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> George Green, On the propagation of light in crystallized media (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839). — Green, On the laws of reflexion and refraction of light (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1838). — Siehe auch Mathematical Papers of George Green, edited by N. M. Ferrers (London 1871), p. 249, 296, 297.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass hier und auch späterhin stets als \*Potential \* dU jene Function bezeichnet ist, deren dem Zeitelemente dt entsprechendes Differential df,dv die von den inneren Kräften in diesem Zeitelemente dt geleistete mechanische Arbeit ausdrückt. Wird dagegen, wie dies häufig geschieht, das Potential  $U = \int f dv$  mit \*potenzieller Energie \* identificirt, so ist in den folgenden Gleichungen, besonders in (15), (17) u. s. w. statt f überall zu setzen (-f).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Saint Vénant, Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leur points ne sont pas très-petites. Comptes rendus, vol. XXIV (1847), p. 260—263.

slides) bestimmt sind, nur eine beschränkte Giltigkeit hat, nämlich nur für den besonderen Fall, dass die zweiten und die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen  $\lambda_x \mu_z \dots$  vernachlässigt werden — ferner von Lord Kelvin (W. Thomson), Boussines q<sup>3</sup> herrühren, hingewiesen.

Die geometrische Bedeutung dieser sechs Grössen  $a_x...b_z$  erhellt aus folgender Betrachtung:

Es seien durch  $A_{11}A_{12}...A_{33}$  die zu  $a_{11}a_{12}...a_{33}$  adjungirten Unterdeterminanten der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_x, & \mu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & 1 + \lambda_y, & \mu_x \\ \mu_y, & \nu_x, & 1 + \lambda_z \end{vmatrix}$$
 (5)

bezeichnet. Wie aus (1) unmittelbar zu ersehen ist, liegen bekanntlich jene Punkte, welche anfänglich auf einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m und deren Radius 1 ist, zur Zeit t in jenem Ellipsoid — dem sogenannten Deformationsellipsoid —, dessen Mittelpunkt M und dessen Gleichung ist

$$(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^{2} + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^{2} + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^{2} = D^{2},$$
 (6)

wofern diese Gleichung bezogen wird auf die durch den Punkt M parallel zu den früheren Coordinatenaxen gelegten Axen.

Die Halbaxen a, b, c dieses Ellipsoids, welche die Richtungen  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  der sogenannten Deformationshauptaxen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Todhunter and Pearson, A History of the Theory of Elasticity (Cambridge 1886-1893), vol. I, p. 865-867.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> W. Thomson, Equations of Equilibrium of an elastic solid deduced from the Principle of Energy. Appendix to Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of incompressible liquid (Philos. Transactions, 1863, vol. 153, p. 610). — Sir Will. Thomson, Mathematical and Physical Papers (vol. III, p. 386—394). — Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, II. Edit., part. II, p. 462.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, tome XX, Paris 1872, p. 592).

Beziehungen zwischen endlichen Desormationen u. Spannungen. haben, genügen, wenn λ<sub>1</sub>λ<sub>2</sub> λ<sub>3</sub> die Hauptdilatationen bedeuten, den Gleichungen

$$a = 1 + \lambda_1, \quad b = 1 + \lambda_2, \quad c = 1 + \lambda_3.$$
 (7)

Das dem Deformationsellipsoid (6) adjungirte 1 Ellipsoid, dessen Halbaxen mit den Axen &, \eta', \tag{7}', \tag{7}' gleichgerichtet sind und  $\frac{1}{1+\lambda_1}$ ,  $\frac{1}{1+\lambda_2}$ ,  $\frac{1}{1+\lambda_3}$  besitzen, ist jenes, dessen die Längen auf dieselben Axen bezogene Gleichung lautet:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^{2} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^{2} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^{2} = 1.$$
 (8)

Das dieser Fläche (8) congruente und derselben conjungirte<sup>2</sup> Ellipsoid ist in Bezug auf dieselben Axen durch die Gleichung bestimmt:

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^{2} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^{2} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^{2} = 1.$$
(9)

Es ist dies — den Gleichungen (1) zufolge — jenes Ellipsoid, welches anfänglich alle jene Punkte in sich enthält, die zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser 1 ist. Beachtet man die Werthe (3) der sechs Grössen  $a_x cdots b_z$ , so ersieht man, dass die Gleichung des letzten Ellipsoids (9), dessen Axenrichtungen durch ξηζ bezeichnet seien, auch die Form annehmen kann:

$$a_x.x^2 + a_y.y^2 + a_z.z^2 + 2b_x.yz + 2b_y.zx + 2b_z.xy = 1$$
, (9')

woraus sofort die geometrische Bedeutung der Grössen  $a_x ... b_z$ ersichtlich ist.

Die cubische Dilatation v des betrachteten Körperelementes, dessen Volum zur Zeit t durch dV bezeichnet sei, ist<sup>3</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1107 und 1112.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1116.

<sup>3</sup> Siehe Finger, W. S. 1894, S. 167 und 184.

$$v = \frac{dV - dv}{dv} = D - 1 = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1 = abc - 1 \quad (10)$$

und die aus den Coëfficienten der Gleichung (9') gebildete Determinante <sup>1</sup>

$$A = \begin{vmatrix} a_x & b_z & b_y \\ b_z & a_y & b_x \\ b_y & b_x & a_z \end{vmatrix} = D^2 = a^2 b^2 c^2 = (1 + \lambda_1)^2 (1 + \lambda_2)^2 (1 + \lambda_3)^2 = (1 + \nu)^2.$$
 (11)

Die den einzelnen Gliedern  $a_x cdots b_z$  dieser Determinante entsprechenden, denselben adjungirten Unterdeterminanten  $A_x cdots B_z$  entsprechen zufolge (3) den Gleichungen

$$A_{x} = a_{y}a_{z} - b_{x}^{2} = A_{11}^{2} + A_{12}^{2} + A_{13}^{2}$$

$$A_{y} = a_{z}a_{x} - b_{y}^{2} = A_{21}^{2} + A_{22}^{2} + A_{23}^{2}$$

$$A_{z} = a_{x}a_{y} - b_{z}^{2} = A_{31}^{2} + A_{32}^{2} + A_{33}^{2}$$

$$B_{x} = b_{y}b_{z} - b_{x}a_{x} = A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{23}A_{33}$$

$$B_{y} = b_{z}b_{x} - b_{y}a_{y} = A_{31}A_{11} + A_{32}A_{12} + A_{33}A_{13}$$

$$B_{z} = b_{x}b_{y} - b_{z}a_{z} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$

$$(12)$$

und zwar sind dies die Coëfficienten der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) congruenten und demselben conjungirten Ellipsoids:

$$A_x \cdot x^2 + A_y \cdot y^2 + A_z \cdot z^2 + 2B_x \cdot yz + 2B_y \cdot zx + 2B_z \cdot xy = D^2$$
, (13)

dessen Halbaxen abc in die Richtungen der Axen  $\xi\eta\zeta$  fallen.

Die in Betracht gezogene, durch die Gleichungen (1) bestimmte Deformation kann man bekanntlich zerlegen in eine reine Deformation, bei welcher nur eine einfache Dilatation (beziehungsweise Contraction) im Betrage  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  nach den Richtungen der drei Axen  $\xi \eta \zeta$  stattfindet und durch welche die Kugelfläche vom Radius 1 die Form des Ellipsoids (13) annimmt, und in eine Rotation um irgend eine Axe C, deren Richtungscosinus durch  $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$  bezeichnet seien, durch

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1106 und 1112.

welche Rotation das Ellipsoid (13) nach einer Drehung  $\vartheta$  in die schliessliche Lage des Deformationsellipsoids (6), das Ellipsoid (9) oder (9') in die Lage (8), kurz das Axensystem  $\xi \eta \zeta$  in die Lage des Axensystems  $\xi' \eta' \zeta'$  gelangt.

Noch anschaulicher wird die geometrische Bedeutung der sechs in Betracht kommenden Grössen  $a_x cdots b_z$  durch die Betrachtung jenes Tetraëders, dessen anfänglich vom Punkte m ausgehenden Kanten  $mm_1$ ,  $mm_2$ ,  $mm_3$  mit den Axen xyz gleichgerichtet und der Längeneinheit gleich sind. Die Eckpunkte  $mm_1m_2m_3$  dieses Tetraëders gelangen durch die ins Auge gefasste Deformation zur Zeit t in solche Lagen  $MM_1M_2M_3$ , für welche die relativen Coordinaten der Punkte  $M_1$ , beziehungsweise  $M_2$ , beziehungsweise  $M_3$  in Bezug auf ein durch M parallel zu xyz gelegtes Axensystem den Gleichungen (1) zufolge die Werthe  $(a_{11}a_{12}a_{13})$ , beziehungsweise  $(a_{21}a_{22}a_{22})$ , beziehungsweise  $(a_{31}a_{32}a_{33})$  besitzen, so dass für die nunmehrigen Kanten  $\overline{MM_1} = R_1$ ,  $\overline{MM_2} = R_2$ ,  $\overline{MM_3} = R_3$  und ihre Neigungswinkel  $(R_2R_3)$ ,  $(R_3R_1)$ ,  $(R_1R_2)$  sich aus (3) folgende Werthe ergeben:

$$a_{x} = R_{1}^{2}, \quad a_{y} = R_{2}^{2}, \quad a_{z} = R_{3}^{2}$$

$$b_{x} = R_{2}R_{3}\cos(R_{2}R_{3}), \quad b_{y} = R_{3}R_{1}\cos(R_{3}R_{1}),$$

$$b_{z} = R_{1}R_{2}\cos(R_{1}R_{2})$$
(14)

Es sind somit durch die Längen und gegenseitigen Lagen der Kanten des durch die betrachtete Deformation aus dem ursprünglichen Tetraëder  $mm_1m_2m_3$  entstandenen Tetraëders  $MM_1M_2M_3$ , dessen Volum nach (5)  $\frac{1}{6}D$  ist, die sechs Grössen  $a_x \dots b_z$  bestimmt und umgekehrt.

Um nun die der betrachteten Deformation entsprechenden Componenten  $X_x Y_y ... Z_z$  der Spannung zu ermitteln, hat man auszugehen von den allgemein giltigen Gleichungen:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese neun Gleichungen wurden zuerst von Carl Neumann aufgestellt. Siehe C. Neumann, Zur Theorie der Elasticität (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1860, S. 281—318). Diese Gleichungen wurden auch vom Verfasser in einer einfachen, von Neumann's Deduction völlig verschiedenen Weise abgeleitet. Siehe Finger, W. S. 1894, S. 174.

$$D.X_{x} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{11} \frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{31} \frac{\partial f}{\partial a_{31}} \qquad D.Y_{x} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{21} \frac{\partial f}{\partial a_{32}} + a_{31} \frac{\partial f}{\partial a_{32}}$$

$$D.X_{y} = a_{12} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{31}} \qquad D.Y_{y} = a_{12} \frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{32}}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{23} \frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial a_{31}} \qquad D.Y_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{23} \frac{\partial f}{\partial a_{32}} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial a_{32}}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{33}}$$

$$D.X_{y} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{23}}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{23}}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{32} \frac{\partial f}{\partial a_{23}}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{23} \frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial a_{23}}$$

Da f als eine Function der sechs Grössen  $a_xa_y...b_z$  oder, was sich hier mehr empfiehlt, als eine Function

der sechs Grössen  $\mathfrak{a}_x = \frac{1}{2}(a_x - 1)$ ,  $\mathfrak{a}_y = \frac{1}{2}(a_y - 1)$ ,  $\mathfrak{a}_z = \frac{1}{2}(a_z - 1)$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $b_z$  anzusehen ist, so ist den

Gleichungen (3) zufolge

 $\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial f}{\partial a_x} a_{11} + \frac{\partial f}{\partial b_z} a_{21} + \frac{\partial f}{\partial b_y} a_{31}$   $\frac{\partial f}{\partial a_{12}} = \frac{\partial f}{\partial a_x} a_{12} + \frac{\partial f}{\partial b_z} a_{22} + \frac{\partial f}{\partial b_y} a_{32}$ 

(17)

u. s. w. Führt man diese Werthe in (15) ein, so findet man:

$$D.X_{x} = a_{11}^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{x}} + a_{21}^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{y}} + a_{31}^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{z}} + 2 a_{21} a_{31} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{31} a_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{31} a_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{31} a_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{31} a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{32} a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{32} a_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{32} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + 2 a_{32} a_{33} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial u_y} \qquad \frac{\partial u_z}{\partial u_z} \qquad + (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_z} =$$

$$D. Z_x = a_{13}a_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_{23}a_{21} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_{33}a_{31} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_z} + (a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{33}a_{11} + a_{31}a_{13}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_y} + (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{21} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{21} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{21} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{21} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_y} + (a_{21}a_{22} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{21}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{22}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{22}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}a_{22}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{21}a_{22} + a_{22}$$

1 Diese Formeln wurden schon von Boussinesq gefunden. Siehe Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mémoires présentés à l'Acad. des Sciences, t. XX, Paris 1872, p. 594). Es mögen nunmehr zunächst auf Grund dieser Gleichungen (17) die im Punkte M herrschenden Hauptdrucke (Hauptspannungen)  $S_1S_2S_3$  der Betrachtung unterzogen werden. Bekanntlich sind die Grössen derselben stets durch die drei Wurzeln der bezüglich S cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - S, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - S, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - S \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Demgemäss ist

$$S_{1}+S_{2}+S_{3} = X_{x}+Y_{y}+Z_{z}$$

$$S_{2}S_{3}+S_{3}S_{1}+S_{1}S_{2} = Y_{y}Z_{z}+Z_{z}X_{x}+X_{x}Y_{y}-Y_{z}^{2}-Z_{x}^{2}-X_{y}^{2}$$

$$S_{1}S_{2}S_{3} = \begin{vmatrix} X_{x} & X_{y} & X_{z} \\ Y_{x} & Y_{y} & Y_{z} \\ Z_{x} & Z_{y} & Z_{z} \end{vmatrix}$$
(18)

Führt man in diese drei Gleichungen die Werthe (17) ein und bezeichnet man kürzehalber durch  $\alpha_x \alpha_y \dots \beta_z$  die partiellen Derivationen der Potentialfunction f, nämlich

$$\alpha_{x} = \frac{\partial f}{\partial a_{x}} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_{x}}, \ \alpha_{y} = \frac{\partial f}{\partial a_{y}} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_{y}}, \ \alpha_{z} = \frac{\partial f}{\partial a_{z}} = 2 \frac{\partial f}{\partial a_{z}}$$

$$\beta_{x} = \frac{\partial f}{\partial b_{x}}, \ \beta_{y} = \frac{\partial f}{\partial b_{y}}, \ \beta_{z} = \frac{\partial f}{\partial b_{z}}$$

$$(19)$$

und bezeichnet man schliesslich durch  $A_xA_yA_zB_xB_yB_z$  die den gleichbezeichneten Gliedern  $\alpha_x\alpha_y\alpha_z\beta_x\beta_y\beta_z$  adjungirten Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{x} & \beta_{z} & \beta_{y} \\ \beta_{z} & \alpha_{y} & \beta_{x} \\ \beta_{y} & \beta_{x} & \alpha_{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{x}}, & \frac{\partial f}{\partial b_{z}}, & \frac{\partial f}{\partial b_{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial b_{z}}, & \frac{\partial f}{\partial a_{y}}, & \frac{\partial f}{\partial b_{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial b_{y}}, & \frac{\partial f}{\partial b_{x}}, & \frac{\partial f}{\partial a_{z}} \end{vmatrix}$$
(20)

so findet man mit Hilfe der Relationen (18), (17) und (3)

so findet man mit Hilfe der Relationen (18), (17) und (3) 
$$S_{1}+S_{2}+S_{3}=\frac{1}{D}\cdot[a_{x}\alpha_{x}+a_{y}\alpha_{y}+a_{z}\alpha_{z}+\\+2b_{x}\beta_{x}+2b_{y}\beta_{y}+2b_{z}\beta_{z}]$$

$$S_{2}S_{3}+S_{3}S_{1}+S_{1}S_{2}=\frac{1}{D^{2}}\cdot[A_{x}A_{x}+A_{y}A_{y}+A_{z}A_{z}+\\+2B_{x}B_{x}+2B_{y}B_{y}+2B_{z}B_{z}]$$

$$S_{1}S_{2}S_{3}=\frac{1}{D}\cdot A=\frac{1}{D^{3}}\cdot AA$$
(21)

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich in einfacher Weise aus der letzten Gleichung (18), wenn man diese mit  $D^3$ multiplicirt und berücksichtigt, dass den Gleichungen (15) gemäss die Glieder  $D.X_x$ ,  $D.X_y$ ... sich bei der Bildung des Productes aus der Determinante (5) und der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \frac{\partial f}{\partial a_{13}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} & \frac{\partial f}{\partial a_{23}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{31}} & \frac{\partial f}{\partial a_{32}} & \frac{\partial f}{\partial a_{33}} \end{vmatrix}$$

nach dem Multiplicationstheorem ergeben und dass ebenso den Gleichungen (16) zufolge die Glieder dieser letzten Determinante bei der Multiplication der Determinanten (5) und (20) erhalten werden.

Da nun sämmtliche Grössen der rechten Theile der Gleichung (21) nach (11), (12), (19), (20), sofern die Potentialfunction f als eine bekannte Function der sechs Grössen  $a_x \dots b_z$  vorausgesetzt wird, bestimmbare Functionen dieser sechs Grössen sind, so lässt sich aus (21) folgern, dass auch die Grössen der Hauptspannungen (Hauptdrucke)  $S_1 S_2 S_3$ , gleich wie die Potentialfunction f, stets nur Functionen der sechs Grössen  $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$  sind.

Die Richtungen dieser Hauptspannungen, die wohl ausserdem auch von den Richtungscosinus  $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$  der Rotationsaxe C und von dem Rotationswinkel & abhängen, sind bekanntlich identisch mit den Axenrichtungen der Fläche

$$X_x x^2 + Y_y \cdot y^2 + Z_z \cdot z^2 + 2Y_z \cdot yz + 2Z_x \cdot zx + 2X_y \cdot xy = k,$$
 (22)

in welcher Gleichung k eine beliebige Constante bedeutet und mittelst welcher Fläche man in bekannter Weise für eine jede Lage des Flächenelementes, für welches die Spannung ermittelt werden soll, die Grösse und Richtung der letzteren ermitteln kann.

Substituirt man in (22) die Werthe der Spannungscomponenten aus (17), so nimmt die Gleichung der Fläche (22) die Form an:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{x}} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{y}} + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{z}} + \\ + 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{x}} + \\ + 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{y}} + \\ + 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_{z}} = D.k$$

Um zu einer einfacheren Darstellung dieser wichtigen Fläche zweiter Qrdnung, welche die Spannungen in allen Raumrichtungen in übersichtlicher Weise geometrisch anschaulich zu machen gestattet, zu gelangen, denke man sich diese Fläche (23) derart transformirt, dass durch diese Transformation die Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes dieser Fläche die Werthe

$$X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$
 (24)

annehmen, so dass dadurch aus der Fläche (23) jene neue Fläche zweiter Ordnung entsteht, deren auf die Axen xyz bezogene Gleichung bei Anwendung der durch (19) bestimmten Bezeichnungsweise lautet:

$$\alpha_x.X^2 + \alpha_y.Y^2 + \alpha_z.Z^2 + 2\beta_x.YZ + 2\beta_y.ZX + 2\beta_z.XY = D.k.$$
 (25)

Vergleicht man die Transformationsgleichungen (24) mit den die thatsächliche Deformation des betrachteten Körper-

elementes charakterisirenden Gleichungen (1), so ersieht man, dass zwischen der Transformation (24) und der thatsächlichen Deformation lediglich derselbe Unterschied stattfindet, der auch den conjungirten congruenten Flächen (8) und (9) zu Grunde liegt, die sich blos dadurch unterscheiden, dass die Axenrichtungen  $\xi'\eta'\zeta'$  durch die Axenrichtungen  $\xi\eta\zeta$  — und umgekehrt - ersetzt sind. Es beruht demnach diese der Deformation (1) conjungirte (blos durch die Permutation der Indices der Coëfficienten sich unterscheidende) Transformation (24) darin, dass eine Ausdehnung mit der linearen Dilatation  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ nach den Richtungen der drei Axen  $\xi' \eta' \zeta'$  stattfindet und zugleich eine Rotation um die Axe  $(\varphi_x \varphi_y \varphi_z)$ , durch welche nach einer Drehung ( $-\vartheta$ ) die Axen  $\xi'\eta'\zeta'$  in die Lage  $\xi\eta\zeta$ gelangen. Es muss sonach umgekehrt aus der Fläche (25) die Fläche (23) dann entstehen, wenn die erste eine Drehung um die Axe  $(\varphi_x \varphi_y \varphi_z)$  vollzieht, durch welche nach der Drehung  $\vartheta$ die Axen  $\xi \eta \zeta$  in die Lage  $\xi' \eta' \zeta'$  gelangen, und wenn hierauf eine Ausdehnung dieser Fläche in den Richtungen  $\xi' \eta' \zeta'$ erfolgt, deren lineare Dilatation, beziehungsweisc  $(1+\lambda_1)^{-1}-1$ ,  $(1+\lambda_2)^{-1}-1$ ,  $(1+\lambda_3)^{-1}-1$  ist.

Sind nun die Flächen (9') und (25) coaxial, also die Axen  $\xi\eta\zeta$  der Fläche (9'), beziehungsweise (9) gleichgerichtet mit den Axen der Fläche (25), so müssen die Axen dieser letzteren Fläche nach der Drehung  $\vartheta$  die Richtungen  $\xi'\eta'\zeta'$  haben, und da sich durch die letztbetrachtete Ausdehnung in den zu den Hauptaxen parallelen Richtungen zwar die Gestalt, aber nicht die Axenrichtungen einer Fläche zweiter Ordnung ändern können, so müssen  $\xi'\eta'\zeta'$  auch die Richtungen der Axen der Fläche (23) sein, es muss also auch diese Fläche (23) mit dem Deformationsellipsoid (6) und mit dem Ellipsoid (8) coaxial sein — und ebenso lässt sich umgekehrt aus der Coaxialität der Flächen (23) und (6) die Coaxialität der Flächen (25) und (9') folgern. Nun sind diese beiden letztgenannten Flächen dann, und zwar nur dann coaxial, wenn folgende drei Bedingungsgleichungen bestehen: 1

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe J. Finger, Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Diese Sitzungsber., 1894, Bd. CIII, S. 1061 bis 1065.

$$\begin{vmatrix} a_{y}-a_{z}, & b_{x} \\ a_{y}-a_{z}, & \beta_{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{y}, & b_{z} \\ \beta_{y}, & \beta_{z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{x}-a_{x}, & b_{y} \\ \alpha_{z}-\alpha_{x}, & \beta_{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{z}, & b_{x} \\ \beta_{z}, & \beta_{x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{x}-a_{y}, & b_{z} \\ \alpha_{x}-\alpha_{y}, & \beta_{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{x}, & b_{y} \\ \beta_{x}, & \beta_{y} \end{vmatrix}$$
(26)

Diese drei bedeutsamen Gleichungen drücken demnach auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass die Axen  $\xi'\eta'\zeta'$  des Deformationsellipsoids (6), kurz die Deformationshauptaxen identisch sind mit den Axen der Fläche (23), d. i. mit den Hauptdruckaxen.

Wofern die drei Bedingungsgleichungen (26) bei irgend einer Deformation irgend eines Körperelementes nicht erfüllt sind, sind die kinematischen Hauptaxen verschieden von den dynamischen.

Bei der Anwendung der Grundgleichungen (17) für die Bestimmung der Spannungen darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass  $(X_xY_xZ_x)$ , beziehungsweise  $(X_yY_yZ_y)$ , beziehungsweise  $(X_zY_zZ_z)$  die Componenten der Spannung für jenes Flächenelement sind, welches im deformirten Körperelement, d. i. zur Zeit t zu der unveränderlichen (yz)-Ebene, beziehungsweise (zx)-Ebene, beziehungsweise (zx)-Ebene, beziehungsweise (xy)-Ebene parallel ist, und nur unter dieser Voraussetzung ist  $Y_z = Z_y$ ,  $Z_x = X_z$ ,  $X_y = Y_x$ .

Will man, wie dies in besonderen Fällen Kirchhoff¹ und Andere gethan haben, die Componenten  $(x_x y_x z_x)$ , beziehungsweise  $(x_y y_y z_y)$ , beziehungsweise  $(x_z y_z z_z)$  der Spannung in jenem Flächenelemente bestimmen, welches vor der hier betrachteten Deformation zur (yz)-Ebene, beziehungsweise (zx)-Ebene, beziehungsweise (xy)-Ebene parallel war, welches demgemäss zur Zeit t die Lage der Seitenebene  $(MM_2M_3)$ , beziehungsweise  $(MM_3M_1)$ , beziehungsweise  $(MM_1M_2)$  des

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Kirchhoff, Über die Bedingungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762-773.

früher betrachteten Tetraëders hat, so hat man zu beachten, dass die Richtungscosinus  $(a_1b_1c_1)$ , beziehungsweise  $(a_2b_2c_2)$ , beziehungsweise  $(a_3b_3c_3)$  der nach dem Inneren des Tetraëders gerichteten Normalen  $N_1$ , beziehungsweise  $N_2$ , beziehungsweise  $N_3$  durch die Gleichungen: <sup>1</sup>

$$\frac{a_1}{A_{11}} = \frac{b_1}{A_{12}} = \frac{c_1}{A_{13}} = \frac{1}{+\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}} = \frac{1}{+\sqrt{A_x}}$$

$$\frac{a_2}{A_{21}} = \frac{b_2}{A_{22}} = \frac{c_2}{A_{23}} = \frac{1}{+\sqrt{A_y}}$$

$$\frac{a_3}{A_{31}} = \frac{b_3}{A_{32}} = \frac{c_3}{A_{33}} = \frac{1}{+\sqrt{A_z}}$$

bestimmt sind und dass demgemäss einer bekannten allgemein giltigen Relation zufolge

$$x_{x} = X_{x}a_{1} + X_{y}b_{1} + X_{z}c_{1} = \frac{X_{x} \cdot A_{11} + X_{y} \cdot A_{12} + X_{z} \cdot A_{13}}{\sqrt{A_{x}}}$$

$$y_{x} = Y_{x}a_{1} + Y_{y}b_{1} + Y_{z}c_{1} = \frac{Y_{x} \cdot A_{11} + Y_{y} \cdot A_{12} + Y_{z} \cdot A_{13}}{\sqrt{A_{x}}}$$

$$z_{x} = Z_{x}a_{1} + Z_{y}b_{1} + Z_{z}c_{1} = \frac{Z_{x} \cdot A_{11} + Z_{y} \cdot A_{12} + Z_{z} \cdot A_{13}}{\sqrt{A_{x}}}$$

$$x_{y} = X_{x}a_{2} + X_{y}b_{2} + X_{z}c_{2} = \frac{X_{x} \cdot A_{21} + X_{y} \cdot A_{22} + X_{z} \cdot A_{23}}{\sqrt{A_{y}}}$$

u. s. w. ist.

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der Componenten  $X_x X_y \dots$  aus (15) oder jene aus (17) ein und berücksichtigt die Gleichungen (16), so findet man folgende all gemein giltige, besonders einfache Beziehungen:

$$\frac{\frac{x_{x}}{\partial f}}{\frac{\partial f}{\partial a_{11}}} = \frac{\frac{y_{x}}{\partial f}}{\frac{\partial f}{\partial a_{12}}} = \frac{z_{x}}{\frac{\partial f}{\partial a_{13}}} = \frac{1}{\sqrt{A_{x}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{y}a_{z} - b_{x}^{2}}} = \frac{1}{R_{2}R_{3}\sin(R_{2}R_{3})}$$

$$\frac{\frac{x_{y}}{\partial f}}{\frac{\partial f}{\partial a_{21}}} = \frac{\frac{y_{y}}{\partial f}}{\frac{\partial a_{22}}{\partial a_{23}}} = \frac{z_{y}}{\frac{\partial f}{\partial a_{23}}} = \frac{1}{\sqrt{A_{x}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{x}a_{x} - b_{y}^{2}}} = \frac{1}{R_{3}R_{1}\sin(R_{3}R_{1})}$$

$$\frac{x_{y}}{\frac{\partial f}{\partial a_{31}}} = \frac{y_{z}}{\frac{\partial f}{\partial a_{32}}} = \frac{z_{z}}{\frac{\partial f}{\partial a_{33}}} = \frac{1}{\sqrt{A_{z}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{x}a_{y} - b_{z}^{2}}} = \frac{1}{R_{1}R_{2}\sin(R_{1}R_{2})}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1109.

Diese Gleichungen, aus welchen sich  $x_x x_y ... z_z$  in einfacher Weise bestimmen lassen, lehren, dass die Differenzen  $y_z - z_y$ ,  $z_x - x_z$ ,  $x_y - y_x$  im Allgemeinen von Null verschieden sind.<sup>1</sup>

In der bisherigen Untersuchung wurde das betrachtete Körperelement dv als Theil eines beliebigen Körpers betrachtet, also im Allgemeinen als anisotrop (aeolotrop) angenommen.

Ist nun dieses Körperelement, wie dies von nun an stets vorausgesetzt werden soll, isotrop, so muss die lediglich von den sechs Grössen  $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$  abhängige Potentialfunction f in Folge der Isotropie von der Lage der Axen des Ellipsoids (9) vollkommen unabhängig sein. Es können daher für die Potentialfunction f von den sechs genannten Grössen, welche in ihrer Gesammtheit sowohl die Längen, als auch die Lagen der drei Hauptaxen dieses Ellipsoids eindeutig zu bestimmen gestatten und welche auch umgekehrt aus diesen Lagen und Längen in bekannter Weise vollkommen bestimmbar sind, nur jene Functionen dieser sechs Grössen massgebend sein, durch welche die Grössen der Halbaxen dieses Ellipsoids bestimmt sind.

Diese Halbaxen  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  sind aber bekanntlich genau bestimmt durch die drei Functionen

$$\sigma = a^{2} + b^{2} + c^{2} - 3 = a_{x} + a_{y} + a_{z} - 3$$

$$s = b^{2}c^{2} + c^{2}a^{2} + a^{2}b^{2} - 3 = a_{y}a_{z} + a_{z}a_{x} + a_{x}a_{y} - b_{x}^{2} - b_{y}^{2} - b_{z}^{2} - 3 = A_{x} + A_{y} + A_{z} - 3$$

$$A = a^{2}b^{2}c^{2} = a_{x}a_{y}a_{z} - a_{x}b_{x}^{2} - a_{y}b_{y}^{2} - a_{z}b_{z}^{2} + b_{x}^{2} + b_{x}^{2}b_{y}b_{z} = D^{2} = (1 + v)^{2}$$
(28)

Es ist sonach, wenn das betrachtete Körperelement isotrop ist, f blos eine Function dieser drei Grössen

Vergl. H. Poincaré, Über die Elasticitätstheorie (Comptes rendus, 112 1891], S. 914 und 915).

 $<sup>^2</sup>$  W. Thomson und P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, 1883, vol. I, part II, Appendix C(k), p. 466.

1089

Beziehungen zwischen endlichen Deformationen u. Spannungen.

 $\sigma$ , s und  $A = D^2$ , beziehungsweise eine Function von  $\sigma$ , s und der cubischen Dilatation v.

Für die partiellen Differentialquotienten (19) ergeben sich daher bei Beachtung der Gleichungen (28) nunmehr folgende Werthe:

$$\alpha_{x} = \frac{\partial f}{\partial a_{x}} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{x}} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_{x}) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_{y} a_{z} - b_{x}^{2}) \right] 
\alpha_{y} = \frac{\partial f}{\partial a_{y}} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{y}} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_{y}) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_{z} a_{x} - b_{y}^{2}) \right] 
\alpha_{z} = \frac{\partial f}{\partial a_{z}} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a_{z}} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s} (3 + \sigma - a_{z}) + \frac{\partial f}{\partial A} (a_{x} a_{y} - b_{z}^{2}) \right] 
\beta_{x} = \frac{\partial f}{\partial b_{x}} = 2 \cdot \left[ -\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_{x} + \frac{\partial f}{\partial A} (b_{y} b_{z} - b_{x} a_{x}) \right] 
\beta_{z} = \frac{\partial f}{\partial b_{y}} = 2 \cdot \left[ -\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_{y} + \frac{\partial f}{\partial A} (b_{z} b_{x} - b_{y} a_{y}) \right] 
\beta_{z} = \frac{\partial f}{\partial b_{z}} = 2 \cdot \left[ -\frac{\partial f}{\partial s} \cdot b_{z} + \frac{\partial f}{\partial A} (b_{x} b_{y} - b_{z} a_{z}) \right]$$

$$(29)$$

Demgemäss ist

$$\left| egin{array}{c} a_y - a_z, \; b_x \ a_y - a_z, \; a_x \end{array} 
ight| = 2 \cdot rac{\partial f}{\partial A} \left[ b_y (b_x b_y - b_z a_z) - b_z (b_z b_x - b_y a_y) 
ight] = \ = 2 \cdot rac{\partial f}{\partial A} \cdot \left| egin{array}{c} b_y & b_z \ B_y & B_z \end{array} 
ight|$$

und denselben Werth findet man für  $\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ \beta_y & \beta_z \end{vmatrix}$ . Es werden daher die erste und, wie sich in gleicher Weise zeigen lässt, auch die zweite und dritte der Bedingungsgleichungen (26) erfüllt, wodurch nachgewiesen ist, dass bei isotropen Substanzen stets die Deformationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage mit den Hauptdruckaxen zusammenfallen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Es empfiehlt sich, f nicht, wie dies Thomson thut, als Function der Quadrate  $a^2b^2c^2$  der reciproken Halbaxen der Fläche ( $\theta$ ), sondern als Function der Grössen  $\sigma$ , s und  $\nu$  zu betrachten, da es nur dadurch dem Verfasser gelang, auch die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungscomponenten zu erhalten.

(32)

(33)

(31)

1090 Um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Spannungscomponenten (17) in isotropen Substanzen

con einen mögnenst einfachen Ausdruck für die Spannungscomponenten (17) in isotropen Substanzen zu erhalten, sollen auch die Coëfficienten der auf die Form 
$$a'_x.x^2+a'_y.y^2+a'_z.z^3+2b'_x.yz+2b'_y.zx+2b'_z.xy=1$$
 (30) gebrachten Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) adjungirten Ellipsoids (8) in Rechnung gezogen

 $a_x' = a_{11}^t + a_{21}^t + a_{31}^t$ ,  $b_x' = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}$ 

werden, nämlich

 $a_y' = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2$ ,  $b_y' = a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}$   $a_z' = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2$ ,  $b_z' = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{33}$ 

 $b_z' = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}$ 

(30)

und ebenso die diesen Grössen adjungirten Coëssicienten  $A'_x \dots B'_z$  des Deformationsellipsoids (6), dessen

Gleichung (6) die Form annimmt: 
$$A'_x \cdot x^2 + A'_y \cdot y^3 + A'_z \cdot z^4 + 2B'_x \cdot yz + 2B'_y \cdot zx + 2$$

mannimmt:
$$A'_{x}.x^{2} + A'_{y}.y^{2} + A'_{z}.z^{2} + 2B'_{x}.yz + 2B'_{y}.zx + 2B'_{z}.xy = D^{2},$$

$$A'_{x} = a'_{y}a'_{z} - b'_{x}^{2} = A^{2}_{11} + A^{2}_{21} + A^{2}_{31}$$

$$A'_{y} = a'_{z}a'_{x} - b'_{x}^{2} = A^{2}_{11} + A^{2}_{22} + A^{2}_{32}$$

$$A'_{y} = a'_{x}a'_{y} - b'_{x}^{2} = A^{2}_{12} + A^{2}_{23} + A^{2}_{33}$$

$$A'_{z} = a'_{x}a'_{y} - b'_{x}^{2} = A^{2}_{13} + A^{2}_{23} + A^{2}_{33}$$

$$B'_{x} = b'_{y}b'_{z} - b'_{x}a'_{x} = A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31}$$

$$B'_{y} = b'_{z}b'_{x} - b'_{y}a'_{y} = A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31}$$

 $B_s' = b_s' b_s' - b_s' a_s' = A_{11} A_{18} + A_{21} A_{28} + A_{31} A_{38}$ 

Aus diesen Werthen der Coëfficienten (31) und (33) und aus den Gleichungen (3), (12) und (28) lassen

Aus diesen Werthen der Coëfficienten (31) und (33) und aus den Gleichungen (3), (12) und (28) lassen sich zunächst folgende für unsere Zwecke wichtige identische Relationen folgern:
$$a_{11}^{1}a_{x} + a_{21}^{2}a_{y} + a_{31}^{2}a_{z} + 2a_{21}a_{31}b_{x} + 2a_{31}a_{11}b_{y} + 2a_{11}a_{11}b_{z} = (a+3)a_{x}' + A_{x}' - (s+3)$$

$$a_{12}^{2}a_{x} + a_{22}^{2}a_{y} + a_{32}^{2}a_{z} + 2a_{21}a_{32}b_{x} + 2a_{31}a_{12}b_{y} + 2a_{11}a_{11}b_{z} = (a+3)a_{x}' + A_{x}' - (s+3)$$

$$a_{12}^{2}a_{x} + a_{22}^{2}a_{y} + a_{32}^{2}a_{z} + 2a_{21}a_{32}b_{x} + 2a_{31}a_{12}b_{y} + 2a_{11}a_{12}b_{z} = (a+3)a_{x}' + A_{x}' - (s+3)$$

$$a_{12}^{2}a_{x} + a_{22}^{2}a_{y} + a_{32}^{2}a_{z} + 2a_{21}a_{32}b_{x} + 2a_{11}a_{12}b_{y} + 2a_{11}a_{22}b_{y} + (a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11})b_{x} = (a+3)b_{x}' + B_{x}'$$

$$a_{12}a_{11}a_{x} + a_{22}a_{x1}a_{y} + a_{32}a_{31}a_{z} + (a_{12}a_{31} + a_{32}a_{11})b_{x} + (a_{32}a_{11} + a_{11}a_{32})b_{y} + (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{11})b_{z} = (a+3)b_{x}' + B_{x}'$$

$$a_{11}a_{11}a_{x} + a_{21}a_{12}a_{y} + a_{31}a_{32}a_{z} + (a_{21}a_{31}b_{x} + a_{31}a_{21})b_{x} + (a_{31}a_{11}b_{x} + a_{11}a_{21})b_{x} + (a_{11}a_{21}b_{x} + a_{21}a_{11})b_{x} = (a+3)b_{x}' + B_{x}'$$

$$a_{11}a_{11}a_{x} + a_{21}a_{21}a_{y} + a_{31}a_{31}B_{x} + 2a_{31}a_{11}B_{y} + 2a_{11}a_{21}B_{x} = A$$

$$a_{11}a_{11}a_{x} + a_{21}a_{21}a_{31}a_{31}b_{x} + 2a_{31}a_{31}B_{y} + 2a_{11}a_{21}B_{z} = A$$

$$a_{12}a_{11}A_{x} + a_{22}A_{y} + a_{32}a_{31}A_{x} + (a_{21}a_{31}B_{x} + (a_{21}a_{31})B_{x} + (a_{21}a_{31})B_{y} + (a_{11}a_{21} + a_{21}a_{11})B_{z} = 0$$

$$a_{11}a_{11}A_{x} + a_{21}a_{21}A_{y} + a_{31}a_{32}A_{z} + (a_{21}a_{31})B_{x} + (a_{31}a_{31})B_{y} + (a_{11}a_{21} + a_{21}a_{11})B_{z} = 0$$

$$a_{11}a_{11}A_{x} + a_{21}a_{21}A_{y} + a_{31}a_{22}A_{z} + (a_{21}a_{21} + a_{31}a_{22})B_{x} + (a_{31}a_{21})B_{y} + (a_{11}a_{21} + a_{21}a_{21})B_{z} = 0$$

$$a_{11}a_{11}A_{x} + a_{21}a_{21}A_{y} + a_{31}a_{22}A_{z} + (a_{21}a_{21} + a_{31}a_{22})B_{x} + (a_{31}a_{11} + a_{11}a_{22})B_{y} + (a_{11}a_{21} + a_{21}a_{21})B_{z}$$

gesuchten Grössen der Spannungscomponenten, nämlich zu den einfachen, allgemein giltigen Gleichungen Die Einsetzung der Werthe aus (29) in (17) führt bei Berücksichtigung von (34), (31) und (12) zu den für isotrope Substanzen

$$D.X_{x} = 2 \cdot \left[ a'_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \cdot \frac{\partial f}{\partial A} \right]$$

$$D.Y_{y} = 2 \cdot \left[ a'_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \cdot \frac{\partial f}{\partial A} \right]$$

$$D.Z_{z} = 2 \cdot \left[ a'_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_{z}) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + A \cdot \frac{\partial f}{\partial A} \right]$$

$$D.Y_{z} = 2 \cdot \left[ b'_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D.Z_{y}$$

$$D.Z_{x} = 2 \cdot \left[ b'_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D.X_{z}$$

$$D.X_{y} = 2 \cdot \left[ b'_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \right] = D.X_{z}$$

Da  $A = D^2$  und D = 1 + v ist, so kann auch  $A \frac{\partial f}{\partial A} = \frac{1}{2}D \cdot \frac{\partial f}{\partial D} = \frac{1}{2}D \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$  gesetzt werden; es können demnach die drei ersten Gleichungen (35) auch lauten:

$$X_{x} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_{x}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s + 3 - A'_{x}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$Y_{y} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_{y}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s + 3 - A'_{y}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$Z_{z} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \cdot \frac{a'_{z}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot \frac{s + 3 - A'_{z}}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$(36)$$

In einfacherer Weise lassen sich die allgemeinen und meines Wissens hier zum erstenmale aufgestellten Gleichungen (35) und (36) unmittelbar aus den Gleichungen (15) ableiten, wofern berücksichtigt wird, dass bei isotropen Substanzen die Potentialfunction f blos eine Function von s,  $\sigma$  und D ist und dass wegen der Congruenz der Ellipsoide (30) und (9') und in Folge der durch (28) bestimmten Bedeutung von s und  $\sigma$  auch

$$\sigma = a'_x + a'_y + a'_z - 3 
s = a'_y a'_z + a'_z a'_x + a'_x a'_y - b'_x{}^2 - b'_y{}^2 - b'_z{}^2 - 3$$
(37)

ist.

Wie nämlich aus diesen Gleichungen und aus (31) und (5) zu ersehen ist, ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_{11}} = 2a_{11}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_{21}} = 2a_{21}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_{31}} = 2a_{31}$$
$$\frac{\partial D}{\partial a_{11}} = A_{11}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{21}} = A_{21}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{31}} = A_{31}$$

ferner

$$\frac{\partial s}{\partial a_{11}} = (a'_y + a'_z) \cdot \frac{\partial a'_x}{\partial a_{11}} - 2b'_z \cdot \frac{\partial b'_z}{\partial a_{11}} - 2b'_y \cdot \frac{\partial b'_y}{\partial a_{11}}$$

$$= [\sigma + 3 - a'_x] \cdot 2a_{11} - 2b'_z \cdot a_{12} - 2b'_y \cdot a_{13}$$

$$= 2 \cdot [a_{11}(\sigma + 3) - (a_{11}a'_x + a_{12}b'_z + a_{13}b'_y)]$$

und analog

$$\begin{split} \frac{\partial s}{\partial a_{21}} &= 2\left[a_{21}(\sigma+3) - (a_{21}a'_x + a_{22}b'_z + a_{23}b'_y)\right] \\ \frac{\partial s}{\partial a_{31}} &= 2\left[a_{31}(\sigma+3) - (a_{31}a'_x + a_{32}b'_z + a_{33}b'_y)\right] \end{split}$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{11}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{21}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{21}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{31}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{31}}$$

und führt die so erhaltenen Werthe in die ersten drei Gleichungen (15) ein, so erhält man sofort bei Berücksichtigung von (31), (37) und (33) wiederum die früheren Werthe (35) von  $X_x$ ,  $X_y$ ,  $X_z$  und analog die übrigen Spannungscomponenten.

Ist also die Potentialfunction f als Function der in Folge der Gleichungen  $a=1+\lambda_1$ ,  $b=1+\lambda_2$ ,  $c=1+\lambda_3$  blos von den Hauptdilatationen  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  abhängigen Grössen (28), nämlich der Grössen  $\sigma=a^2+b^2+c^2-3$ ,  $s=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-3$ ,  $A=D^2=a^2b^2c^2$  gegeben, so sind nach (35) und (36) sämmtliche den drei willkürlichen Coordinatenebenen zugehörigen Spannungscomponenten durch die Coëfficienten der Gleichung des Ellipsoids (30) und durch die aus diesen Coëfficienten mittelst (33) leicht zu berechnenden Grössen  $A'_x \dots B'_z$  vollkommen bestimmt.

Diese Spannungen hängen daher ausser von der durch die Hauptdilatationen vollkommen bestimmten Gestalt dieses Ellipsoids auch von der relativen Lage der Hauptaxen derselben, d. i. der schliesslichen Lage der Deformationshauptaxen  $\xi'\eta'\zeta'$  in Bezug zu den Coordinatenaxen ab.

Übrigens empfiehlt es sich, das Deformationsellipsoid (32) selbst, dessen Halbaxen a, b, c mit den letzteren Axen  $\xi'\eta'\zeta'$  gleichgerichtet sind, zur Bestimmung dieser Coëfficienten und daher auch der Spannungen zu verwenden. Bringt man nämlich die Gleichung (32) des Deformationsellipsoids (in seiner schliesslichen Lage) auf die gebräuchliche Form

$$\alpha'_{x}.x^{2} + \alpha'_{y}.y^{2} + \alpha'_{z}.z^{2} + 2\beta'_{x}.yz + 2\beta'_{y}.zx + 2\beta'_{z}.xy = 1, (38)$$

so ist, wie die Vergleichung mit (32) lehrt, zunächst

$$A'_x = D^2 \cdot \alpha'_x, \quad A'_y = D^2 \cdot \alpha'_y, \quad A'_z = D^2 \cdot \alpha'_z$$
  
 $B'_x = D^2 \cdot \beta'_x, \quad B'_y = D^2 \cdot \beta'_y, \quad B'_z = D^2 \cdot \beta'_z,$ 

sonach den Gleichungen (33) zufolge

$$a'_{x} = D^{2} \cdot [\alpha'_{y} \alpha'_{z} - \beta'_{x}{}^{2}], \ a'_{y} = D^{2} \cdot [\alpha'_{z} \alpha'_{x} - \beta'_{y}{}^{2}], \ a'_{z} = D^{2} \cdot [\alpha'_{x} \alpha'_{y} - \beta'_{z}{}^{2}]$$

$$b'_{x} = D^{2} \cdot [\beta'_{y} \beta'_{z} - \beta'_{x} \alpha'_{x}], \ b'_{y} = D^{2} \cdot [\beta'_{z} \beta'_{x} - \beta'_{y} \alpha'_{y}], \ b'_{z} = D^{2} \cdot [\beta'_{x} \beta'_{y} - \beta'_{z} \alpha'_{z}],$$

so dass dadurch sämmtliche Coëfficienten in (35) durch die Coëfficienten der Gleichung (38) des Deformationsellipsoids bestimmt sind.

Um die Grössen der Hauptspannungen  $S_1S_2S_3$  zu ermitteln, hat man nur die bisher willkürlich gewählten Coordinatenaxen mit den Hauptdruckaxen, also auch mit den Axen  $\xi'\eta'\zeta'$  des Ellipsoids (30) oder (38) zu identificiren, also  $a'_x=a^2=(1+\lambda_1)^2$ ,  $a'_y=b^2=(1+\lambda_2)^2$ ,  $a'_z=c^2=(1+\lambda_3)^2$ ,  $b'_x=b'_y=b'_z=0$  zu setzen, wodurch nach (33)  $A'_x=b^2c^2$ ,  $A'_y=c^2a^2$ ,  $A'_z=a^2b^2$ ,  $B'_x=B'_y=B'_z=0$  wird. Demgemäss ergibt sich aus (36)

$$S_{1} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \frac{(1+\lambda_{1})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1+\lambda_{1})^{2} \frac{(1+\lambda_{2})^{2} + (1+\lambda_{3})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$S_{2} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \frac{(1+\lambda_{2})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1+\lambda_{2})^{2} \frac{(1+\lambda_{3})^{2} + (1+\lambda_{1})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$S_{3} = \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2 \frac{(1+\lambda_{3})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2 \cdot (1+\lambda_{3})^{2} \frac{(1+\lambda_{1})^{2} + (1+\lambda_{2})^{2}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
(39)

we nach (10)  $1 + v = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)$  ist.

Aus diesen Gleichungen ist zu ersehen, dass bei isotropen Körpern nicht nur die Potentialfunction f, sondern auch die Hauptdrucke lediglich von den Hauptdilatationen  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , beziehungsweise von den drei Grössen s, s und v abhängen.

Die Gleichung der die einzelnen Spannungen für die verschiedenen Raumrichtungen darstellenden Fläche (22), deren Axen  $\xi'\eta'\zeta'$  mit den Axen der Ellipsoide (38), (32), (30) gleichgerichtet sind, nimmt für isotrope Substanzen, wie die Substitution von (35) in (22) lehrt, und wofern kürzehalber durch u' und U' die Summen

$$u' = a'_{x} \cdot x^{2} + a'_{y} \cdot y^{2} + a'_{z} \cdot z^{2} + 2b'_{x} \cdot yz + 2b'_{y} \cdot zx + 2b'_{z} \cdot xy$$

$$U' = A'_{x} \cdot x^{2} + A'_{y} \cdot y^{2} + A'_{z} \cdot z^{2} + 2B'_{x} \cdot yz + 2B'_{y} \cdot zx + 2B'_{z} \cdot xy$$

bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$\left[D.\frac{\partial f}{\partial D} + 2(s+3)\frac{\partial f}{\partial s}\right](x^2+y^2+z^2) + 2u'.\frac{\partial f}{\partial \sigma} - 2U'.\frac{\partial f}{\partial s} = k.D.$$

Durch  $A_1$  sei die vor der betrachteten Deformation stattfindende Normalspannung bezeichnet, die wegen der im ursprünglichen Zustande vorausgesetzten Isotropie nach allen Raumrichtungen dieselbe sein muss und die ebenso wie  $X_xY_yZ_z$  positiv oder negativ in Rechnung gebracht sei, je nachdem dieselbe eine Druckspannung oder eine Zugspannung ist. Da nun im primitiven Zustande  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\nu=0$  zu setzen ist, so ist zufolge (39), wenn durch  $\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$  die für diesen Zustand bestehenden Werthe der betreffenden Differentialquotienten bezeichnet werden,

$$A_{1} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{0} + 4\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{0},\tag{40}$$

so dass die durch die Deformation allein hervorgerufene Spannung die Componenten  $(X_x-A_1)$ ,  $(Y_y-A_1)$ ,  $(Z_z-A_1)$ ,  $Y_z$ ,  $Z_x$ ,  $X_y$  hat.

Beschränkt man sich bei der Potentialfunction f auf Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ...,

also auch zufolge (28), (5), (3) und (2) bezüglich  $\sigma$ , s und  $\nu$  von nicht höherer Ordnung sind als der dritten, so kann f stets in folgender Form dargestellt werden:

$$f = A_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + b_1 \sigma + b_2 \sigma^2 + c_1 s, \tag{41}$$

indem alle anderen Glieder bis zur dritten Ordnung durch  $\nu$ ,  $\nu^2$ ,  $\nu^3$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  und s ausgedrückt werden können, da, wie die früheren Werthe von  $\nu$ , s,  $\sigma$  sofort lehren, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als der dritten,

$$s^{2} = 8v^{2} + 8v^{3} + 2\sigma^{2}, \quad v \cdot \sigma = v^{2} + \frac{1}{4}\sigma^{2}$$

$$v \cdot s = 3v^{2} + v^{3} + \frac{1}{4}\sigma^{2}, \quad \sigma \cdot s = 2v^{2} + 2v^{3} + \frac{3}{2}\sigma^{2}$$

$$\frac{\sigma^{3}}{8} = \frac{s^{3}}{64} = \frac{v\sigma^{2}}{4} = \frac{vs^{2}}{16} = \frac{v^{2}\sigma}{2} = \frac{v^{2}s}{4} = \frac{\sigma^{2}s}{16} = \frac{\sigma s^{2}}{32} = \frac{v\sigma s}{8} = v^{3}$$
ist.

Führt man nun statt der sechs Coëfficienten  $a_1a_2a_3b_1b_2c_1$  der Gleichung (41), welche lediglich von der Art und dem Zustande der der Untersuchung zu Grunde gelegten isotropen Substanz abhängen, andere sechs Elasticitätsconstanten  $A_1$   $C_1$   $B_2$   $A_1'$   $A_{21}$  und  $B_{21}$  ein, die mit den früheren durch die Gleichungen

$$\begin{split} a_1 &= A_1 - 2B_2 + B_{21} - A_{21} \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - A_1 + 2B_2 - B_{11} - A_{21} \right) \\ a_3 &= A_1' - B_{21} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \left( 2B_2 + B_{21} - A_{21} \right) \\ b_2 &= \frac{1}{4} B_{21} \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left( A_{21} - B_{21} \right) \end{split}$$

zusammenhängen, so ergeben sich auf Grund der früheren Werthe von  $D=1+\nu$ ,  $\sigma$ , s u. s. w. und der Gleichungen (35) und (36) nach einer einfachen Rechnung und wofern man bei der Berechnung von f von Gliedern, die von höherer Ordnung

als der dritten und bei der Berechnung der Spannungscomponenten von Gliedern, die von höherer Ordnung als der zweiten sind, absieht und kürzehalber  $a_{23}+a_{32}=\mu_x+\nu_x=\varepsilon_x$ ,  $a_{31}+a_{13}=\mu_y+\nu_y=\varepsilon_y$ ,  $a_{12}+a_{21}=\mu_z+\nu_z=\varepsilon_z$  setzt, folgende Gleichungen:

$$f = A_{0} + A_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) + \frac{C_{1} - A_{1}}{2} \cdot (\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + A_{1}(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) + 2B_{2}[\lambda_{x}^{2} + \lambda_{y}^{2} + \lambda_{z}^{2} + \frac{1}{2}(s_{x}^{2} + s_{y}^{2} + s_{z}^{2})] + A_{1}'(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})^{3} + (A_{1} - 2B_{2})[-(\lambda_{y} + \lambda_{z})(\lambda_{z} + \lambda_{x})(\lambda_{x} + \lambda_{y}) + \mu_{x}\mu_{y}\mu_{z} + \nu_{x}\nu_{y}\nu_{z} + \mu_{x}\nu_{x}(\lambda_{y} + \lambda_{z}) + \mu_{y}\nu_{y}(\lambda_{z} + \lambda_{x}) + \mu_{z}\nu_{z}(\lambda_{x} + \lambda_{y})] + C_{1}(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z})(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) + A_{21}(\lambda_{x}s_{x}^{2} + \lambda_{y}s_{y}^{2} + \lambda_{z}s_{z}^{2} - s_{x}s_{y}s_{z} - 4\lambda_{x}\lambda_{y}\lambda_{z}) + B_{21}[(\lambda_{y} + \lambda_{z})s_{x}^{2} + (\lambda_{z} + \lambda_{x})s_{y}^{2} + (\lambda_{x} + \lambda_{y})s_{z}^{2} + s_{x}s_{y}s_{z} - 4(\lambda_{y} + \lambda_{z})(\lambda_{z} + \lambda_{x})(\lambda_{x} + \lambda_{y})]$$

$$X_{x} = A_{1} + 4B_{2}\lambda_{x} + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{x} + \lambda_{y} + \lambda_{z}) + 2B_{2}[(\lambda_{y} + \lambda_{z})^{2} + \nu_{z}^{2} + \mu_{y}^{2}] + (C_{1} - A_{1})(\lambda_{y}\lambda_{z} + \lambda_{z}\lambda_{x} + \lambda_{x}\lambda_{y} - \mu_{x}\nu_{x} - \mu_{y}\nu_{y} - \mu_{z}\nu_{z}) - A_{21}(4\lambda_{y}\lambda_{z} - s_{x}^{2}) + B_{21}(4\lambda_{x}^{2} + s_{z}^{2} + s_{y}^{2})$$

$$Y_{z} = 2B_{2} \cdot s_{x} + 2B_{2}[\mu_{z}\nu_{y} - (\lambda_{z} + \lambda_{x}) \cdot \mu_{x} - \nu_{x}(\lambda_{x} + \lambda_{y})] - A_{21}(s_{y}s_{z} - 2\lambda_{x}s_{x}) + B_{21}[s_{y}s_{z} + 2(\lambda_{y} + \lambda_{z})s_{x}]$$

$$(43)$$

Die übrigen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation.

Besonders einfach gestalten sich die allgemeinen Gleichungen (35), wenn die Deformation der isotropen Substanz eine andauernd reine ist, d. i. von keiner Rotation des betrachteten Körperelementes begleitet ist. Da bei einer solchen Deformation bekanntlich die Grunddeterminante (5) andauernd eine symmetrische, also  $a_{23} = a_{32}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ , d. h.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Dieselben Gleichungen wurden vom Verfasser auch auf einem ganz anderen Wege abgeleitet. Siehe Finger, diese Sitzungsber., 1894, S. 189 und 192.

 $\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ ist, so besteht eine Function } F$ von xyzt — das Deformationspotential — das so beschaffen ist, dass  $\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$ . Es ist dann die

Bewegung des Körperelementes eine sogenannte Potentialbewegung, welcher ein Geschwindigkeitspotential zukommt. In diesem Falle sind die Flächen (8) und (9) identisch. Die den letzteren Flächen subjungirte Fläche, deren mit den Hauptdruckaxen gleichgerichtete Halbaxen den Quadratwurzeln der Halbaxen der Flächen (8) und (9) gleich sind, also die Längen

$$\sqrt{\frac{1}{1+\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$
,  $\sqrt{\frac{1}{1+\lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{1+\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$  haben, hat in diesem Falle die Gleichung<sup>1</sup>

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \pm 1,$$

und es ist sonach, wenn durch  $\delta$ ,  $\epsilon$  die Summen a+b+c-3 bc+ca+ab-3 bezeichnet werden

$$\delta = a+b+c-3 = \lambda_{1}+\lambda_{2}+\lambda_{3} = a_{11}+a_{22}+a_{33}-3$$

$$\epsilon = bc+ca+ab-3 = A_{11}+A_{22}+A_{33}-3 =$$

$$= a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}a_{32}-a_{31}a_{13}-a_{12}a_{21}-3$$

$$\forall = abc-1 = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{23}a_{11}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{22}a_{31}a_{13}-a_{33}a_{12}a_{21}-1$$

$$(44)$$

wo  $a_{23} = a_{32}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ ,  $a_{12} = a_{21}$  zu setzen ist.

Da nun den Gleichungen (28) und den letzteren Gleichungen gemäss

$$\sigma = \delta^2 + 6\delta - 2\varepsilon 
s = \varepsilon^2 + 6\varepsilon - 2\delta - 6\nu - 2\delta\nu$$
(45)

ist, so kann die Potentialfunction f statt als eine Function  $f(s, \sigma, \nu)$  der Variablen s,  $\sigma$  und  $\nu$  auch als Function  $\varphi(\delta, \varepsilon, \nu)$  der drei Variablen  $\delta$ ,  $\varepsilon$  und der cubischen Dilatation  $\nu$ , deren Werthe bei reinen Deformationen nach (44) aus den Verschiebungsderivationen (2) unmittelbar bestimmbar sind, angesehen werden.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1118 und 1119.

Nebenbei sei bemerkt, dass bei reinen Deformationen (aber nur bei diesen) die Potentialfunction auch als Function der drei Grössen

$$\delta = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$$

$$\gamma_1 = \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z$$

$$\zeta = \lambda_x \lambda_y \lambda_z + \mu_x \mu_y \mu_z + \nu_x \nu_y \nu_z - \lambda_x \mu_x \nu_x - \lambda_y \mu_y \nu_y - \lambda_z \mu_z \nu_z$$

wo  $\mu_x = \nu_x$ ,  $\mu_y = \nu_y$  und  $\mu_z = \nu_z$  ist, betrachtet werden kann, indem nach (44)  $\epsilon = 2\delta + \eta$ ,  $\nu = \delta + \eta + \zeta$ , ferner (jedoch nur) in diesem Falle auch  $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $\eta = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2$ ,  $\zeta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  ist; oder es kann f etwa auch als Function von  $\nu$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  angenommen werden — es ist jedoch behufs Vereinfachung der Formeln für die Spannungscomponenten empfehlenswerther, die Potentialfunction im vorliegenden Falle als eine Function von  $\delta$ ,  $\epsilon$  und  $\nu$  anzusehen. Es ist nämlich, wenn man die Potentialfunction f nunmehr durch  $\varphi$  bezeichnet, zufolge (44) und da auch  $A_{21} = A_{12}$  u. s. w. ist

$$\begin{split} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \left( a_{22} + a_{33} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} A_{11} = \frac{\partial \varphi}{\delta \delta} + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \left( 3 + \delta \right) - a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \end{split}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}} = -a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{31}} = -a_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

sonach den Gleichungen (15), (5) und (3) zufolge

$$D.X_{x} = a_{11} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - a_{x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$D.X_{y} = a_{12} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - b_{z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$D.X_{z} = a_{13} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} (3 + \delta) \right] - b_{y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$(46)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe George Green, Mathematical Papers (London 1871, Appendix, p. 332. W. Voigt, Über eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität. Wiedemann's Annalen 1894, Bd. 52, S. 538.

und analog lauten auch die anderen Gleichungen. Man kann übrigens diese Gleichungen in einfacherer Form darstellen. Es ist nämlich

$$\begin{array}{c} a_{11}(3+\delta)-a_x=a_{11}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2=\\ =(a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=A_{22}+A_{33}=\varepsilon+3-A_{11}\\ a_{12}(3+\delta)-b_z=a_{12}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22}-a_{13}a_{22}=\\ =-(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})=-A_{12}\\ a_{13}(3+\delta)-b_y=a_{13}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{31}a_{11}-a_{32}a_{12}-a_{33}a_{13}=\\ =-(a_{21}a_{22}-a_{22}a_{21})=-A_{12}\\ \end{array}$$

so dass nach (46) und den diesen analogen Gleichungen sich für alle Potentialbewegungen isotroper Substanzen folgende allgemein giltige Werthe der Spannungscomponenten ergeben:

$$X_{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{11}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{11}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$Y_{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{22}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{22}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$Z_{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{3+\varepsilon}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{a_{33}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{33}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$$

$$Y_{z} = \frac{a_{23}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{23}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = Z_{y}$$

$$Z_{x} = \frac{a_{31}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{31}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = X_{z}$$

$$X_{y} = \frac{a_{12}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \frac{A_{12}}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = Y_{x}$$

Dieselben Gleichungen lassen sich übrigens leicht auch aus (35) und (36) ableiten, wofern man die aus der Gleichung  $f(z, s, v) = \varphi(\delta, \varepsilon, v)$  und den Gleichungen (45) zu folgernden Relationen

$$\begin{split} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} &= \frac{\delta f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \delta} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot (2\delta + 6) + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (-2 - 2\nu) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot (-2) + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (2\varepsilon + 6) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \nu} + \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (-6 - 2\delta) + \frac{\partial f}{\partial \nu} \end{split}$$

in Anwendung bringt.

### SITZUNGSBERICHTE

DER

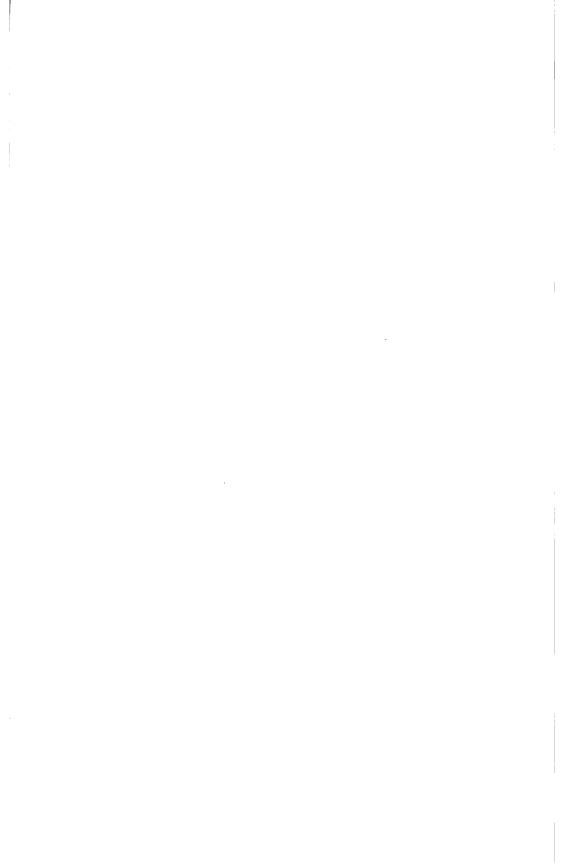
## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



### XXVI. SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 30. November 1. J. erfolgte Ableben ihres wirklichen Mitgliedes Sr. Excellenz des Herrn geheimen Rathes Dr. Cajetan Freiherrn von Felder in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

- Bildung von Propyltartronsäuren aus den Dibutyryldicyaniden«, von Prof. Karl Brunner.
- Über das Verhalten der Kalksalze einiger aromatischer Äthersäuren bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Eduard Hübner.

Herr Gejza v. Bukowski in Wien übersendet eine vorläufige Notiz über den zweiten abschliessenden Theil seiner Arbeit: Die levantinische Molluskenfauna der Insel Rhodus«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über den Phenyläther des Glycolaldehyds«, von Dr. C. Pomeranz.

# Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Foreau de Courmelles, V. De la vaginite et de son traitement. Paris, 1888; 8°. — Le magnétisme devant la loi. Paris, 1890; 8°. — Précis d'électricité médicale. Technique opératoire des applications médicales. Paris, 1892; 8°. — Revue illustrée de politechnique médicale et chirurgicale. Paris, No. 7, 1892; No. 3, 4, 6, 9, 1893; 8°.

### XXVII. SITZUNG VOM 13. DECEMBER 1894.

Der Secretär legt den 61. Band (Jahrgang 1894) der Denkschriften, ferner die aus denselben veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (III. Reise) vor.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt die Pflichtexemplare des III. Heftes zum III. Bande (in der Reihe Heft XI) seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«. Paleoniscidae. I. (Mit Taf. 113—122.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung von Dr. Julius Pohl, Privatdocent an der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über Variationsweite der Oenothera Lamarckiana«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. P. Czermak in Graz: »Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird«.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Institute der k. k. Universität in Graz:

- \*Über die Affinität einiger Basen in alkoholischer Lösung«, von Prof. Zd. H. Skraup.
- 2. •Über das Cinchotenin«, von Dr. Florian Ratz.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

- Über das Verhalten des äthylglycolsauren Kalkes bei der trockenen Destillation«, von Dr. Wilhelm Heinrich Gintl.
- 2. Über ein Cyanid und eine Carbonsäure des Isochinolins«, von stud. phil. Berthold Jeiteles.

Der Secretär legt eine von Herrn Victor Lutschaunig, Professor der Schiffbaukunde an der k. k. Akademie für Handel und Nautik in Triest, eingesendete Abhandlung vor, betitelt: Der Mittelpunkt des hydrostatischen Auftriebes«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Director Th. Fuchs in Wien: »Über die Natur und Entstehung der Stylolithen«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Wien überreicht eine vorläufige Mittheilung über eine von ihm und Herrn G. H. Bryan ausgeführte Arbeit: »Über eine mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper«.

Herr Dr. Carl Graf Attems in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Myriopoden Steiermarks«.

Schliesslich spricht Herr Vicepräsident Prof. E. Suess über den Mond und seine geologische Beschaffenheit.

## Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Lutschaunig, V., Die Definitionen und Fundamentalsätze der Theorie des Gleichgewichtes schwimmender Körper. Eine kritische Besprechung der Stabilitätstheorie der Schiffe. (Mit 11 Tafeln.) Triest, 1894; 8°.

## Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird

von

Dr. P. Czermak,

Privatdocent in Graz.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

### Zweck der Untersuchung.

Bei physikalischen Arbeiten kommt nicht selten das Bedürfniss vor, die Vertheilung der Temperatur in dünnen Drähten zu kennen, die an den Enden durch Verbindung mit gut leitenden dicken Zuleitungen auf constanter Temperatur erhalten und der Erwärmung durch einen elektrischen Strom ausgesetzt sind. Hängt ja doch der Widerstand eines so ausgespannten Drahtes von dieser Temperaturvertheilung ab. Von Glühversuchen mit dünnen Platindrähten her ist man gewohnt anzunehmen, dass nur die unmittelbar an den Enden gelegenen Theile des Drahtes schwächer oder gar nicht erheblich erwärmt werden, während man aus dem gleichmässig hellen Leuchten des übrigen Drahtes auf constante Temperaturerhöhung desselben schliesst. Genauere Versuche mit schwach erwärmten Drähten lassen aber erkennen, dass sich der abkühlende Einfluss der Zuleitungen viel weiter erstreckt, so dass man überrascht ist, wie lange man den Draht nehmen muss, um überhaupt noch in der Mitte desselben eine Strecke constanter Temperatur vorzufinden.

Zweck dieser Untersuchung ist es nun den genauen Verlauf der Temperaturen insbesondere bei sehr dünnen Drähten experimentell festzustellen, da bisher meist nur relativ dicke Stangen untersucht wurden. Die dünnen Drähte bieten dabei

den Vortheil, dass sie ungemein rasch den stationären Zustand annehmen.

Die an dünnen Drähten verschiedenen Materiales erhaltenen Daten sollen dann mit der Theorie verglichen und berechnet werden.

#### Methode.

Dieselbe stimmt im Wesentlichen mit der von J. Klemenčič¹ überein, welche derselbe an Drähten, die durch elektrische Oscillationen oder durch constante Ströme erwärmt wurden, mit Erfolg angewendet hat. Ein sehr dünnes Thermoelement wird sehr nahe und senkrecht zu dem zu untersuchenden Drahte angebracht und durch die strahlende Wärme des letzteren mit erwärmt, ohne dass dasselbe durch directe Ableitung eine Störung des Temperaturverlaufes verursachen kann. Der durch das Thermoelement erzeugte Scalenausschlag gilt als Mass der Temperaturerhöhung des stromdurchflossenen Drahtes.

### Der Apparat,

Die zu untersuchenden Drähte, welche alle durch dasselbe Zieheisen bis auf  $0\cdot 2$  mm Durchmesser ausgezogen waren, wurden zuerst an durchbohrte viereckige Kupferplättchen gelöthet und mit diesen in die 1 cm dicken Kupferstangen K, K, (siehe Tafel) eingespannt. Die Kupferstangen selbst waren in massive Messinglager geklemmt, welche gestatteten die Lage des Drahtes etwas zu corrigiren. An diese Lager waren die Zuleitungen für den constanten Strom angelöthet, welcher den Draht zu erwärmen hatte und der von einem Accumulator A und einem Widerstande W auf der gewünschten Stärke erhalten wurde.

Das Thermoelement war zwischen den  $3 \, mm$  dicken Kupferdrahtenden a b ausgespannt und dessen Löthstelle so nahe als möglich an den Draht herangeführt, ohne aber denselben zu berühren. Es war aufeinen mit Blei ausgegossenen Holzklotz C montirt, welcher mit zwei metallenen Gleitstücken 1, 2 auf einer abgedrehten Messingstange M und einer Schraube 3

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber. Bd. 101, 1892; Bd. 102, 1893; Bd. 103, 1894.

auf einer Spiegelglasplatte G parallel zu dem Drahte geführt werden konnte.

Der Abstand des Thermoelementes vom Drahte konnte durch Heben und Senken an der Schraube 3 regulirt werden und ausserdem war das Element noch in der Richtung *a b* verschiebbar, so dass man die Löthstelle stets genau unter den Draht stellen konnte.

Der ganze Klotz wurde durch eine lange Schraube S von Aussen weitergeschoben. Der Kopf der Schraube war in 100 Theile getheilt und ging neben einer Theilung T für die ganzen Umgänge. Das conisch abgerundete andere Ende der Schraube drückte gegen ein Spiegelglasstück s, welches auf den Klotz gekittet war.

So konnte der Klotz nach einer Richtung geschoben werden und für den Rückweg wurde er einfach durch eine Schnur nachgezogen. Die beiden Enden der dicken Kupferdrähte, an welche das Thermoelement gelöthet war, standen mit einem Galvanometer von Carpentier in Verbindung, und zwar ging die eine Zuleitung durch die Messingstange M über die Gleitstellen 1 und 2 zu dem Punkte b und vom Punkte a tauchte der dicke Draht in eine Quecksilberrinne R, die zum Galvanometer zurückführte.

Über den ganzen Apparat war natürlich ein Pappdeckelkasten gestürzt, der ganz mit Watte ausgekleidet war, um alle störenden Einflüsse der Strahlung und der Luftströmungen abzuhalten. Obwohl der von mir selbst angefertigte Apparat wohl nicht auf die grösste Präcision Anspruch machen konnte, zeigten trotzdem die erhaltenen Resultate eine grosse Regelmässigkeit und Übereinstimmung mit der Rechnung, die sich mit einem präciser construirten Apparate noch weiter steigern liesse.

Der schwierigste Punkt bei dieser Beobachtungsweise ist wohl die Bedingung, dass die Löthstelle des Thermoelementes immer parallel und in constantem Abstande vom Drahte geführt wird. Eigens dazu angestellte Versuche zeigten aber, dass die Empfindlichkeit für kleinere Änderungen des Abstandes nicht sehr gross ist, so dass es genügte, die Einhaltung dieser Bedingungen an dem vorliegenden Apparate nur nach dem Augenmaasse vorzunehmen.

Die grösste Drahtlänge, welche eingespannt werden konnte, betrug gegen 18 cm und erwies sich dies schon für das Kupfer kaum mehr hinreichend, für Silber war dieselbe entschieden zu gering.

Die Versuche wurden nun in folgender Weise gemacht. Nachdem der Draht eingespannt und justirt war, wurde der Strom so regulirt, dass das Galvanometer, wenn sich das Thermoelement an der Mitte des Drahtes befand, einen Ausschlag von ungefähr 120-150 Scalentheilen gab. Dies entsprach einer Erwärmung des Drahtes von rund 0·1-0·2 Graden und waren die dazu erforderlichen Stromstärken je nach dem untersuchten Materiale zwischen 0·1 und 0·01 Ampère gelegen.

Man sieht also, dass man auf diese Art im Stande ist, den Temperaturverlauf bei einem minimalen Unterschiede gegen die Umgebungstemperatur zu ermitteln. Wäre der Apparat etwas anders construirt, so wäre es nicht schwierig, die Verhältnisse der äusseren und inneren Wärmeleitungsconstanten der verschiedenen Materialien untereinander für bestimmte Temperaturen, ja sogar deren absolute Grössen zu bestimmen. Eine solche Empfindlichkeit wird wohl mit keiner anderen bisherigen Methode erreichbar sein.

Bezüglich der Erwärmung ist noch anzuführen, dass es leider nicht anging, den Strom zu schliessen und dann dem Drahte entlang das Temperaturgefälle abzusuchen. In der Galvanometerleitung war stets ein so grosser constanter Thermostrom, dass die Leitung geschlossen bleiben und die Ablenkung durch einen Magnet compensirt werden musste. Da die Schwingungsdauer der Galvanometernadel gegen 15 Secunden betrug, so wurde einfach der Erwärmungsstrom an jeder neuen Stelle durch 10 Secunden lang geschlossen und der Ausschlag beobachtet. Controlversuche ergaben, dass in dieser Zeit der stationäre Zustand im Drahte nahezu erreicht war, so dass der Verlauf der Temperaturcurve längs des Drahtes nicht wesentlich beeinflusst sein konnte.

Um die verschiedenen Drähte untereinander leichter vergleichen zu können, wurden die Ausschläge stets so reducirt, dass in der Mitte der Werth 100 angenommen wurde. Nun wurde das Thermoelement dem ganzen Draht entlang verschoben, und zwar stets von einem bis zum anderen Ende und wieder retour; aus den gleichweit von der Mitte abstehenden Werthen und den beim Hin- und Hergange erhaltenen wurde dann das Mittel genommen.

#### Theorie und Berechnung der Versuche.

Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier zeigte sich eine solche Regelmässigkeit in denselben, dass es der Mühe werth schien, dieselben auch mit der Theorie zu prüfen, obwohl die ganze Untersuchung mehr in qualitativer als in quantitativer Hinsicht unternommen wurde.

Die allgemeine Theorie des vorliegenden Problemes ist von J. Linde<sup>1</sup> durchgeführt worden und zwar für einen constanten Strom. In der Arbeit selbst sind zwei Fälle unterschieden: >1. die Stromstärke i ist constant, 2. i ist variabel mit der Zeit, und zwar soll i eine einfache Function der Zeit darstellen, also  $i = i_0 \sin 2\pi u t$ .\*

Da für den vorliegenden Fall nur der stationäre Zustand in Betracht kommt, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht und die Arbeit von J. Linde weniger bekannt sein dürfte, so will ich die hier nöthigen Gleichungen direct ableiten.

Die Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem dünnen Stabe mit Berücksichtigung der Ausstrahlung an die Umgebung ist bekanntlich:

$$c\rho q \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \left(kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hpu\right) dx dt.$$

Darin bedeuten k das innere Wärmeleitungsvermögen, h den Coëfficienten der äusseren Wärmeleitung, q den Querschnitt, p den Umfang,  $\rho$  die Dichte und c die specifische Wärme des Drahtes.

¹ »Über die Temperaturbestimmung eines Drahtes, wenn durch denselben ein galvanischer Strom fliesst« von J. Linde. Exner's Rep. Bd. 27, 1891, S. 401.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Der zweite Fall ist aber nirgends zu finden und ist überhaupt der Abhandlung eine gewisse Flüchtigkeit nicht abzusprechen, da dieselbe auf sieben Seiten an 60 Druckfehler enthält.

Die Gleichung sagt also, dass die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung eines Drahtstückes von der Länge dx, während der Zeit dt, nothwendig ist, gleich sein muss der im Innern von dx an der einen Seite mehr eintretenden, als an der andern austretenden Wärmemenge, vermindert um die durch Strahlung nach aussen während dieser Zeit gelangenden Menge.

Durchsliesst nun noch ein constanter Strom von der Stärke i den Draht, so wird in der betrachteten Zeit dt in dem Drahtstücke von der Länge dx auch noch eine Wärmemenge  $\frac{i^2w}{Aq}dxdt$  entwickelt, wenn w den specifischen Widerstand des Drahtes und A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Ein Theil der eingetretenen Temperaturerhöhung des Drahtes wird daher auch noch von dieser Wärmemenge veranlasst werden, so dass wir für diesen Fall und nach passender Abkürzung die Gleichung erhalten:

$$cpq \frac{\partial u}{\partial t} = kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hpu + \frac{i^2 w}{Aq}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{c\rho q} u + \frac{i^2 w}{c\rho q^2 A}.$$
 1)

Für den stationären Zustand muss dann gelten:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{kq} u + \frac{i^2 w}{kq^2 A}; \qquad 2)$$

setzt man

$$u=v+\frac{i^2 w}{hpqA},$$

so bekommt die Gleichung 2) die einfachere Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{hp}{ka} v, \tag{3}$$

deren Integral dann ist:

$$v = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x},$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\lambda^2 = \frac{hp}{kq}.$$

Zur Bestimmung der Constanten  $C_1$  und  $C_2$  dienen die Grenzbedingungen. Da der hier betrachtete Draht zwischen zwei sehr gut leitenden, dicken Metallbacken ausgespannt ist, so wird er erstens zu beiden Seiten seiner Mitte einen ganz symmetrischen Verlauf der Temperaturen zeigen müssen und an den beiden Enden die Temperatur der Umgebung besitzen. Nehmen wir diese als 0 an und legen den Coordinatenanfangspunkt in den einen Endpunkt des Drahtes, welcher selbst die x-Axe darstellt, so werden die Grenzbedingungen bei einer Länge des Drahtes gleich l sein:

für 
$$x = 0$$
 muss  $u = 0$  sein, für  $x = l$  muss  $u = 0$  sein.

Daraus folgen zur Bestimmung der Constanten  $C_{\mathbf{i}}$  und  $C_{\mathbf{z}}$  die beiden Gleichungen

$$0 = C_1 + C_2 + M,$$
  

$$0 = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + M,$$

welche ergeben:

$$C_{1} = -M \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}};$$

$$C_{2} = M \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}},$$

so dass schliesslich der Ausdruck für die Temperatur die Form erhält:

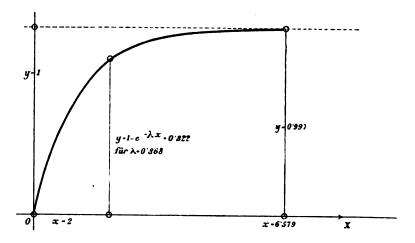
$$u = M \left[ 1 - \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x} \right]$$
 4)

Man sieht, dass mit wachsendem l der Werth des Coëfficienten von  $e^{\lambda x}$  immer kleiner wird und der von  $e^{-\lambda x}$  sich immer mehr dem Werthe -1 nähert. Für  $l = \infty$  aber folgt unmittelbar der erstere Coëfficient = 0 und der zweite = -1 als Grenzwerth. Es erhält dann die Formel 4) die einfache Gestalt

$$u = M[1 - e^{-\lambda x}]$$
 für  $l = \infty$ . 5)

Es ist dies die Gleichung einer Curve, welche ziemlich rasch, je nach dem Werthe von  $\lambda$ , ansteigt und sich dann asymptotisch der Geraden y = M nähert, also ungefähr wie die folgende Figur zeigt.

Wenn man daher die Drahtlängen so gross wählt, dass sich bei der Erwärmung durch den Strom in der Mitte ein Intervall findet, wo die Temperatur constant bleibt, so wird die Anwendung dieser Formel bereits gestattet sein oder wenigstens



als grosse Annäherung an den wirklichen Temperaturverlauf gelten können.

Setzen wir daher wieder die ursprünglichen Werthe für die Grössen M und  $\lambda$  ein, so bekommt die hier benützte Formel die Gestalt

$$u = \frac{i^2 w}{h p q A} \left[ 1 - e^{-\sqrt{\frac{h p}{kq}} x} \right]$$
 6)

und die Galvanometerausschläge, welche diesen Temperaturen proportional sind, werden einer Curve angehören müssen von der Form

$$y = au = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Ist der Draht nicht lange genug, so dass die allgemeine Formel 4) gilt, so wäre

$$y = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x}.$$
 8)

Die Coëfficienten des zweiten und dritten Gliedes kann man aber auch anders schreiben; es ist

$$\frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{il} - e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{2\lambda l} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l} - e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l} - 1}.$$

Bei nur etwas grösserem l sind dann die Grössen  $e^{\lambda l}$  und noch mehr  $e^{2\lambda l}$  so gross, dass ihnen gegenüber die Einheit von sehr geringem Einflusse wird. Es wird dann

oder

$$y = 1 - e^{-\lambda t} e^{\lambda x} + (e^{-\lambda t} - 1)e^{-\lambda x},$$

$$y = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda t} (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}).$$
9)

Dies würde eine etwas genauere Formel als Gleichung 7) darstellen. Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier stellte sich aber eine Schwierigkeit heraus. Die genaue Lage des Anfangs- und Endpunktes der Drähte gegenüber der Theilung, welche die Schraube bestimmte, konnte nicht genau ermittelt werden. Wegen der dicken Ableitungsstangen konnte das Thermoelement nie bis ganz an die Enden der Drähte, wo der Werth 0 herrschen sollte, gebracht werden, sondern man musste in einer Entfernung von einem durch Schätzung ermittelten Bruchtheile eines Millimeters beginnen. Die so beobachteten Ordinatenwerthe gehören dann einer Curve an, welche gegen das Coordinatensystem parallel der Abscissenaxe um ein kleines Stück δ verschoben ist. Um nun aus den zahlreichen Beobachtungen sowohl einen Werth für λ als auch δ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen, musste von der Anwendung der genauen Formel 8) und selbst der Formel 9) Abstand genommen werden. Es wurde Formel 7) verwendet und war selbst bei dieser die Berechnung, da mit zwei genäherten Werthen für \( \) und \( \beta \) begonnen und die Rechnung zwei- bis dreimal wiederholt werden musste, eine sehr zeitraubende.

Ist also der Anfangspunkt um das kleine Stück δ verschoben und wird Formel 7) benützt, so haben die Beobachtungen der Gleichung

$$y=1-e^{-\lambda(x-\delta)}$$

zu genügen.

Die Bestimmung von δ aber war sehr wichtig, da beim Eintragen der verschiedenen Curven, wenn dieselben nicht alle von demselben Coordinatenanfangspunkte begonnen hätten, dieselben sich durchkreuzt hätten. Da die Steilheit der Curven bei schlechter leitenden Substanzen aber gerade vom Nullpunkte aus immer bedeutender wird, so wäre eine Übersicht, wie sich die Curven nacheinander durch die Änderung des Werthes von λ anordnen, ganz unmöglich gewesen.

#### Die Versuchsergebnisse.

In den folgenden Tabellen sind die auch in das Coordinatennetz eingetragenen Werthe der Messungen zusammengestellt, und zwar wurden mehr Ordinaten berechnet als beobachtet, damit die Curven sicherer gezogen werden können. Die beobachteten Werthe sind dann als einzelne Marken eingetragen. Als Maasstab wurde für die Ordinaten die Hälfte des Maasstabes der Abscissen genommen.

#### Constantan.

Länge = 83 · 8 *mm* 

 $\lambda = 2 \cdot 3195$ 

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y = = 100(1 - e^{-\lambda x})$	y = beobachtet	Differenz
1	0.3	7.4	7.5	-0.1
2	0.8	16.2		
3	1 · 2	23.9	23 · 7	+0.5
4	1.6	31.0		
5	2.0	37.6	36.7	+0.8
6	2.9	49.0		
7	3.7	57.9	57.5	+0.4
8	4.6	65 · 6		
9	5.4	71.6	71.5	+0.1
10	6.7	78.9		
11	8.0	84.3	84.3	±0·0
12	9.3	88 · 4		
13	10.5	91.3	91.3	±0.0
14	12.2	94·1		
15	13.9	96.6	96.5	+0.1
16	15.6	97.3		·
17	17 · 3	98.2	98.1	+0.1
18	19.0	98.8		
19	20 · 7	99 · 2	99 · 2	<u>+</u> 0·0
20	22.9	99.5		
21	25.0	99 · 7	99.8	-0·i
22	27 · 1	99·8		
23	29 · 2	99 · 9	100.0	-0.1
24	31 · 4	99.93		
25	33.5	99.96	100 · 1	-0.2
26	35 · 6	99 · 97		
27	37 · 7	99.98	100 · 1	-0.2
28	39·8	99 • 99		
29	41.9	99·9 <sub>9</sub>	100.0	-0.1

## P. Czermak,

## Patentnickel.

 $\texttt{L\"{a}nge} = 82 \cdot 2 \; \textit{mm}$ 

Dicke = 0.2

 $\lambda = 2 \cdot 1702$ 

Nr.	х	$y = = 100 (1 - e^{-\lambda x})$	y = beobachtet	Differenz
1	0.7	14-1	13.1	+1.0
2	1 · 1	21.2		
3	1.6	28.6	29 · 1	-0.5
4	2.0	35 • 2		
5	2 · 4	40.6	41.5	-0.8
6	3.3	51 • 1		
7	4.1	58.9	59.2	-0.3
8	4.5	62.3		
9	5.8	71.6	71.5	+0.1
10	7 · 1	78.6		•
11	8 · 4	83 · 7	83 · 2	+0.2
12	9.6	87.6		
13	10 9	90.6	90 · 1	+0.2
14	12.6	93.5		
15	14.3	95.5	95 · 4	+0.1
16	16.0	96.9		
17	17.7	97.9	97.6	+0.3
18	19.4	98.5		
19	21 · 1	99.0	98.4	+0.6
20	23.2	99.3		
21	25 · 4	99 · 6	99.5	+0.1
22	27.5	99 · 7		
23	29.6	99.8	99 · 7	+0.1
24	31 · 7	99.9		
25	33 9	99.94	99.9	±0·0
26	<b>36</b> ·0	99 · 96		
27	38 · 1	99.97	100.3	-0.4
28	39.6	99.98		
29	41 · 1	99.99	100.0	-0.1

Platin.

 $L\ddot{a}nge = 100 \cdot 4 \, mm$ 

Dicke = 0.2

 $\lambda = 1.9841$ 

Nr.	x	$y = = 100 (1 - e^{-\lambda x})$	y = beobachtet	Differenz
1	0.5	8.7	8.7	±0·0
2	0.8	16.4		
3	1.3	22 · 9	22.6	+0 3
4	2.2	35 • 4		
5	3.0	45.0	44.8	+0.5
6	3.8	53 · 9		
7	4.7.	60.7	61.0	-0.3
8	6.0	69.6		
9	7.3	76.3	76.6	-0.3
10	8.5	81 · 1		
11	9.8	85 · 7	85.8	-0.1
12	11.5	89.8		
13	13.2	92.7	92 8	-0.1
14	14.9	94.8		
15	16 · 6	96.3	95.8	+0.2
16	18.3	97.4		
17	20.0	98 · 1	98·1	±0.0
18	21.7	98.7		
19	23 · 4	99.0	98.9	+0.1
20	25.5	99 · 4		
21	27 · 7	99.6	99.9	-0.3
22	29 · 8	99.7		
23	31.9	99.8	99.9	-0.1
24	36.2	$99 \cdot 9_2$		
25	40.4	99.97	99.9	±0.0
26	45.3	$99 \cdot 9^9$		
27	50.2	99·9 <sub>9</sub>	100.0	-0.1
İ				
1				
í		1	l	1

Eisen.

 $\begin{array}{ll} \text{Länge} = 118 \cdot 4 \, mm \\ \text{Dicke} = 0 \cdot 2 \end{array}$ 

 $\lambda = 1.4000$ 

Nr.	x	$y = 100 (1 - e^{-\lambda x})$	y = beobachtet	Differenz
1	0.8	10.0	9.6	+0.4
2	1.6	20.1		
3	2.5	29.0	29.8	-0.8
4	3.2	36 · 1		
5	4.2	44.1	43.2	+0.9
6	5.4	53.0		
7	6 · 7	60.9	60.4	+0.2
8	8.0	67 · 4		
9	9.3	72.6	72.6	±0·0
10	11.0	78.6		_
11	12.7	83.0	83.0	±0·0
12	14.4	86.7		<del></del>
13	16 · 1	89 · 4	89 • 4	±0 0
14	18.2	92.2		
15	20.3	94.2	93 · 4	+0.8
16	22.2	95.5		
17	24 · 6	96·8	96.8	<u>+</u> 0·0
18	26.7	97.6		_
19	28 · 8	98.2	98 · 2	±0·0
20	31 · 0	98.7	•	_
21	33 · 1	99.0	98.9	+0.1
22	35 · 2	99.3		
23	37.3	99.5	99 • 4	+0·1
24	39 · 4	99.6		
25	41 · 6	99 · 7	99 · 7	±0·0
26	45.8	99.8		_
27	50 · 1	99.9	99.9	<u>+</u> 0·0
28	54.6	99.6		
29	59 · 2	. 99.9	100.0	-0.1

## Aluminium.

Länge = 131.6 mm Dicke = 0.2

 $\lambda = 0.8654$ 

Nr.	х	$y = 100(1 - e^{-\lambda x})$	y = beobachtet	Differenz
1	0.8	6.4	6 · 1	+0.3
2	1.5	12.2		
3	2.5	19.2	19.1	+0.1
4	4.0	29.3		
5	5.0	35 · 2	35.6	-0.4
6	6.0	40.5		
7	7.6	48 · 1	48.5	-0.4
8	9.0	54.1		
9	11.0	61.3	61.5	-0.2
10	12.0	64.6		
11	14.4	71.2	71 · 1	+0.1
12	16.0	75.0		
13	17.8	78.5	78·2	+0.3
14	20.0	82.3		
15	22.0	85 · 1	84.9	+0.5
16	24.0	87.5		
17	26.3	89 · 7	89.0	+0.7
18	28.0	91 · 1		
19	30.5	92.9	92.6	+0.3
20	32.0	93.7		
21	34.8	95·1	95 · 1	<u>±</u> 0·0
22	37.0	95 · 7		
23	39.0	96.6	96.6	±0·0
24	41.0	97 · 1		
25	43.3	97.6	98.3	-0.7
26	45.0	98.0		
27	47.5	98.4	98.8	-0.4
28	52.0	98.9		
29	56.0	99.2	99.6	-0.4
30	61.0	99.5		
31	65.8	99 · 7	100.0	-0.3

## P. Czermak,

## Kupfer.

 $\texttt{L\"{a}nge} = 165 \cdot 5 \, \textit{mm}$ 

 $\lambda = 0.6606$ 

Dicke = 0.2

Nr.	x	$y =  = 100 (1 - e^{-\lambda x})$	x = beobachtet	Differenz
1	0.2	3.3	3.4	-0.1
2	0.9	6.0		
3 4	$\begin{array}{c} 1\cdot 4 \\ 2\cdot 2 \end{array}$	8·6 13·5	8.0	-0.4
5	3.1	18.3	18.6	-0.3
6	4.8	27 · 2		
7	6.5	34.7	34.0	+0.7
8 9	8.2	41.8	40.0	
10	9•9 11·6	47·9 53·5	47.7	+0.5
11	13.3	58.4	58.1	+0.3
12	15.0	62.9		1
13	16.7	66.7	66.0	+0.7
14 15	18·4 20·1	70.3	73.2	
16	21.8	73·4 76·3	13.2	+0.5
17	23.5	78.8	78 · 7	+0.1
18	25.2	81.1		Ì
19	26.9	83.0	82.9	+0.1
20 21	28·6 30·3	84·9 86·5	86.8	-0.3
22	32.0	87.9	80 8	
23	33.7	89.2	89.3	-0.1
24	35 · 4	90.4		
25	37.1	91.4	92.0	-0.8
26 27	38·8 40·5	92·3 93·1	93.3	-0.2
28	42.2	93.8	<i>8</i> 3 0	-0 2
29	43.9	94.5	95 · 3	0.8
30	47.3	95.6		
31 32	50.7	96.5	97 · 1	-0.6
33	54·1 57·5	97·2 97·8	98.6	-0.8
34	60.9	98.2	00 0	
35	64.3	98.6	99.6	-1.0
36	67 · 7	98.9	20.	
37 38	71·1 74·5	99·1 99·3	99 · 7	-0.6
39	77.9	99.4	99.8	-0.4
40	80.3	99.5		
41	82 · 8	99.6	100.0	-0.4

Man sieht nun zunächst deutlich den grossen Einfluss der Abkühlung bei Metallen, welche eine bessere Wärmeleitung besitzen. Die Reihenfolge der Curven ist auch geradezu jene der Wärmeleitungsfähigkeiten.

Könnte man die äussere Wärmeleitung bei allen Drähten als gleich voraussetzen, wie es für so dünne Drähte, die einer ganz gleichartigen Behandlungsweise unterworfen waren, von manchen Beobachtern behauptet wird, so würden die Verhältnisse der k darstellen.

Die Reihenfolge der  $\lambda$  ist aber auch hier dieselbe wie jene der elektrischen Leitfähigkeiten. Es wurden desshalb auch die specifischen Widerstände der untersuchten Drähte bestimmt.

Da aber von Beginn der Untersuchung auf eine genaue quantitative Übereinstimmung nicht gerechnet wurde und dem entsprechend die Anordnung nicht gewählt war, so ist auch den Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken sollen, kein definitiver Werth beizumessen. In qualitativer Hinsicht aber ist das Ergebnis gewiss massgebend. Stellt man also in diesem Sinne die Werthe zusammen, so erhält man folgende Reihenfolge:

		λ2	11.
	λ	λ <sup>2</sup> von Kupfer	w von Kupfer
Constantan	$2 \cdot 320$	12.32	30.28
Patentnickel	2.170	10.78	18.74
Platin	1.984	9.01	14.67
Eisen	1 · 400	4 · 49	5.89
Aluminium	0.865	1 · 71	1 · 84
Kupfer	0.661	1.00	1.00

Die Curven gestatten auch leicht eine Schätzung anzugeben für den Antheil, welcher durch Leitung an die Zuleitung verloren geht. Würden die Enden der Drähte gar keine Wärme verlieren, so müsste der Temperaturverlauf durch eine zur Abscissenaxe im Abstande 1. verlaufende Gerade dargestellt sein. Das Verhältniss von 1. zum Mittelwerthe aller Ordinaten wird daher angeben, welcher Antheil auf die Ableitung entfällt.

Dieser Mittelwerth wird sein:

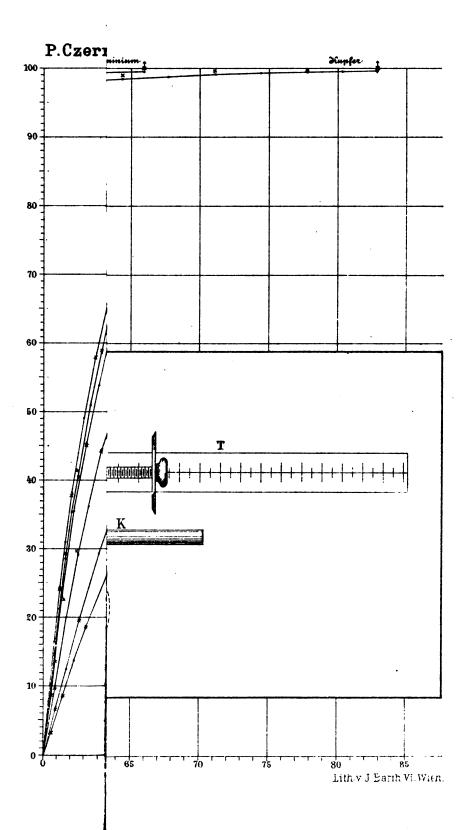
$$y_{m} = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} y \, dx = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} \left( 1 - \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{2\lambda l} - 1} e^{\lambda x} + \frac{e^{\lambda l} - e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l} - 1} e^{-\lambda x} \right) dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{\lambda l} \frac{e^{\lambda l} - 1}{e^{\lambda l} + 1}.$$

Im Allgemeinen wird man den Coëfficienten von  $2/\lambda l$  der Einheit gleichsetzen können, so dass

$$\frac{2}{\lambda l}$$

den abgeleiteten Antheil darstellt. Darauf wäre bei Bestimmung der Temperatur von Widerständen Rücksicht zu nehmen.



. 

# Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper

von

#### G. H. Bryan und L. Boltzmann.

(Mit 1 Textfigur.)

§. 1. Die fundamentalste Eigenschaft der Temperatur besteht darin, dass zwei Körper von gleicher Temperatur mit einander in Berührung gebracht, sich im Wärmegleichgewichte befinden. Aus dieser Eigenschaft konnte bisher die gastheoretische Definition der Temperatur nicht abgeleitet werden. Es konnte nur der Beweis geliefert werden, dass in einem Gemische mehrerer Gase die Bedingung des Wärmegleichgewichtes erfordert, dass die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung für jede Gattung von Gasmolekülen dieselbe sei. Aus dieser Thatsache kann dann unter Zuziehung des gastheoretischen Beweises des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie indirect der Schluss gezogen werden, dass in der kinetischen Gastheorie die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls proportional gesetzt werden muss.

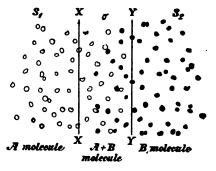
Allein alle unsere experimentellen Kenntnisse von den Eigenschaften der Temperatur sind von der Manipulation mit Körpern abgeleitet, welche sich nicht mischen und es ist nicht möglich, in einem Gemische von Gasen die Temperatur jedes einzelnen der Bestandtheile gesondert durch das Experiment

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber. Bd. 63, 1871; Bd. 66, 1872; Bd. 94, 1886; Bd. 95, 1887.

zu definiren. Wir können zwar die Temperatur der ganzen Mischung messen, aber wir haben kein Mittel, irgend eine thermometrische Substanz der Wirkung eines der Bestandtheile allein auszusetzen. Ja selbst der Begriff der Temperatur eines der Bestandtheile für sich wird schwankend.

§. 2. Unter diesen Umständen muss jedes mechanische Bild, welches die Mittheilung der Wärme von einem Körper zum andern ohne gleichzeitige Vermischung der beiden Körper durch Diffusion zu versinnlichen vermag, von hohem Interesse sein. Ein derartiges mechanisches Bild soll im Folgenden beschrieben werden. Die Idee dazu wurde von Herrn Bryan angegeben.

Es seien X und Y (siehe beistehende Figur) zwei unendliche, parallele Ebenen, die sich in geringer Entfernung von



einander befinden und den ganzen von Gas erfüllten Raum in drei Regionen theilen,  $S_1$ ,  $S_2$  und  $\sigma$ . Unter  $S_1$  verstehen wir den gesammten Raum links von X, unter  $S_2$  den Raum rechts von Y, unter  $\sigma$  den sehr dünn gedachten Raum zwischen X und Y. Übrigens würden die folgenden Schlüsse nicht an Beweiskraft verlieren, wenn X und Y zwei beliebige, allseitig sich bis zur Grenze des vom Gase erfüllten Raumes erstreckende oder auch in sich geschlossene Flächen wären, welche ohne sich zu treffen überall sehr nahe aneinander verlaufen.

Es seien nun zwei verschiedene Gattungen (A und B) von Gasmolekülen gegeben, von denen die ersteren in der Figur durch weisse, die letzteren durch schwarze Punkte dargestellt sind. Die Ebene Y soll die Moleküle A mit einer Kraft abstossen, welche links von X überall verschwindet, zwischen X

und Y aber eine Function der Entfernung des betreffenden Moleküles von der Ebene Y ist. Diese Function soll für Entfernungen, die sehr klein sind im Vergleiche zur Entfernung der Ebenen X und Y, unendlich gross werden, so dass nach der Region  $S_2$ , die sich rechts von Y befindet, niemals ein Molekül A gelangen kann. Ganz analog soll die Ebene X auf die Moleküle B mit einer Kraft abstossend wirken, welche unendlich nahe an X unendlich gross, rechts von Y aber gleich Null ist, so dass in den Raum  $S_1$ , der sich links von X befindet, niemals Moleküle B gelangen. Es soll im Übrigen weder die Ebene Y auf die Moleküle B, noch die Ebene X auf die Moleküle A eine Kraft ausüben.

Dann haben wir in  $S_1$  ein einfaches Gas, das nur Moleküle A enthält, ebenso in  $S_2$  ein anderes einfaches Gas, das nur Moleküle B enthält, in  $\sigma$  aber ein Gemisch beider Gase. Im letzteren Raume stossen fortwährend Moleküle A mit Molekülen B zusammen, so dass daselbst Wärmeaustausch stattfinden kann, wie zwischen zwei sich berührenden Körpern.

§. 3. Der hier zu betrachtende Fall ist lediglich ein Specialfall davon, dass auf ein beliebiges Gasgemisch beliebige äussere Kräfte wirken. Es handelt sich daher nur darum, die im allgemeinen Falle geltenden Formeln¹ dem speciellen Probleme anzupassen.

Es ist da gut, von generalisirten Coordinaten Gebrauch zu machen. Seien  $q_1, q_2 \dots q_m$  die generalisirten Coordinaten eines Moleküls von der Gattung A (sagen wir kurz eines A-Moleküls)  $p_1, p_2 \dots p_m$  die dazu gehörigen Momente,  $T_1$  die lebendige Kraft,  $\chi_1$  die gesammte potentielle Energie, daher  $E_1 = T_1 + \chi_1$  die totale Energie dieses Moleküls.

Ferner seien  $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$  die Coordinaten eines Moleküls von der Gattung B (B-Moleküls),  $P_1, P_2 \ldots P_n$  die dazugehörigen Momente,  $T_2$  die lebendige Kraft,  $\chi_2$  die potentielle Energie und  $E_2 = \chi_2 + T_2$  die gesammte Energie desselben.  $\chi_1$  und  $\chi_2$  können völlig verschiedene Functionen der betreffenden Coordinaten sein, so dass also auf die B-Moleküle ganz andere Kräfte als auf die A-Moleküle wirken können. Nun wurde in

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Diese Sitzungsber., Bd. 72, Oct. 1875; Bd. 78, 1878; Bd. 96, 1887.

den auf S. 1125 citirten Abhandlungen bereits Folgendes bewiesen:

Wenn die Anzahl der A-Moleküle, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differential-product

$$dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Ae^{-h_1E_1}dp_1\dots dp_m\,dq_1\dots dq_m$$

ist, so wird diese Zustandsvertheilung weder durch die Fortbewegung der A-Moleküle, noch durch die Zusammenstösse derselben untereinander verändert; sie ist also stationär, sobald man von den Zusammenstössen mit den B-Molekülen absieht. Für die letzteren gilt der analoge Satz. Abgesehen von ihren Zusammenstössen mit den A-Molekülen bleibt ihre Zustandsvertheilung sicher stationär, wenn die Zahl der Moleküle, für welche Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dP_1 \dots dP_n dQ_1 \dots dQ_n$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Be^{-h_2E_2}dP_1\dots dP_ndQ_1\dots dQ_n$$
 2)

ist. A, B,  $h_1$  und  $h_2$  sind Constanten.

§. 4. Wir haben nun noch den Effect der Zusammenstösse der A- und B-Moleküle im Raume  $\sigma$  zu betrachten. Wir betrachten da zuerst den Fall, dass die Zeitdauer eines derartigen Zusammenstosses so ausserordentlich kurz ist, dass die Coordinaten eines jeden der zusammenstossenden Moleküle im Momente des Endes des Zusammenstosses nahezu dieselben Werthe, wie im Momente des Beginnes, haben.

Wenn wir daher bloss diejenigen Zusammenstösse hervorheben, für welche die Coordinaten gegebene Werthe haben, so sind  $\chi_1$  und  $\chi_2$  constant und die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Momente ist für die beiden zusammenstossenden Moleküle

$$A_1e^{-h_1T_1}dp_1\ldots dp_m,$$

respective

$$B_1 e^{-h_1 T_2} dP_1 \dots dP_n,$$

wobei  $A_1$  und  $B_1$  für die betrachteten Zusammenstösse constant sind. Wenn wir nun setzen

$$f = A_1 e^{-h_1 T_1}, \quad F = B_1 e^{-h_2 T_2},$$

und mit f' und F' die Werthe derselben Functionen im Momente des Endes des betreffenden Zusammenstosses bezeichnen, so tritt Wärmegleichgewicht zwischen den A- und B-Molekülen ein, wenn allgemein die Gleichung besteht

$$fF = f'F', 3)$$

welche sich wegen der Constanz von  $A_1$  und  $B_1$  reducirt auf

$$e^{-(h_1T_1+h_2T_2)} = e^{-(h_1T_1+h_2T_2)},$$

woraus folgt

$$h_1 T_1 + h_2 T_2 = h_1 T_1' + h_2 T_2'$$

Wegen der Erhaltung der Energie hat man

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2'$$
.

Multiplicirt man diese Gleichung mit  $h_2$  und subtrahirt sie von der vorigen, so folgt

$$(h_1-h_2)T_1=(h_1-h_2)T_1',$$

was für alle Zusammenstösse nur erfüllt sein kann, wenn

$$h_1 \equiv h_2$$
 4)

ist. Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung ist für die A-Moleküle  $3/2 h_1$ , für die B-Moleküle  $3/2 h_2$ ; beide Werthe müssen daher gleich sein

§. 5. Herr Bryan schlug in seinem, in der »British association« zu Oxford 1894 vorgelegten Referate vor, diejenige Zustandsvertheilung unter gleich- oder verschiedenartigen Molekülen, welche für jede Molekülgattung durch die

<sup>1</sup> Vergl. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, Bd. 66, 1872, letzter Abschnitt.

Formel 1), respective 2) bestimmt ist, die Boltzmann-Maxwell'sche zu nennen, wenn die Constante h für alle Gattungen von Molekülen denselben Werth hat, ferner das Gesetz, wonach diese Zustandsvertheilung in jedem speciellen Falle stationär ist, das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz zu nennen. Wenn wir uns dieser Bezeichnung bedienen, so können wir das Resultat unserer Untersuchung dahin aussprechen, dass das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz für eine Mischung verschiedener Gase auch dann gilt, wenn auf die verschiedenen Gase ganz verschiedene äussere Kräfte wirken, sobald sich nur in einem beliebig kleinen Raume je zwei zu mischen vermögen.

Wenn wir  $h_1$  und  $h_2$  als verschieden voraussetzen, so könnten wir vielleicht, sei es mit Hilfe des Boltzmann'schen Minimumtheorems, sei es in anderer Weise, die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher in irgend einem Volumelemente des den beiden Gasen gemeinsamen Bezirks, Energie von dem einen zum anderen übergeht und durch Integration dieses Betrages über den gesammten gemeinsamen Bezirk könnten wir die Geschwindigkeit der gesammten Energieübertragung berechnen, welche wir als die Flächenleitfähigkeit der beiden Gase an ihrer gemeinsamen Berührungsfläche bezeichnen könnten.

 $\S.$  6. Die Dichten der beiden Gasarten A und B sind den Factoren

$$Ae^{-h_1\chi_1}$$
 und  $Be^{-h_2\chi_2}$  5)

der Formeln 1) und 2) proportional. In  $\chi_1$  und  $\chi_2$  sind die Potentiale der von den Ebenen X und Y ausgeübten Kräfte einbegriffen. Diese werden unendlich, sobald man eine Fläche unendlicher Abstossung passirt und bleiben jenseits derselben unendlich. In dieser Weise wird durch unsere Formel ausgedrückt, dass der Raum  $S_1$  frei von B-Molekülen, der Raum  $S_2$  frei von A-Molekülen ist und nur der Raum  $\sigma$ , wo  $\sigma$  und  $\sigma$ 0 endlich ist, von Molekülen beider Gattung erfüllt ist.

Anstatt der Annahmen des §. 2 könnten wir auch voraussetzen, dass die A-Moleküle positiv und die B-Moleküle negativ elektrisch sind. Wenn die Ladung eines A-Moleküles q, die eines B-Moleküles q' ist und die beiden Ebenen X und Y au

der constanten Potentialdifferenz V erhalten werden, so verhält sich die Dichte des Gases von der Gattung A, respective B in den Räumen  $S_1$  und  $S_2$  wie  $1:e^{-hq^V}$ , respective  $e^{-hq^{iV}}:1$ , und wenn man V so gross voraussetzt, dass die beiden Exponentiellen gegen die Einheit fast verschwinden, so werden wieder die beiden Räume  $S_1$  und  $S_2$ , deren Potential gleich dem der Begrenzungsebenen X, respective Y vorausgesetzt wird, fast nur je eine Gasart enthalten. Diese letztere Annahme hat ihr Analogon in den bekannten, durch Contact heterogener Körper erzeugten elektrischen Doppelschichten.

§. 7. Wenn an Stelle der bisher vorausgesetzten Zusammenstösse von unendlich kurzer Zeitdauer, solche von endlicher, wenn auch noch immer gegen die Zwischenzeit zweier Zusammenstösse, die dasselbe Molekül nacheinander erfährt, kurzer Zeitdauer vorausgesetzt werden, welche durch beliebige anziehende oder abstossende Kräfte bewirkt werden, so kann dasselbe Resultat mittelst der Methode bewiesen werden, welche in den Berichten der British Association unter dem Titel: »On the application, of the determinantal-relation to the kinetic theory of polyatomic gases« auseinandergesetzt ist.

Diese Gleichung zwischen den Producten der Differentiale der Coordinaten und Momente eines beliebigen conservativen Systems, welche sich einestheils auf den Beginn, anderentheils auf das Ende einer beliebigen Bewegung während einer beliebigen Zeit t'—t bezieht, hat die Form

$$\frac{\partial (p'_1 \dots p'_m, q'_1 \dots q'_m)}{\partial (p_1 \dots p_m, q_1 \dots q_m)} = 1.$$
 6)

1. Wenn wir diese Gleichung auf ein beliebiges einzelnes Molekül anwenden, das sich in einem beliebigen Felde äusserer Kräfte bewegt, ohne mit anderen zusammenzustossen, so sehen wir Folgendes: Für jedes derartige Molekül ist sowohl die gesammte Energie, als auch das Product der Differentiale  $dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m$  constant.

Wenn wir daher eine sehr grosse Zahl gleichbeschaffener Moleküle haben, und wenn

$$f_1(E_1)dp_1\ldots dq_m$$

die Zahl derjenigen bezeichnet, für welche zu einer beliebigen Zeit die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dp_1 \dots dq_m$$

gegebenen Grenzen liegen, so kann die Zustandsvertheilung durch die Bewegung der Atome in den Molekülen und die fortschreitende Bewegung der letzteren nicht verändert werden. Dabei ist  $f_1(E_1)$  eine beliebige Function von  $E_1$  allein. Auf die Zusammenstösse der Moleküle untereinander oder mit anderen Molekülen ist jedoch noch keine Rücksicht genommen. Setzen wir hier

$$f_1(E_1) = Ae^{-h_1E_1},$$

so sehen wir sofort, dass, so lange wir auf die Zusammenstösse keine Rücksicht nehmen, die durch die Formel 1) gegebene Zustandsvertheilung unter den A-Molekülen nicht verändert. Dasselbe folgt bezüglich der durch die Formel 2) gegebenen Zustandsvertheilung für die B-Moleküle.

2. Wir verstehen nun unter unserem conservativen System ein Paar zusammenstossender Moleküle, welche beide der Gattung A oder B, oder wovon eines der einen, das andere der anderen Gattung angehören können. Es wird vorausgesetzt, dass die während eines Zusammenstosses wirkenden Kräfte endliche sind und dass die Anzahl der zusammenstossenden Paare eine so grosse ist, dass man überhaupt von Mittelwerthen sprechen kann. Dann muss das Differentialproduct die Coordinaten und Momente beider Moleküle umfassen und auch unter E ist die Gesammtenergie beider Moleküle zu verstehen. Sobald daher die Anzahl der im Zusammenstosse begriffenen Molekülpaare durch den Ausdruck

$$f(E)dp_1 \dots dp_m dq_1 \dots dq_m dP_1 \dots dP_n dQ_1 \dots dQ_n$$

gegeben ist, wird diese Vertheilung ebenfalls ungeändert bleiben, so lange kein Molekül mit einem nicht dem stossenden Paare angehörigen Moleküle zusammentrifft. Aber in einem Gase wird jedes Molekül der Reihe nach mit verschiedenen Molekülen zusammenstossen, so dass nicht immer dieselben Paare als zusammengehörig betrachtet werden können. Da nun die

Grösse f eine Function der Energie allein sein soll, so muss es die wohlbekannte Form  $e^{-hE}$  haben. Denn bevor zwei Moleküle zusammenstossen, muss die Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines jeden derselben vollkommen unabhängig von dem des anderen sein. Es muss also  $f(E) = f_1 \times f_2$  sein, wobei  $f_1$  nur vom Zustande des einen,  $f_2$  von dem des anderen der stossenden Moleküle abhängen kann.

Wir können nun schreiben:

$$E = T_1 + T_2 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_{12};$$

dabei sind  $T_1$  und  $T_2$  die lebendigen Kräfte,  $\chi_1$  und  $\chi_2$  die potentiellen Energien der Moleküle, wegen der von der Anwesenheit des anderen Moleküls unabhängigen Kräfte, endlich ist  $\chi_{12}$  die potentielle Energie vermöge der Wechselwirkung beider Moleküle.

Nun müssen dieselben Gleichungen auch vor dem Zusammenstosse gelten, wo bei passender Constantenbestimmung  $\chi_{12}=0$  und  $E=E_1+E_2$  ist, wenn  $E_1$  und  $E_2$  die Einzelenergien der Moleküle sind. Daher folgt

$$f_{\mathbf{1}}f_{\mathbf{2}} \equiv f(E_{\mathbf{1}} + E_{\mathbf{2}}),$$

was nur erfüllt sein kann, wenn

$$f_1 = e^{-hE_1}, f_2 = e^{-hE_2}, f = e^{-hE}$$

ist. Daher gelten vor und nach dem Zusammenstosse die Formeln 1) und 2). Während eines Zusammenstosses aber können die beiden zusammenstossenden Moleküle nicht separat betrachtet werden und es ist die Wahrscheinlichkeit irgend einer Constellation beider Moleküle proportional  $e^{-hE}$ . Schreiben wir wie früher

$$f = e^{-h(T_1 + \chi_1 + T_2 + \chi_2 + \chi_{12})} = e^{-hT_1}e^{-hT_2}e^{-h(\chi_1 + \chi_2 + \chi_{12})},$$

so sehen wir, dass für eine gegebene Position aller Theile der beiden stossenden Moleküle die kinetische Energie eines jeden derselben noch immer proportional  $e^{-hT_1}$ , respective  $e^{-hT_2}$  ist. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten des einen Moleküls nicht unabhängig von der Position des anderen vermöge des Factors  $e^{-h\chi_{12}}$ . Wenn jedoch der

Zusammenstoss vorüber, verschwindet  $\chi_{12}$  und die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten wird wieder für beide Moleküle unabhängig und von der Form 1), respective 2).

Da bisher unter  $\chi_1$  und  $\chi_2$  ganz beliebige Functionen verstanden wurden, so sind unsere Schlüsse ohneweiters anwendbar auf die specielle in §. 2 vorausgesetzte Form der Kräfte. Wo  $\chi_1$  oder  $\chi_2$  unendlich ist, ist die Anzahl der Moleküle der betreffenden Gattung gleich Null.

Die gleiche Schlussweise ist anwendbar auf die Zusammenstösse zwischen A-Molekülen unter sich oder B-Molekülen unter sich oder auch zwischen mehr als zwei Molekülen. Doch ist natürlich bei unseren Schlüssen immer vorausgesetzt, dass die betreffenden Zusammenstösse so häufig sind, dass überhaupt von einem Vertheilungsgesetz gesprochen werden kann. Natürlich können momentane Zusammenstösse immer als Grenzfälle von Zusammenstössen aufgefasst werden, die eine endliche, aber sehr kurze Dauer haben.

Die obige kurze Auseinandersetzung dürfte genügen, um die Anwendbarkeit der Functionaldeterminantengleichung sowohl auf die Zusammenstösse, als auch auf die Bewegung der Moleküle zwischen zwei Zusammenstössen zu zeigen.

Dieser Gegenstand wurde hier hauptsächlich desshalb so ausführlich behandelt, um zu zeigen, dass es bei Anwendung dieser Methode nicht nöthig ist, von vornherein anzunehmen, dass die die Vertheilung bestimmende Function f die Form  $e^{-hE}$  hat, sondern dass es genügt vorauszusetzen, dass f irgend eine Function von E ist. Es kann dann bewiesen werden, dass die Form  $f = e^{-hE}$  sowohl nothwendig als auch genügend ist, was den einfachsten, leichtesten und besten Beweis des Boltzmann-Maxwell'schen Gesetzes liefert.

## Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift

von

#### Dr. Norbert Herz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1894.)

In den von Dr. Fr. Freiherrn Hiller v. Gaertringen publicirten Inscriptiones Graceae insularum maris Aegaei I,  $^1$  findet sich unter Nr. 913 eine für den Astronomen hochinteressante Inschrift, deren Entstehungszeit v. Hiller auf 100 v. Chr. Geb. fixirt. Die Tafel enthält in 2 Colonnen D und H Zahlen für die Planeten Mercur, Mars, Jupiter, Saturn, und zwar nach dem Texte der Colonnen A, B, C, E, F, G: $^2$ 

κατὰ μήκος ζωιδιακοὶ κατὰ πλάτος τροπικοὶ κατὰ βάθος περιδρομαὶ κατὰ σγήμα διέξοδοι.

Eine Discussion der Zahlen auf Grund meiner "Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, I. Theil,« ergab dem Verfasser die Möglichkeit, die Zahlen als Orte der Apsiden auszulegen.³ Der Verfasser hatte die Güte, mir von dieser Inschrift brieflich Mittheilung zu machen, und erlaube ich mir im Folgenden meine ihm bereits brieflich mitgetheilte Meinung hierüber mit seiner Zustimmung zu veröffentlichen.

¹ Corpus inscriptionum graecarum; consilio et auctoritate academiae litterarum borussicae editum.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Bezüglich der Details muss ich auf die erwähnte Publication verweisen, deren Bezeichnungen ich im Folgenden auch zu Grunde lege.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> 1. c. S. 149.

Der grösseren Deutlichkeit wegen theile ich zunächst die Zahlen, wie sie aus dem Originale folgen, mit.

	D	H
8 Στίλβοντος κατά σχήμα διέξοδοι		98
Πυρόεντος κατά μῆκος ζωιδιακοί	3074.2	174920
10 Πυρόεντος κατά πλάτος τροπικοί	309436	134360
Πυρόεντος χατά βάθος περιδρομαί	3	401680
Πυρόεντος κατά σχήμα διέξοδοι	3	136480
Φαέθοντος κατά μήκος ζωιδιακοί		21570
Φαέθοντος κατὰ πλάτος τροπικοί	16	21560
15 Φαέθοντος κατά βάθος περιδρομα	i 24260	242200
Φαέθοντος κατά σχήμα διέξοδοι	26690	260
Φαίνοντος κατά μῆκος ζωιδιακοί	910000	_
Φαίνοντος κατά πλάτος τροπικοί	919216	9810
Φαίνοντος κατὰ βάθος περιδρομα	1007176	.1760
20 Φαίνοντος κατά σχήμα διέξοδοι	1008148	881460

Hiezu theilte mir Herr Dr. v. Hiller die folgenden als wahrscheinlich erkannten Correcturen mit:<sup>2</sup>

¹ Herr v. Hiller hatte die Güte für die vorliegende Publication den Lichtdruck ansertigen zu lassen, der den Schristcharakter und theilweise auch den Grad der Zuverlässigkeit der Lesungen zu ermessen gestattet. In letzterer Richtung ist zu bemerken, dass dieser Lichtdruck nach den mir zugegangenen Mittheilungen des Herrn v. Hiller nach einem Abklatsch hergestellt ist, den der schon aus E. Löwy's Veröffentlichungen bekannte Diakonos Adelphiu in Lindos auf Rhodos Herrn P. Wolters nach Athen gebracht hat, der ihn an Herrn v. Hiller sandte. Es soll eine Tasel aus grauem Marmor sein, 0·78 lang, 0·30 hoch, 0·29 tief, gefunden in dem Orte Kérxtvtos, etwa 2 km westlich von Lartos. Der Lichtdruck ist nach einer Photographie der Rückseite des Abklatsches hergestellt, da die Vorderseite stellenweise durch die Bürste verdorben war.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Die Gründe werden aus dem Folgenden klar.

Hiezu schlug ich noch die folgenden Correcturen vor, falls diese Lesarten sich als zulässig erweisen sollten:

Zeile 11 und 12, Colonne D: M statt M; und Zeile 12, Colonne H: M statt M.

v. Hiller ergänzt zunächst die fehlenden Zeilen für Venus und Mercur, so dass im Ganzen 20 Zeilen entstehen, von denen die ersten vier auf Venus, die nächsten vier auf Mercur u. s. w., je vier für die übrigen Planeten entfallen (die ersten 7 Zeilen fehlen daher in der Tafel).

Vergleicht man die Zahlen der Colonne H, u. zw. der Zeilen 10, 14, 18,

mit den mittleren siderischen Bewegungen in einem Julianischen Jahre nach den jetzt bekannten Werthen:

so erhält man die Verhältnisszahlen:

Sollte das Verhältniss für Saturn auch 5 werden, so müsste es allerdings 8810, also H statt  $\Theta$  gelesen werden, was aber nicht sehr wahrscheinlich ist.

Nimmt man nun die Zahlen der 11., 15. und 20. Zeile

und vergleicht sie mit den siderischen Bewegungen von Venus und Erde:

so ergeben sich die Verhältnisszahlen

$$5 \cdot 24$$
,  $5 \cdot 34$ ,  $4 \cdot 60$ .

Liest man daher in Zeile 9  $\mu$  und in Zeile 12  $\mu$ , und beachtet, dass dann die übereinanderstehenden Zahlen zu je zweien nahe gleich sind, so lassen sich hieraus die folgenden Schlüsse ziehen: Die Zahlen der Colonne H verhalten sich wie die mittleren Bewegungen, oder geben direkt die mittleren

1138 N. Herz,

Bewegungen für eine gewisse Zeit (etwa  $^{1}/_{5}$  Jahr), und zwar die Zeilen 9 und 10 für Mars, 11 und 12 für Venus, 13 und 14 für Jupiter, 15 und 16 für die Sonne, 17 und 18 für Saturn, 19 und 20 für die Sonne.

Da aber für die oberen Planeten die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes gleich der siderischen Bewegung und die Bewegung im Epicykel (das Spiegelbild der Erdbahn) gleich der Sonnenbewegung ist, so werden für Jupiter und Saturn die ersten zwei Zeilen die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes im Deferenten, die letzten beiden die Bewegung des Planeten im Epicykel darstellen. Ebenso wären die Zahlen der 9. und 10. Zeile die Bewegungen des Marsepicykels auf dem Deferenten, während man annehmen müsste, dass die Zahlen der 11. und 12. Zeile nur irrthümlich die Bewegungen der Venus im Epicykel enthalten. Ich habe zwar noch zwei andere Auslegungen versucht, welche ich aber hier nur der Vollständigkeit wegen anführe, da dieselben nur wenig Wahrscheinlichkeit haben. Man kann annehmen, dass die Reihenfolge der Planeten Mercur, Mars, Venus wäre, und die Zeilen 7, 8 sich auf die mittleren Bewegungen des Mercur, die Zeilen 9, 10 auf diejenigen des Mars, die Zeilen 11, 12 auf diejenigen der Venus beziehen, und zwar auf die Bewegungen im Epicykel, während die noch vorangehenden zwei Zeilen (5 und 6) die Bewegung des gemeinsamen Epicykelmittelpunktes der drei Planeten im Deferenten, also wieder die mittlere Bewegung der Sonne enthalten. In diesem Falle würde die Tafel 4 Zeilen weniger, also nur 16 Zeilen enthalten haben, und die drei Planeten Mercur, Mars, Venus würden dem Schema der unteren Planeten folgen: Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten gleich der Sonnenbewegung; Bewegung des Planeten im Epicykel gleich der siderischen Bewegung des Planeten. Die Annahme, dass in dieser Anordnung die Marsbahn innerhalb der Venusbahn liegen sollte, wäre mit Rücksicht auf den Umstand, dass Mars in Opposition kommen kann, Venus jedoch nur bis zu einem gewissen Abstande von der Sonne gelangen kann, sehr unwahrscheinlich. Da weiters in diesem Falle der Text vor den Zahlen nicht stimmen würde, so erscheint diese Auslegung zum mindesten zweifelhaft.

Eine weitere noch mögliche Auslegung wäre die, dass für Mars die Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten verdoppelt worden wäre, wie dies z. B. in der Eudox'schen Theorie der homocentrischen Sphären sich als nöthig herausstellte. Diese Annahme wird aber durch den Umstand widerlegt, dass in der Theorie der Epicykeln eine derartige Beschleunigung der Rotation unnöthig wird, und weiteres dass die Hälfte der angegebenen Zahl (200840) von den für Jupiter und Saturn angegebenen Zahlen beträchtlich abweicht, wenngleich die Zahlen für Jupiter und Saturn selbst ebenfalls nicht identisch sind, was aber, wie noch später erwähnt wird, auf einen Rechenfehler zurückgeführt werden kann.

Dass die Zahlen nicht etwa der Eudox'schen Theorie angehören können, ist leicht zu sehen; für die 4 Sphären muss zunächst die eine, äusserste der täglichen Bewegung folgen, die andere, innerste der siderischen Bewegung des Planeten, die Bewegung der mittleren beiden muss genau gleich sein, da sonst, wie man leicht sieht, periodisch ansteigende Breitenbewegungen in der Art erfolgen müssten, dass der Planet selbst in die Nähe des Poles der Ekliptik gelangen könnte.

Was die Zahlen der Colonne D betrifft, so hatte P. Tannery durch Vergleichung der beiden Colonnen D und H die Vermuthung ausgesprochen, dass die Zahlen der Colonne H das zehnfache der Colonne D wären. Wie die in den »Nachträgen« von v. Hiller gegebenen Lesarten andeuten, ist diese Annahme zulässig, und schloss ich mich derselben an. Für die Zeilen 17 und 18 wäre dann nach Tannery in Colonne D einfach D zu lesen; doch könnte besser D und D D0, also 940 und 949 gelesen, also die D1 als Zahl und nicht als Stellenzeiger aufgefasst werden, wofür ich in noch besserer Übereinstimmung D1 vorschlage; die Bedeutung des in der 18. Zeile folgenden D2 bleibt dabei allerdings unaufgeklärt. In Zeile 11 und 12 müsste

es weiters  $\mu$  an Stelle von  $\mu$  gelesen werden, was aber mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Typen  $A\Lambda\Delta$ , deren Unterscheidung auf dem Steine im Laufe der Zeiten vollständig verschwinden kann, sehr leicht möglich ist.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Schriftliche Mittheilung von v. Hiller an mich.

Es dürfte hier der Ort sein, einiges über die Kreistheilung zu erwähnen. Es scheint mir als ein sonderbarer Zufall, dass in der Schlussbemerkung

N. Herz,

ό κύκλος μο τξ' στιγμών θψκ' ή μοίρα στιγμών....

 $\vartheta \psi x'$  durch  $\tau \xi'$  theilbar ist; die hieraus resultirende frühere Hiller'sche Annahme  $1^\circ = 27'$  hat jedoch für sich wenig Wahrscheinlichkeit, da eine derartige Kreiseintheilung der griechischen Astronomie völlig fremd ist. v. Hiller fand eine Bestätigung seiner Ansicht in der Übereinstimmung des Ortes der oberen Apside des Saturn mit der unter der Annahme dieser Kreistheilung berechneten Angabe der Tafel. So bestechend dieser Schluss ist, ist er doch kaum haltbar und bin ich der Meinung, dass  $1^\circ$  nicht in 3600'', sondern in 720 Theile getheilt erscheint. Nimmt man nämlich  $1^\circ = 720^p$  und drückt die mittleren Bewegungen  $\mu''$  in solchen Theilen aus, so erhält man sofort die in Colonne H angegebenen Zahlen z; denn es ist

$$z = \frac{\mu''}{5} = \frac{\mu^{\circ} \cdot 60.60}{5} \, \mu''.720.$$

Die nicht völlige Übereinstimmung kann nicht wundernehmen, da die angenommenen Zahlen für das Julianische Jahr (365.25 Tage) gelten, die Zahlen der Tafel aber wahrscheinlich für das ägyptische Jahr (365 Tage) und andererseits die Bewegungen selbst in jener Zeit als nicht genügend genau bekannt anzusehen sind. Damit wäre denn auch für den Unterschied der Zahlen in den Zeilen 15 und 16 einerseits und 19, 20 andererseits eine Erklärung gegeben. Wenn auch der Unterschied dieser Zahlen viel zu gross ist, um direkt auf diese Art erklärt zu werden, so ist es nicht unmöglich, dass die Zahlen aus Beobachtungen einiger Jahre (eines relativ kurzen Zeitraumes) gewonnen wurden, und dabei für Saturn ein Rechenfehler vorfiel, wodurch alle Zahlen gleichmässig vergrössert erscheinen. Daher kommt dann die Übereinstimmung der von den übrigen beträchtlich abweichenden Verhältnisszahlen 4.48 und 4.60.

Von meinen diesbezüglichen Wahrnehmungen verständigte ich ungesäumt Herrn Baron v. Hiller. Dieser hatte nun seinerseits die Güte, mir weitere Details über die Ansichten Tanner y's

mitzutheilen, aus denen ich ersah, dass wir auf demselben Standpunkte stehen. Auch er verwirft die Eintheilung  $1^{\circ} = 27'$ , nimmt aber an, dass  $\Theta \psi \kappa'$  als 720 Sonnendurchmesser zu lesen sind. Die Zahlen in den Colonnen D und H legt er als die Anzahl der Umläufe in einer gewissen Periode aus, welche für die Zahlen der Colonne D genähert 25000 Jahre (zufällig nahe der Periode der Präcession) für die Colonne H das zehnfache dieser Periode bedeutet.

Im Grunde genommen mit meinen Erörterungen identisch drängt sich jedoch hier die Frage auf, warum eine an und für sich so bedeutende Periode noch verzehnfacht wurde. Sind aber die Zahlen der Colonne H die jährlichen Bewegungen in gewissen Theilen, so werden ja durch dieselben Zahlen die Umläufe angegeben, welche in einer gewissen Zeit stattfinden, und zwar in so viel Jahren, als ein Theil im Umkreise enthalten ist, d. h. in  $360 \times 720$ , oder  $720 \times 360 = 259200$  Jahren, also zufällig nahe in der zehnfachen Periode der Präcession. Auch die Abweichung der Zahl in der 18. Zeile der Colonne H führt Tannery auf einen Fehler in der angenommenen Dauer der Periode zurück, was sich im Wesen mit meiner Annahme für die Zeilen 17 bis 20 deckt.

Liegt in der Verzehnfachung der an und für sich sehr grossen Präcessionsperiode ein nicht zu unterschätzender Einwurf gegen die Tannery'sche Form der Annahme (in merito sind ja, wie ich bereits erwähnt, unsere beiden Suppositionen gleichbedeutend), so ist hingegen noch darauf hinzuweisen, dass in der von mir adoptirten Annahme eine Verwandlung von Graden, Minuten und Secunden, eventuell Grade und 720-teln desselben oder Sonnendurchmessern und 360-teln desselben in Zahlen der kleineren Einheit auftritt, ein Vorgang, der im Alterthum nicht üblich war, da die Darstellung dieser Zahlen im decadischen Systeme eben durch die Sexagesimaltheilung ersetzt

<sup>1</sup> Das zuerst von Tannery hervorgehobene Fehlen des Zeichens für die Tausende vor  $\Theta$  erscheint mir nicht massgebend, da auch in den Zeilen 9, 10 und 15, Colonne D und in den Zeilen 18 und 19, Colonne H dieses Zeichen wegblieb, oder im Laufe der Zeiten verschwand. Hingegen spricht die Tannery'sche Bemerkung, dass daselbst die Type  $\Theta$  sich durch ihre Grösse von den anderen unterscheidet, für seine Annahme.

wurde. Aus diesem Grunde würde ich eine Combination beider Annahmen für nicht unwahrscheinlich halten. Die Zahlen der Colonne D könnten wohl Umläufe in einer Epoche von 25920 Jahren bedeuten und die in der Colonne H befindlichen Zahlen, die aus jenen durch Multiplication mit 10 erhalten wurden, geben sofort die jährlichen Bewegungen in Theilen, von denen  $360 \times 720$  auf den Umkreis gehen.

Tannery nimmt an, dass sich diese 4 Zahlen auf den siderischen Umlauf (in Länge), den draconitischen Umlauf (in Bezug auf die Knoten) den anomalistischen Umlauf (im Epicykel) und eine zweite Anomalie (abhängig von der Stellung der Sonne) bezieht. Dagegen ist eine sehr wichtige Bemerkung zu machen: Eine siderische Bewegung der Knoten war im Alterthum nur für den Mond bekannt; auch verträgt sich eine supponirte Bewegung der Knotenlinie etwa so, wie sie beim Monde angenommen wurde, nicht mit der Art und Weise, wie die Breitenbewegungen von Ptolomäus, von den Arabern und noch in den Alfonsinischen Tafeln angenommen worden waren. Ebenso hypothetisch erscheint die Annahme, dass man es mit siderischen und tropischen Bewegungen zu thun hat; denn dann müsste die Differenz in einem Jahre constant 50" oder 10° sein.

Hingegen hat die Tannery'sche Annahme über die Zahlen der letzten beiden Zeilen eine grosse Wahrscheinlichkeit; könnte man κατὰ σχήμα διέξοδοι (oder aber, was ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden braucht, κατὰ βάθος περιδρομαί), als eine vom Sonnenorte abhängige Anomalie ansehen, so wäre die naheliegendste Annahme die folgende: Die Bewegungen im Epicykel wurden bekanntlich immer vom instantanen Apogeum aus gezählt; addirt man zu dieser Bewegung die Bewegung des Epicykelmittelpunktes, so erhält man die Bewegung von einer festen Richtung im Raume, also gewissermassen eine siderische Bewegung im Epicykel; dann müsste also die

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, IV. Capitel und II. Theil, I. Capitel.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Der Unterschied der Bewegung in einem tropischen und siderischen Jahre wäre nicht constant, aber ebenfalls sehr klein.

Summe der Zahlen der ersten oder zweiten und der dritten Zeile die Zahlen der vierten Zeile ergeben. Diese Beziehung findet sich thatsächlich für den Jupiter in Colonne D und H und für den Saturn in Colonne D, wenn daselbst, wie früher erwähnt,  $\mu$  nicht als Stellenzeiger aufgefasst wird, wodurch einerseits ein indirecter Nachweis für die Richtigkeit dieser Lesart gegeben ist, andererseits aber auch in Folge der Übereinstimmung dieser Beziehungen in den Colonnen D und H die Richtigkeit der Annahme, dass man es in beiden Fällen mit mittleren Bewegungen oder mit Umläufen in einer gewissen Periode zu thun hat, dargethan ist.

Zieht man aus den von Ptolemäus im Almagest mitgetheilten Hipparch'schen Werthen für die Verhältnisse der Umlaufszeiten <sup>1</sup> die jährlichen Bewegungen, so erhält man in der hier angenommenen Einheit die folgenden Zahlen:

für Venus	421365բ	für Jupiter	21860 <sup>p</sup>
für Mars	137818	für Saturn	8807

Hiezu kommt dann die Bewegung der Erde 259200°. Die beste Übereinstimmung findet sich bei Jupiter, bei welchem auch die vierte Zahl sehr nahe die siderische Bewegung der Erde gibt, so dass die dritte Zahl mit der von der oberen Apside gezählten Bewegung übereinstimmt.

Einer letzten Mittheilung von Tannery entnehme ich noch folgendes: Tannery nimmt an, dass die 4. Zeile für jeden Planeten als Bewegung in Elongation aufzufassen ist; dann müsste die Summe der 1. und 4. Zeile eine Constante (die Bewegung der Sonne) geben; hiefür spricht allerdings die übliche Bedeutung des κατά σχήμα; hingegen wären die Lesungen noch in folgender Weise zu corrigiren:

	Mars	Jupiter	Saturn
Erste Zeile	. 154920	24500	9920
Vierte Zeile	. 136480	266900	281480

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, S. 73.

Hier ist zunächst zu bemerken: die Correctur von A in  $\Delta$  in der ersten Zeile des Jupiter kann leicht adoptirt werden; die von mir vor Kenntniss der Tafel vorgeschlagene Correctur von M in M bei der vierten Zeile des Mars erscheint nunmehr als zweifelhaft, und würde in diesem Falle die Tannery'sche Erklärung für zulässiger zu halten sein. Hingegen bleibt in dieser die Lesung M, welche keinesfalls durch M ersetzt werden kann völlig unaufgeklärt, und wenn man daselbst auch M mit Tannery M, also 182680 lesen wollte, so tritt diese Zahl vollständig aus dem Rahmen der übrigen heraus. Es bleibt daher noch manches für die Auslegung der vorliegenden hochinteressanten Inschrift zu thun.

Nachdem v. Hiller aus archäologischen Gründen das Alter des Steines auf etwa 100 vor Christi Geburt setzte, hielt ich anfangs dafür, dass der Stein eine Darlegung Hipparch'scher Astronomie gibt. Da jedoch bekanntlich die von Ptolemäus angegebenen Zahlen direct Hipparch zugeschrieben werden, und diesem daher eine weit genauere Kenntniss der mittleren Bewegungen zugeschrieben werden muss, so dürfte der Stein wohl eher anderen Ursprunges sein, worüber sich allerdings in Ermangelung jeglichen Anhaltspunktes nichts weiter angeben lässt.





in Berlin.)



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.
- Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.
- Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.
- Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

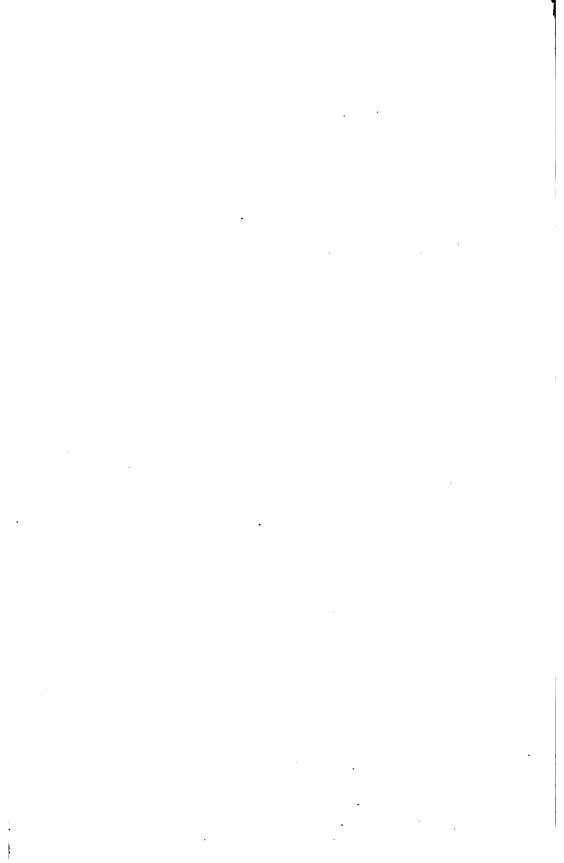
Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, IX., Wasagasse 12) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

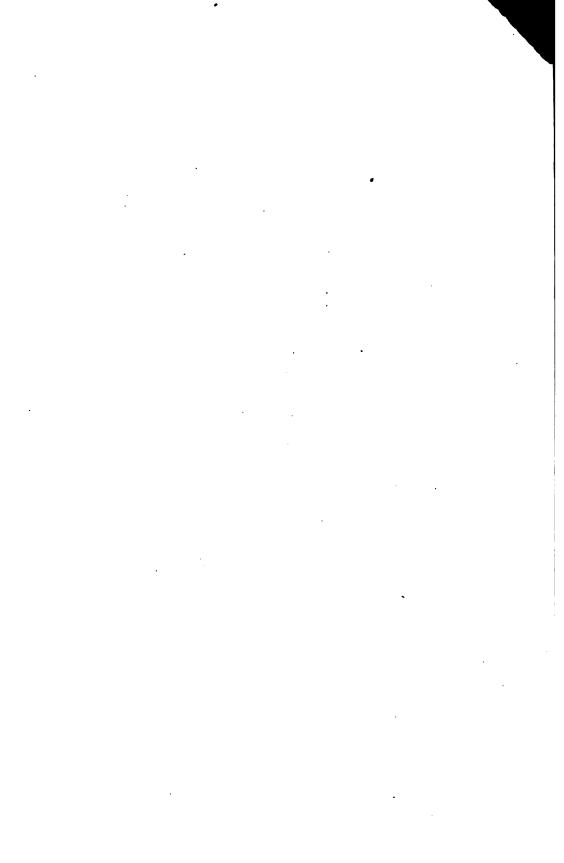
Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.









10.23